

PÄDAGOGIUM

Eine Methoden-Sammlung für Erziehung und Unterricht

herausgegeben von Prof. Dr. OSKAR NEUSSNER

BAND VI, I

NEUBAU *1896 Neu- auf- bau*

des Rechenunterrichts

Ein Handbuch für alle, die sich mit
Rechenunterricht zu befassen haben

von

Johannes Kühnel

1. Aufl.
Erster Band

Mit über 80 bildlichen Darstellungen



1916

Verlag von Julius Klinckschardt in Leipzig

Alle Rechte vorbehalten

Rechtsanwalt János Rózsavölgyi in Leipzig

Vorwort

Für die Behauptung, daß die pädagogische Literatur der jüngsten Vergangenheit — vor dem Kriege — das Recht hat von Nichtigkeiten mit sich geführt habe, ist der Beweis nicht allein schwer zu führen; das ist für die deutsche Pädagogik kein Lob; noch weniger ist freilich dies in der andern Tatsache gegeben, daß es viele dieser Nichtigkeiten aus Menge Käufer finden.

Und doch darf man beide Erscheinungen nicht lediglich von oben herab, vom idealen Standpunkt aus betrachten, auch der andere, der psychologische, verlangt sein Recht. Von ihm aus gesehen verstanden jene beiden Erscheinungen ein reges geistiges Leben, ein Sehnen und Suchen nach besserem Wege zum Ziel.

Freilich macht das Sehnen und Suchen auch nicht Halt vor geerbten Traditionen; um dem idealen Ziele näher zu kommen, stellt es die Frage nach der Berechtigung ihrer Ansprüche. Dabei ist die Gefahr nicht gering, bei solchem Frage nach der Höhe des Bodens der Wirklichkeit unter den Fiklen zu verlieren, sich in Phantasie-Idyllen zu ergöhen, die mit dem Leben, wie es nun einmal ist, keinen Zusammenhang haben.

Selbst soll und will der wissenschaftliche pädagogische Schriftsteller vermeiden, Nichtigkeiten zu bringen, die der verächtliche Ausdruck hantabender, wenn auch zweckmäßiger Franz oder auch antiquierter Theorien sind, und andererseits Utopien nachzujagen, die in absehbarer Zeit nicht verwirklicht werden können. Die Erkenntnis dieser Fiklen Gefahren hat bei manchem Hinsichtigen die Wirkung, daß er die Feder hinstellt und das Buch, das er schreiben könnte, nicht schreibt. Ich habe es dennoch getan und bin dafür Rechenschaft schuldig.

Einem Entzweiten nachgehen, heißt ein Sein begreifen, das ist der Sinn des „geistlichen Verfahrens“. Bei seiner Anwendung möge mir der freundliche Leser ein paar Wochen folgen.

Das Gefühl der Unzufriedenheit mit den eigenen Leistungen, von dem man abweichen sollte, daß es im Anfang

jeder Tätigkeit am größten wie und nach und nach abnehmen sollte, zeigt den entgegengesetzten Verlauf: es wurde mit dem Jahren immer stiller. Es ist das kein glücklicher Zustand. Er veranlaßte immer mehr Mühe, immer neuere und andersgeartete Versuche, immer größere Vertiefung in die Seele des Unterrichts, in die Seele des Kindes.

Dabei trat das Bewußtsein immer stärker auf, wie unzulänglich und lebensfernend doch die pädagogischen Theorien von gestern und heute sind. Und die Gewissensfrage, in die das Befolgen dieser Theorien brach, konnten jenes Bewußtsein nur zur Überzeugung verflüchten.

In Kontrastwirkung dazu steigerte sich die geradezu überhitzte Sehnsucht nach ständiger und intellektueller Hebung unseres Volkes und das Verantwortlichkeitsgefühl des sterblichen Existenz.

Aussicht auf Besserung dieses seelischen Zustandes wie der untermittellichen Leistungen verhielt nur die schon angeordnete Vertiefung in exakte Untersuchungen des Wesens und Werdens aller Bildungsarbeit. Und langsam und leise tat sich im Laufe der Jahre das Tor der Wahrheit auf, nein, das ist rüddel gesagt; rather so: Im steten Wechselwirken zwischen rastlosem Studium und praktischem Erproben erschienen Lichtpunkte, die sich als Leitsterne bewiesen, die den Weg aufwärts weisen zu Höhen, über welche die Dummheit des Volkes keine Macht hat.

Endlich gelang es nicht dem immer scharfer werdenden Blick, wieviel nationale Werte durch eine andere geordnete Organisation unseres Erziehungswesens erhalten werden könnten.

Dies sind die allgemeinen Gründe, welche zur Abfassung des vorliegenden Buches drängten. Die besonders sind nachher dargelegt: Dem Gebiete des Rechens kommt meine besondere Neigung entgegen, das diese ich praktisch über ein Vierteljahrhundert, und ich gewiss ich die Überzeugung, daß gerade auf diesem Gebiete die pädagogische Theorie der Vergangenheit am meisten versagt hat, und daß sich von hier aus Befund erschließen läßt.

Nicht leichten Herzens gebe ich dies Buch heraus. Ich weiß, daß ich gegen vieles Bestehende und „Bewährte“ mich wende, daß ich gegen den Strom schwimme, daß ich das Gelände unseres Unterrichts abtrotzen im Begriffe bin. Und doch kann ich nicht anders, wenn ich der Wahrheit treu bleiben und unserem Volke nicht vorenthalten will, wenn das Geschick mich antreibt.

Ich habe aber guten Mut. Das Vorwörtchen in die geheimen Schätze der Vergangenheit stülpte ihn mir: Wer die Geschichte des Rechenunterrichts durchgeht, findet fast überall meine Gedanken in den Anfängen vorhanden, ein Teil wohl ausgesprochen bei den großen Meistern der Pädagogik. Aber sie erscheinen einzeln, gewissermaßen als Lichtblitzchen in einer großen Menge anderer Ausführungen, denen das Interesse der Vorleser abhandelt. Der heutige exakte Psychologie ist es verhehlichen, diese Gedankenfäden geistiger Geister von der Asche zu befreien, ihre Geistesflitze wie in einem Brennpunkte zu sammeln.

Ich habe ferner Mut, weil ich auf dem neuen genannten wissenschaftlichen Standpunkte der Gegenwart sitze, der niemals durch Wortbruch erschüttert werden kann, der immer nur den besser beglaubigten Tatsachen den Vorrang ruerkennet; und dies gegenüber allen möglichen Spekulationen, welche die didaktische Theorie und noch mehr die Unterrichtspraxis heute noch fast völlig beherrschen.

Ich habe endlich auch Mut, weil ich an den deutschen Lehrer der Zukunft glaube, an seine Unabwieslichkeit mit sich selbst, an seine Darlegungsernenheit, an seinen Fleiß, an seine Verantwortungsbewußtheit, an seine feste Gesinnung. Diejenigen, die nachsprechen, was man ihnen einkleret, sterben am Glück mehr und mehr ras. —

Alle Bausteine bekommt man nicht mit einmaligem Putzen Mack, und alle, eingeordnete Irrtümer lassen sich aus den Gemüthern nicht mit zwei Worten oder zwei Sätzen hinwegwischen. Daran will man es verstehen, wenn Hauptgedanken wiederholt ausgesprochen werden. Es ist derselbe Grund, aus dem man im Rechnen die Übung preist: Nur durch Wiederholung, und zwar durch Wiederholung an gefühlbetonten Stellen werden auch in unserem Alter wichtige Gedanken zu unserem geistigen Eigentum. Außerdem ist es beim erstenmaligen Studium eines Buches nicht ganz leicht, die grundlegenden Gedanken von den mehr ausfüllenden zu unterscheiden, wenn jene nicht in irgendwelcher Weise hervorgehoben werden.

Um ein solches vertieftes Studium bitte ich die Antagessenen aller Arten von Schulen, und darnach um ein praktisches Anprobieren. Jenes ist die Voraussetzung. Denn jede Ungewöhnung macht Schwierigkeiten, die im Denken am meisten, und sie werden dazu mit jedem Jahre des Lebens größer. Ferner ist die Ungewöhnung

der Schüler gar nicht so leicht. Es erscheint mir darum nicht ratsam, diejenigen Gedanken, denen man ohne weiteres zustimmen zu können meint, sofort in die Praxis umzusetzen zu wollen; ich bin sehr, auch solche Gedanken sind innerlich völlig zu verwechseln. Noch mehr gilt dies natürlich von solchen, denen man nicht gleich zustimmen zu können. Bei solcher Stellungnahme wäre ein „Erproben an der Praxis“ nicht beweiskräftig. Es liegt mir selbstverständlich völlig fern, statt aller Glaubenssätze nur diese annehmen zu wollen, ich will nur anregen zu eigenem Verfolgen in die Sache und zu eigenem innerem Erwerb. Dann aber wünsche ich jenen Erproben allen deutschen Lehren von Herzen und heißt, daß damit unsern Volke ein Stück Erlebung zuteil werde, dessen Notwendigkeit von allen Seiten erkannt und betont worden ist, dessen Fortentwicklung aber noch nicht über den toten Punkt hinausgegangen war.

Leipzig, November im Kriegsjahre 1918.

Johannes Kähler.

Inhalt des ersten Bandes.

Die Vorarbeiten.

Seite

§ 1.	Ziel, Frage und Beihilfrage.	1
§ 2.	Die Untersuchung	3
§ 3.	Lehrsätze der Gegenwart	7
§ 4.	Entwickelung der Gegenwart	23
§ 5.	Der Aufbau	43

Der Aufbau.

I. Teil: Die Grundlagen.

§ 6.	Das Zahlbegriff	47
§ 7.	Die Entwicklung der Zahlbegriffe.	59
§ 8.	Die Entwicklung der ersten Zahlbegriffe	66
§ 9.	Die Entwicklung der ersten bestimmten Zahlbegriffe	87
§ 10.	Die Erweiterung der Zahlbegriffe der Reihe	73
§ 11.	Die Erweiterung des Zahlensystems	78
§ 12.	Die Zahlbeziehungen	88
§ 13.	Die Entwicklung der Operationsbegriffe	104
§ 14.	Die Anwendung der Operationen auf die Fülle des Lebens	113
§ 15.	Die Entwicklung der reinen mathematischen Anwendungsfähigkeit	116

II. Teil:

§ 16.	Ein neues Ziel	140
-------	----------------	-----

III. Teil: Das Lehrverfahren.

§ 17.	Vorbereitungen.	166
-------	-----------------	-----

1. Abschnitt des Lehrverfahrens:

§ 18.	Die Abstraktion	167
-------	-----------------	-----

2. Abschnitt des Lehrverfahrens:

Die Gewinnung der Zahlbegriffe.

§ 19.	Die Erweiterung der Zahlenreihe	168
§ 20.	Die Stellung in der System	180
§ 21.	Die Stellung in der Buchstabe	188
§ 22.	Die allgemeine Zahl	199

3. Abschnitt des Lehrverfahrens:

Die Gewinnung der Operationen.

§ 23.	Die Gewinnung der Aufgaben	198
§ 24.	Die Stellung in dem System der Operationen	199
§ 25.	Addition und Subtraktion	208
§ 26.	Multiplikation und Division	215

4. Abschnitt des Lehrverfahrens:

Die Fortführung der Operationen im Bereiche der Systemzahlen.

§ 27.	Die Aufgabe der Stufe	222
§ 28.	Addition und Subtraktion	229
§ 29.	Multiplikation und Division	237

Inhalt.

5. Abschnitt des Lehrverfahrens:

Zur äußeren Form der bisherigen Bildungstufen.

		Seite
§ 20.	Die Mittelstufe des elementaren Rechnenunterrichts	544
§ 21.	Die mathematische Form	546
§ 22.	Die mechanische Selbstthätigkeit	550
§ 23.	Die Forderung der Rechenkünste	557
§ 24.	Die täglichen Rechenübungen	574
§ 25.	Das Gehrwerk der Teller	582
§ 26.	Wöchliches und wöchentliches Rechnen	585

6. Abschnitt des Lehrverfahrens:

Die weiteren Rechenungsarten.

§ 27.	Die Buchrechnung	588
§ 28.	Die Geldaufschätze	611
§ 29.	Mündliche Rechnung	622
§ 30.	Die Hörschulischen Rechenarten	627
	Anhang. Die neuen Lehrmittel	636

Inhalt des zweiten Bandes.

7. Abschnitt des Lehrverfahrens:

Zusammenschauungen.

§ 41.	Das Rechenverfahren.
§ 42.	Das Wesen der Anwendung.
§ 43.	Die reine und die brennende Licht.
§ 44.	Die eingebildeten Körperchen.
§ 45.	Das Schützen und Beschützen.
§ 46.	Die angewandten Aufgaben.
§ 47.	Die eigentliche Fortschreibung.
§ 48.	Die Rechenblätter.
§ 49.	Die Formeln.
§ 50.	Die Lehrsätze.
§ 51.	Die Rechenregeln.
§ 52.	Algebraische Forderung.
§ 53.	Zahlenverhältnisse.
§ 54.	Probleme.
§ 55.	Vergleich.

IV. Teil des Aufbaues: Der Lehrplan.

§ 56.	Grundriss des Plans.
§ 57.	Anzahl der Stoffe.
§ 58.	Anordnung der Bildungsstufe.
§ 59.	Organisches und Verbalis.
§ 60.	Vergleich.

V. Teil des Aufbaues:

Lehrpläne mit mathematischer Begründung.

Rechnung: A-B-C-Rechen-Rahmen- und Rechenverfahren.

Die Vorarbeiten.

§ 1. Ziel, Klags und Schulfrage.

Dass unsere Kinder zu deutscher Stilleheit und Stärke erzogen werden, daß ihr Wille den höchsten Aufgaben unseres Volkes zu- streben lerne, darin besteht die allgemeine Aufgabe aller Unterricht- stufen aller unserer Erziehungsschulen. Nur im Bewußtsein und im Führen dieser allgemeinen Aufgabe hat jedes Fach seine Sonderauf- gaben zu bezeichnen, seine Sonderpflichten zu erfüllen.

Dem Rechenunterricht werden zwei solcher Sonderauf- gaben zugewiesen, und zwar von den Erziehungsstellenorten sowohl wie von den gesetzlichen Bestimmungen:

er soll die „allgemeine Geisteskultivierung“, insbesondere das

Denken des jugendlichen Menschen fördern — seine formale Aufgabe;

er soll die für das praktische Leben nötigen Kenntnisse und Fertigkeiten dem Schüler übermitteln — seine materiale Aufgabe.

Nun ist die Klage allgemein, daß unser gegenwärtiger Rechen- unterricht diese Ziele in der Hauptsache nicht erreiche, vielleicht gar nicht erreichen könne.

Als Beweis für diese Behauptung dient zunächst die von den verschiedenen Seiten bestätigte Erfahrung, daß junge Leute, die nur kurze Zeit dem Rechenunterricht der Volksschule entwachsen waren, in erschreckendem Maße versagten, wenn ihnen einfache Rechenaufgaben des praktischen Lebens vorgesetzt wurden. Dazu kommt die andere Erfahrung, daß viele Schüler höherer Lehranstalten nicht imstande sind, die Aufgaben der sogenannten bürgerlichen Rechnungsarten zu lösen, obwohl sie in der Algebra Befriedigendes leisteten. Endlich muß noch auf die weitere Tatsache hingewiesen werden, daß ein großer Teil unseres Volkes durch seine ge- samte Wirtschaftsgebildung zeigt, daß er nicht rechnen kann; sei es, daß rasch ausgegeben wird für erhebliche Dinge oder das so- genannten „bescheidenen“ Luxus; sei es, daß am unrichtigen Orte gespart wird; sei es endlich, daß Untersuchungen aller Art begonnen und weitergeführt werden ohne genügende Klardispositionen und Er-

führungen oder eines hinreichenden Betriebskapital. Und das gilt nicht nur von den Jugendlichen beider Geschlechter, von Lehrlingen und Fabrikknaben besonders, auch ältere Leute in großer Zahl zeigen diese „Rechenlosigkeit“. Geschäftsgründungen aller Art, Unternehmungen bei öffentlichen Arbeiten und ähnliche Vorhaben scheitern meist des Zugs; ein großer Teil der Arbeit unserer Väter ist darauf zurückzuführen; Geisliche und Armenpfleger wissen davon zu erzählen, und der Krieg hat uns Beispiele in Menge gezeigt, die geeignet sind, jedem Vaterlandsfreund mit nicht geringer Sorge zu erfüllen.

Bei solchen und ähnlichen Erscheinungen ist die Allgemeinheit leicht geneigt, die Güte des gemeinsamen Unterrichts in Zweifel zu ziehen, vielleicht auch einzelne Persönlichkeiten und Einrichtungen für den erkennbaren Mangel verantwortlich zu machen, und vorzüglich eine Schulreform zu fordern, die dem angeblich so öftig bedachten Fache durch erhebliche Vermehrung seiner Stundenzahl entgegen soll.

Gegenüber zeigen Schulinterner und Schulleitenden¹⁾ nicht selten dann, jede Verantwortung der Schule abzulehnen. Sie können nichts dafür, wenn einzelne Schüler nicht fleißig oder nicht aufmerksam genug gewesen wären oder das Erworbenes nicht festgehalten hätten.

Sie weisen mit Recht darauf hin, daß auf wenigen Gebieten der Didaktik so wenig gearbeitet worden ist, wie gerade auf dem Gebiete des Rechenunterrichts: die Stufenfolge ist aufs genaueste festgesetzt und nachgeprüft, die Methoden sind sehr sorgfältig ausgearbeitet.

Gleichwohl kann sich die Schule nicht der Tatsache verschließen, daß — wenigstens in den Kreisen wohlmeinender Lehrerinnen — eine tiefgehende Unzufriedenheit mit dem Ergebnisse unseres Rechenunterrichts herrscht; auch sie kann sich des Eindruckes nicht erwehren, daß trotz allen Fleißes und aller persönlichen Bemühungen, trotz aller Kleinarbeit und aller Treue die Sache doch nicht recht vorwärts gehen will.

Bei solcher Lage der Sache ist die Vermutung nicht von der Hand zu weisen, daß der Fehler vielleicht in den Grundlagen liegt, auf denen der gegenwärtige didaktische und methodenmäßige Aufbau ruht. Diese Vermutung zu erfüllen oder zu bestätigen, ist wissenschaftlicher Bearbeitung vorbehalten, einer Bearbeitung, die die angeführten Erscheinungen von den Zufälligkeiten des einzelnen Vorkommens erhebt und damit die Tatsachen des

¹⁾ Nicht die Schulleitenden sind an dem Fehle schuld. Sie haben mit ihrem Wissen die beste Absicht. Aber diese Absicht war wissenschaftlich, war Forschung und Praxis ist nur Gegenwart geworden haben. Niemand hat sich mit Sonderbefugnissen des Fehle nicht an der Wurzel packen, vor Bildung der Bildung, vor allem der Lehrerbildung rechtlich Erfolg.

Klagegründen einwandfrei feststellt, die dem Entstehen solcher Erscheinungen nachgeht, ihre Ursachen aufleuchtet und ihre Bedingungen untersucht und endlich infolge ihrer allgemeinen Beherrschung der in Betracht kommenden Grundfälle in der Lage ist, Heilmittel zu empfehlen, die nicht die Symptome der Krankheit zurückdrängen, sondern ihre Ursachen zu beheben verheißt.

§ 2. Die Untersuchung.

Die wissenschaftliche Bearbeitung der verschiedenen Erziehungs- und Unterrichtsgebiete, deren Studium ohne weiteres solche Fragen, wie sie oben aufgeworfen wurden, beantworten könnte, gibt es noch nicht. Das ist keine zu weit gehende Behauptung, und wir treten damit noch den Klaisern der Pädagogik nicht im geringsten zu nahe. Denn einmal hat der Begriff der wissenschaftlichen Bearbeitung immer nur Gegenwartswert, d. h. jede wissenschaftliche Annahme hat nur so lange Geltung, bis sie durch neuere Forschungen überholt wird, und sodann haben die pädagogischen Klaisier, die Philosophen unter ihnen nicht ausgenommen, das Gesamtgebiet der Erziehung wie ihre Einzelgebiete in der Hauptsache intuitiv, gefühlmäßig bearbeitet. Erst die jüngere Vergangenheit hat sich den exakten wissenschaftlichen Methoden zugewandt — die neuere Psychologie ist ihr Bahnbrecher, und so darf man weiter behaupten: eine wissenschaftliche Bearbeitung der verschiedenen Erziehungs- und Unterrichtsgebiete ist im Entstehen.

Daß das nicht schon früher geschehen ist, hat seinen Grund darin, daß die beiden wichtigsten Arten ihrer Vertreter nicht am Werke waren: die Lehrer der höheren Unterrichtsanstalten fehlten sich — man kann fast sagen: durchweg — als Fachwissenschaftler, als Philologen, Theologen, Mathematiker usw. Sie wurden in dieser Auffassung bestimmt durch die allgemeine Meinung, die selbst lebende Kräfte teilten, es brauche jemand nur ein tüchtiger Wissenschaftler zu sein, dann werde er auch an den tüchtigsten Lehrern und Erziehern stützen. Diese Meinung hat sich ja bis in die Gegenwart erhalten, mehrwüßigerweise selbst in sonst gebildeten Kreisen, auch ein Zeichen dafür, wie jung die Erziehungswissenschaften eigentlich sind. Der andere Gruppe der Pädagogen aber, den Volksschullehrern, halfen bis dahin vom größten Teil der wissenschaftliche Rüstung zur Mitarbeit an exakten Untersuchungen auf dem Gebiete der Erziehungswissenschaften. Nach beiden Richtungen hin sind seit etwa einem Menschenalter kräftige und zuletzt schon stärkere Änderungen bemerkbar geworden: Eine große Zahl hervorragender Vertreter sowohl der Unversitäten, wie der höheren Bildungsanstalten, wie auch der Volks-

schulen bemüht sich erfolgreich um eine wissenschaftliche Bearbeitung der verschiedenen Erziehungs- und Unterrichtsgebiete.

Das verhältnismäßig späte Erscheinen der Pädagogik als Wissenschaft hat noch einen weiteren Grund. Er besteht darin, daß man — ebenfalls nur schwach bewußt — von jedem ernstlich strebenden Wissenschaftler vollkommene Exaktheit verlangt. Das ausgehende 18. Jahrhundert hätte schon keine dicken Gebirke, das 19. führte ihn nicht bewußt durch; Geologie und Psychologie sind Beispiele dafür. Die Pädagogik als Gesamtheit der Erziehungswissenschaften konnte aber diese vollkommene Exaktheit in allen ihren Teilen nicht aufweisen und bequeme deshalb grundsätzlichen Widerständen. Diese hätten sich nicht erheben, wenn man sich klar gemacht hätte, daß jene Forderung vollkommener Exaktheit im Sinne systematischer Widerspruchslösigkeit wohl im Ideal zu Recht besteht, in der Wirklichkeit des Lebens aber eine willkürliche Einschränkung des bis dahin bestehenden Wissenschaftsgriffes bedeutet. Denn die Pädagogik gehört wie Medizin und Jurisprudenz zu den angewandten Wissenschaften, die wohl in ihrem ähnlichen Grundlagen nicht gestört werden können, aber in Zielen, Mitteln und Methoden in wechselseitiger Abhängigkeit stehen zu der Praxis des ständigen wirklichen Lebens, das immer neue Fragen stellt.

Der Vergleich mit der Medizin und Jurisprudenz, der sich auch dem unübteren Verstande anbietet, zeigt uns auch, daß eine rein literarische Bearbeitung der Erziehungs- und Unterrichtswissenschaften zwar zweckmäßig noch möglich ist. Das Wesen der Erziehung wie des Unterrichts verlangt vielmehr eine wissenschaftliche Behandlung, bei welcher die unvollkommenen Ergebnisse politischer Untersuchungen vielfältig und ununterschieden an der wirklichen Unterrichtsarbeit nachgeprüft werden, bei der die Fragestellung jener Untersuchungen von der wirklichen Erziehungs- und Unterrichtstätigkeit ausgehen bei, mit andern Worten: bei der Theorie und Praxis der Hand in Hand gehen müssen. — genau wie bei Medizin und Jurisprudenz.

Auf dem Gebiete des Fachunterrichts liegen zwar schon eine ganze Anzahl wissenschaftlicher Arbeiten vor, aber sie beschränken sich auf kleine und kleine Teilgebiete¹⁾. Diejenigen Werke aber, welche das Gesamtgebiet zu umfassen trachten, sind mehr schulpäda-

¹⁾ Merzmann behandelt das Rechnen im 3. Bande seiner „Vorlesungen zur Einführung in die experimentelle Pädagogik“ (Leipzig 1894) — bei der Arbeit zu diesem Buche konnte, nachdem ich das vorliegende Werk im bibliographischen Entwurf abgeschlossen hatte — und berichtet daher über die in Betracht kommenden Literaturen. Teilhaft habe auch ein Werk, das von einer bestimmten Abweichung und von

tiefer als wissenschaftlicher Art. Diese letzten sind ungewiss zahlreich, basieren auf persönlicher Erfahrung und auf persönlichen Erfolgen, lassen aber in den meisten Fällen den Zusammenhang mit der Wissenschaft vermissen. Sie nehmen Stellung zu Forderungen von subjektiver Bedeutung und begründen mit häufigsten Ausnahmen, die aber vor anderer Forderung nicht bestehen können. Diese ersten Arbeiten aber leiden oft an dem entgegen gesetzten Mangel: sie haben nicht genug Beziehung zur Praxis; insbesondere fehlt ihnen häufig die Formulierung, welche die Praxis an die Hand geben könnte. Dann muß die einzelne Frage mit dem Blick auf das Gesamtgebiet ins Auge gefaßt werden. Folgendes könnten solche Fragen sein: Wie (und wann) werden Zahlbegriffe von einer gewissen Struktur gewonnen? Wie (und wann) entstehen die Operationsbegriffe? Wie gestaltet sich der Erwerb der Rechenkenntnisse? Wie ihre Anwendung? Welche Wirkung hat eine stark wechselnde Vertrautheit? Welche das Entwickeln? Welche der Wechsel arithmetischen Kopfrechnen und schriftlichen Rechnen? Welche Wirkung haben dazwischen hohe Anforderungen? Welche Wirkung dazwischen tiefe Anforderungen? Welche Wirkung haben im Rechnen einer bestimmten Altersstufe die Hausaufgaben? Welche Wirkung hat der Abteilungsunterricht? Sind die Geschlechter in Bezug auf Zahlverfassung verschieden? In Bezug auf Operationsauffassung? In Bezug auf Anwendungsgeschicklichkeit? Sind die Ziele der einzelnen Stufen richtig ausgedrückt? Ist der Lehrplan richtig angelegt? usw.

Solche und noch viele andere Aufgaben im Gebiete des Rechenunterrichts harren der Lösung von Seiten der psychologischen Forschung in Verbindung mit der erzieherischen und unterrichtlichen Tätigkeit.

Das vorliegende Werk erhebt nicht den Anspruch, diese Lösung herbeizuführen. Es will nur ihr Wegweiser sein. Indem es psychologische Tatsachen didaktischen Grundrissen gegenüberstellt, welche zum Irrtum werden, sobald ihnen allgemeine Gültigkeit zugesprochen wird, will es auf die Grundlinien eines Neubaus hinweisen, der den Klagen und Wünschen der Gegenwart gerecht wird.

Mit diesem Bilde läßt sich darauf der allgemeine Eindruck wiedergeben, den wir Pädagogen selbst vom Rechenunterricht haben, zum andern läßt es sich sowohl im Sinne einer Arbeitshypothese wie auch in dem der Begründung unserer Fragestellungen wohl verwenden. Es sei darum noch mit einigen Worten näher angeführt: Das in der

reichster Befassung der Probleme liegt, der Mangel an Beziehungen zur Praxis nicht vorliegen, von dem weiter unten die Rede ist. Und das sogar obwohl Kierkegaard — er schenkt besondere Beachtung auf diese Dinge ausgerechnet — nicht mehr weiß, die Beziehungen zur Praxis herbeizuführen zu können und sie vollständig zu werden.

Erklärung grammatischer Klößen und die Notwendigkeiten des Tages haben in jahrhundertelangen langwierigen Aufzügen das Gehörte des Buchunterrichts aufgerichtet. Nicht ein geistreicher Witz ist es, wie etwa ein geistvoller Dorn oder ein Rosenkranzgesang, es ist eben etwas Mathematisches, einer Kaserne oder einer alten Fabrik zu vergleichen, mit vielen Gängen, Treppen, Höfen, Höfen, Abtheilungen u. dergl. Das müssen wir drin wohnen und arbeiten, aber wir fühlen uns unbefähigt. Es ist zu eng, zu niedrig, zu dunkel, zu dünn, die Balken kriegen sich, weiße Gänge müssen nebenbei liegen, und dabei fehlt noch das wichtigste: die Möglichkeit der Ausbreitung. Was Wunder, wenn wir uns mit dem Gedanken des Abklausen tragen, der Platz machen soll für einen Neuben, der den Anforderungen der neuen Zeit im höchsten Maße zu entsprechen hätte, weit und hoch und leicht, vor allem aber zweckmäßig und freundlich, ohne allen akademischen Stuch, dafür echt, wahr und fest.

Ehe aber noch weitwärtender Entschluß gefaßt werden kann, müssen wir erst zu der Überzeugung gelangen, daß ein solcher Neubau nicht nur möglich und wirtschaftswert, sondern notwendig ist. Diese drei kann unsere Beschäftigung die nötige Triskunst verleihen.

Um sie zu gewinnen, ist es nötig, den alten Bau nochmals aufs genaueste zu prüfen.

Was im einzelnen verlangt wird, und wie man die Einzelteile zu erreichen sucht, das ist durchaus nicht so gering an Bedeutung, daß es in einer Reformschritt überschlagen werden dürfte. Auch nicht vom Leser. Denn es sind Voraussetzungen, die in der Einzelheiten nicht jedem Pädagogen bekannt sein können, die aber zum Verständnis der folgenden Darlegungen unentbehrlich sind.

Es mögen zunächst eine Anzahl Lehrpläne folgen.

§ 3. Lehrpläne der Gegenwart.

1. Die „Allgemeinen Bestimmungen“ vom 21. Oktober 1872²⁾.

Der Rechenunterricht.

Auf der Unterstufe werden die Operationen mit besetzten und unbesetzten Zahlen im Zahlenraum 1–100, auf der mittleren diejenigen im unbegrenzten Zahlenraum mit besetzten und unbesetzten Zahlen gelehrt und geübt; auf der höheren nach angewandte Aufgaben von der Durchschnittsrechnung, Divisionen und Reduktionen und einfache Kopfreisel gerechnet; Formen der Oberstufe sind die Bruchrechnung, welche bereits auf den unteren Stufen in der geläufigsten Weise vorbereitet werden muß, und deren Anwendung in den körperlichen Rechenarten, sowie eingehende Behandlung der Dezimalbrüche.

In der mehrklassigen Schule erweitert sich das Programm in den körperlichen Rechnungen durch Aufnahme der schwierigen Arten und das in der Reibung mit Verwinden durch die Lehre von den Wertaufstellungen.

Auf der Unterstufe wird in der Schule mit einem oder zwei Lehrern, soweit es sein kann, in der mehrklassigen Schule regelmäßig nur im Kopfe gerechnet. Bei Einführung einer neuen Rechenart geht auf allen Stufen das Kopfrechnen dem Tabulieren voraus. Bei der praktischen Anleitung ist überall die Beziehung auf das bürgerliche Leben ins Auge zu fassen; daraus sind die Beispiele mit großen und vielselligen Zahlen zu vermeiden und die angewandten Aufgaben so zu stellen, wie sie den wirklichen Verhältnissen entsprechen.

Durch diese Aufgaben sind die Schüler zugleich mit dem geltenden Systeme der Maße, Massen und Gewichte bekannt zu machen.

Das Rechnen ist auf allen Stufen als Übung im klaren Denken und richtigen Sprechen zu betreiben; doch ist als der letzte Zweck stets die Befähigung des Schülers zu selbständiger, sicherer und schneller Lösung der ihnen gestellten Aufgabe anzusehen.

Ders Unterricht sind in allen Schulen Aufgaben-(Schüler-)hefte, in denen der Lehrer das Facitbüchlein in Händen hat, zugrunde zu legen.

²⁾ Vgl. Lohmann, Die Organisation des mathematischen Unterrichts im preussischen Volk- und Mittelschulen. DORNBACHS Band V, Heft 4, Leipzig 1914, Braunsch.

**2. Lehrplan für die elementaren Volksschulen des Königreichs
Sachsen vom 2. Nov. 1878 (11. Auflage 1911).**

§ 4. Rechnen.

1. Der Rechenerunterricht soll die Schüler befähigen, im Verlaufe des gewöhnlichen Lebens vorkommende Berechnungen selbständig und sicher auszuführen.

2. Die Schüler sind daher in ausdehnlich-entwickelnder Weise zum Verstande der elementarsten Rechenoperationen anzuleiten, hauptsächlich aber in der mündlichen und schriftlichen Lösung praktisch gewählter Aufgaben mit willigen Zahlen zu üben.

3. Innerhalb der ersten vier Schuljahre werden die Grundrechnungsarten in den Gebieten 1—10, 1—100, 1—1000 teils mit gleichen, teils mit ungleichbenannten Zahlen eingeübt und gelehrt; doch soll die Erweiterung des Zahlenraumes über 1000 hinaus nicht ausgeschlossen sein. Dabei ist die Kenntnis der deutschen Münzen, Maße und Gewichte zu begründen, die Dreiecksrechnung durch gelegentliche Anwendung der gebrauchlichsten gemeinen und Dezimalbrüche, die Regelstetigkeit durch Gewöhnung an den Schluß über die Einheit vorzubereiten.

4. Demgemäß wird innerhalb der letzten vier Schuljahre vorwiegend die Richtung der Grundrechnungsarten fortgesetzt und zu Ende geführt; ebenso gelangt die Rechnung mit Brüchen, vornehmlich mit Dezimalbrüchen, endlich die Regelstetigkeit unter Anwendung auf die wichtigsten bürgerlichen Rechnungsarten zur Behandlung. Die Regelstetigkeitsaufgaben werden lediglich nach dem Schluß über die Einheit, nicht nach Proportionen gelehrt.

5. Mündliches und schriftliches Rechnen sind in Verbindung zu betreiben.

6. Bei schriftlichen Berechnungen ist auf Sorgfalt der Aufzeichnung streng zu halten.

7. Die Zahl der Abteilungen ist in allen Klassen möglichst zu beschränken.

8. Als Lehrmittel sind außer der Rechenmaschine Aufgabenscheite für die Hand der Schüler erforderlich.

3. Lehrplan für die Volksschulen Württembergs vom 8. März 1907.

§ 18. Rechnen.

Ziel. Die Schüler sollen befähigt werden, die grundlegenden Zahlenoperationen mit williger Sicherheit vorzunehmen und die im gewöhnlichen Leben vorkommenden Berechnungen mit klarem Einblicke in die sachlichen Verhältnisse richtig und selbständig auszuführen.

1. Schuljahr: Zahlenraum 1—100. Zusammenzählen und Abziehen mit den Zahlen 1—5 mit und ohne Zeilegen. Einfache schriftliche Übungen. Benennungen: A, M.

2. Schuljahr: Mündlich (Zahlenraum 1—100): Zusammenzählen und Abziehen mit den Zahlen 1—5. Zusammenzählen und Abziehen zweistelliger Zahlen. Das Einmaleins und Einsteins bis zum 6er. Schriftlich: Zusammenzählen und Abziehen zweistelliger, später auch dreistelliger Zahlen. Benennungen: A, S; m, cm.

3. Schuljahr: Mündlich (Zahlenraum 1—1000): Zusätzen zweistelliger Zahlen zu 2- und Dreistelligen, Abziehen zweistelliger Zahlen von 2- und Dreistelligen. Das kleine Einmaleins und Einsteins ganz; Multiplizieren zweistelliger Zahlen mit einstelligen. Dividieren 2- und Dreistelliger Zahlen durch einstellige, wobei der Dividend das 100fache des Divisors nicht überschreiten soll. Schriftlich: Die 4 Grundrechnungsarten mit einfach benannten und reinen Zahlen. Numerieren, Zusammenzählen und Abziehen bis zu dreistelligen Zahlen. Multiplizieren bis zu dreistelligen Zahlen mit 1- und Zweistelligen, Dividieren 2- bis Dreistelliger Zahlen durch 2—9 und durch die reinen Zehnerzahlen. Benennungen: A, S; m, cm; hl, l; kg, g; km, m. Beim mündlichen Multiplizieren und Dividieren ist das Verwandeln der Münzen, Maße und Gewichte in die nächst höhere oder nächst niedrigere Sorte anzuwenden.

4. Schuljahr: Mündlich: Vom Einmaleins des 10er, 100er und 1000er. Die 4 Grundrechnungsarten mit doppelt benannten Zahlen in leichteren Fällen. Bruchlehrs in einfachen Beispielen. Schriftlich: Numerieren bis zu dreistelligen Zahlen. Fortsetzung der Übungen in den Grundrechnungsarten mit ganzen (reinen und einfach benannten) Zahlen; Multiplikator bis zu 4 Stellen, Divisor bis zu 3 Stellen. Weitere Benennungen: m, mm; da, kg; l, kg. (Die Flächen- und Körpermaße kommen bei der Bearbeitung zur Behandlung.) Dezimalbrüche (bis zu 3 Stellen) mit Anwendung auf unser Münz-, metrisches Maß- und Gewichtssystem: 1. Mündliche Einführung in das Wesen des Bruchs an der Hand der einfachen gemessenen Brüche. Grundlegende Übungen mit diesen Brüchen. 2. Einführung in die Zehner- und Hundertstel mit Anwendung auf die hundertteiligen Münzen, Maße und Gewichte (ganz auf die Anschauung gegründet); dezimale Schreibweise doppelt benannter Zahlen. Zusammenzählen und Abziehen, vor allem in angewandten Aufgaben, wobei diese auch mit ungleich benannten Zahlen zu lösen sind. 3. Einführung in die Tausendstel unter Anwendung auf 1000teilige Maße und Gewichte. Zusammenzählen und Abziehen wie bei den Hundertsteln. 4. Multiplizieren und Dividieren durch 10, 100 und 1000 mit weiteren Übungen im Verwandeln höherer dezimaler Maße in niedrigere und umgekehrt. 5. Multiplizieren mit ganzen Zahlen unter Anwendung

auf Zweistufenaufgaben. 4. Dividieren durch ganze Zahlen unter Anwendung auf Zweistufenaufgaben.

5. Schuljahr: Mündlich: Aus den vier Grundrechnungsarten: Multiplizieren ganzzahliger Zahlen mit einfachen Hockerten und Tausendernzahlen und umgekehrt; weitere Übungen mit doppelt bekannten Zahlen. Übungen in gemessenen Brüchen. Schriftlich: Gemessene Brüche mit Berücksichtigung auf das Unvollständigkeit: 1. Lösen und Schreiben. 2. Verändern von Zahlen (auch der nicht-dezimalen Maße Deutend, Gros, sowie der Zeitmaße) in Brüche der nächst höheren Stufe und umgekehrt (siehe Verhältnisse). 3. Verändern ganzer und gemessener Zahlen in Brüche und umgekehrt. 4. Zusammenfügen und Abziehen gleichnamiger Brüche. 5. Multiplizieren und Dividieren von Brüchen und gemessenen Zahlen mit ganzen Zahlen. Anwendung in Zweistufenaufgaben. 6. Erweitern und Vereinfachen der Brüche. 7. Gleichnamigmachen ungleichnamiger Brüche, wobei der Hauptnenner nur dann 100 übersteigen soll, wenn er eine leicht teilbare Zahl (z. B. 120, 140) ist. 8. Zusammenfügen und Abziehen ungleichnamiger Brüche. 9. Multiplizieren und Dividieren, wobei Multiplikator und Divisor Brüche und gemessene Zahlen sind. Anwendung in Zweistufenaufgaben. Dezimalbrüche: Übungen in den vier Grundrechnungsarten (wie in 4. Schuljahr), auch Multiplizieren und Dividieren von Dezimalbrüchen mit Dezimalbrüchen. Angewandte Aufgaben. Verwandlung gemessener Brüche in Dezimalbrüche und umgekehrt. Dezimalbrüche in gemessene Brüche; Lösen angewandter Aufgaben sowohl mit gemessenen als mit Dezimalbrüchen. Ansatzbrüche. Dieser Rest der Dezimalbruchrechnung nach der Behandlung der gemessenen Brüche oder gleichzeitig mit den entsprechenden Abschnitten aus den gemessenen Brüchen erledigt werden. Werden die gemessenen Brüche vor den Dezimalbrüchen behandelt (siehe Behandlung), so gibt man im 4. Schuljahr etwa 1/2 vom Erweitern und Vereinfachen der gemessenen Brüche, der Rest ist dem 5. Schuljahr zuzurechnen, in welchem dann auch die Dezimalbrüche unter Anwendung auf die mehrfach bekannten Zahlen behandelt werden.

6. Schuljahr: Nach kurzer Wiederholung der Zweistufenaufgaben Vorarbeit in geraden und umgekehrten Verhältnissen unter Anwendung auf Preis-, Tausch-, Durchschnitts- und einfache Mischungsrechnungen (Frage nach dem Quantum der zu mischenden Sorten ist auszuscheiden). Mischungsrechnungen, einfache Gewinn- und Verlustrechnungen. Die Preisrechnung, Anwendung auf Rabatt- und Tauschrechnungen, Kosten- und Überschlagsrechnungen, Gewinn- und Verlustrechnungen, einfache Zinsrechnungen mit Frage nach dem Zins. (Längen- und Flächenberechnungen siehe Barzahlen.) Bei allen Preisrechnungen sind hier wie im 7. Schuljahr diejenigen

Aufgaben anzuschließen, bei denen aus der aus dem Prozentwert vermehrten oder verminderten Grundzahl und der Prozentzahl die Grundzahl zu suchen ist, z. B. Aufgaben, in denen aus Verkauf und Gewinn ($n\%$) der Einkauf, aus Veranschlag und Rabatt ($n\%$) der Rechnungsbetrag gefunden werden soll.

7. Schuljahr: Schwierigere Zusammenfassungen mit Frage nach Zins, Zinsrechnungen mit Frage nach Zinssfuß und Kapital, einfache Zinsrechnungen, Berechnung des Barwerts von Wertpapieren (Obliigationen und Wechsel), einfache Promillerechnungen, Teilungs- und Geschäftrechnungen (nur praktische Fälle), zusammengeordnete Arbeits- und Verbraucherechnungen. (Flächen- und Körperberechnungen siehe Raumlehre.)

8. Klasse: Schwierigere Aufgaben aus allen Kapiteln der Bruchlehre und der bürgerlichen Rechnungsarten, insbesondere aus den oben angeschlossenem Kapiteln der Procent-, Mischungs- und Teilungsrechnungen; auch Verhältnissrechnungen.

Behandlung.

In Bezug auf die wichtigsten Fragen der Methode des Rechenunterrichts (z. B. die Stellung der gewissem Erfolge im Lehrgang, das Späterrechnen an Stelle des Rechnens mittels Ansatzen) ist eine Vereinbarung durch den Lehrerkonvent herbeizuführen.

Innerehalb des einzelnen Schuljahres ist die Reihenfolge der Stoffe in das freie Ermessen des Lehrers gestellt.

Die Schüler sind in anschaulich entwickelnder Weise in das Verständnis der einzelnen Rechnungsarten einzuführen und insbesondere zu klarem Erfassen der den Aufgaben zugrunde liegenden Sachverhältnisse anzuleiten.

Bei diesen angewandten Aufgaben ist auf die Fächer des Fachunterrichts in angemessener Weise Rücksicht zu nehmen; vor allem aber ist die Beziehung auf das bürgerliche Leben und seine Bedürfnisse (Arbeit, Handel und Verkehr, Nahrung, Kleidung, Wohnung) ins Auge zu fassen.

Die Sach- und Zahlenverhältnisse sind so zu wählen, wie sie das gewöhnliche Leben bietet; deshalb sind Aufgaben mit zu verwickelten Sachverhältnissen oder mit allzugroßen Zahlen zu vermeiden. Auch sollen nicht Aufgaben bevorzugt werden, die darauf ausgelegt sind, daß das Ergebnis ohne Rest abschließt.

Wenn auch auf der Unter- und Mittelsstufe das Hauptaugenmerk auf die Erzielung einer soliden Rechenfertigkeit zu richten ist, so sind doch auch auf diesem Stufen angewandte Aufgaben unter Zugrundeliegung der einfachsten Sachverhältnisse — hauptsächlich beim schriftlichen Rechnen — zu lösen.

Mit dem metrischen Maß- und Gewichtssystem sind die Schüler

auf der Unter- und Mittelsstufe allmählich vertieft zu machen. Da das schriftliche Rechnen mit doppelt benannten Zahlen nach vorstehendem Lehrgang erst in Verbindung mit dem Dezimalbruchrechnen auftritt, so ist hierbei das metrische System besonders in dem Mittelpunkt zu stellen und auch in angewandten Aufgaben, vor allem in Zweistarsrechnungen, häufig zu üben.

Bei allen Rechnungsarten soll eine bestimmte Lösungsweise als das Normalverfahren den Schülern sicher zu eigen gemacht werden; dann können sie auch zu mehrfacher Lösung der Aufgaben, namentlich zur Anwendung zahlentheoretischer Rechenverfahren, besonders im Kopfrechnen, angeregt werden.

Im Kopfrechnen ist bei der Ausführung der vier Grundrechnungsarten immer vom Zerlegen der Zahlen auszuheilen und die dem Wesen des Kopfrechnens widersprechende Art des Zifferrechnens möglichst auszuschließen. Allzu große Anforderungen an das Zahlen- gedächtnis sind zu vermeiden, dagegen ist dem mündlich-schriftlichen Rechnen genügend Raum zu geben. Auf sorgfältiges Sprechen sei auch in diesem Fache zu achten.

Beim schriftlichen Rechnen ist streng auf übersichtliche Darstellung, Deutlichkeit der Ziffern und der Rechenreihen, Sauberkeit und Genauigkeit in der ganzen Leistung zu halten. Das Rechnen mit der Feder ist wenigstens vom 4. Schuljahr an gegenüber dem Tafelrechnen zu bevorzugen. Das Führen von besonderen Rechenreihen ist überflüssig.

Vor Abschluß der Rechnung ist, wie es angeht, durch Abrechnen und Überschlagen die Richtigkeit des Ergebnisses im allgemeinen nachzuprüfen, wodurch namentlich Fehler im Setzen des Kommas sofort aufgedeckt werden.

Regelmäßige Wiederholungen sind sowohl beim mündlichen als beim schriftlichen Rechnen notwendig; dabei sind die grundlegenden Übungen im Rechnen mit Ganzen und Brüchen vor allem zu berücksichtigen. Auch sollen durch zweckmäßige Mischung der Aufgaben die Schüler immer wieder zu selbständiger Entscheidung über die zu wählende Rechenoperation veranlaßt werden.

Beim Rechenunterricht sollen wenigstens in den Mittel- und Oberklassen Aufgabensammlungen benutzt werden. Doch soll der Lehrer in selbständiger Beherrschung des Stoffes eine geeignete Auswahl treffen, immer wieder auch Aufgaben diktieren und dadurch besonders Schwächeren (seltliche Verhältnisse, Mädchenklassen in Unterschied von Knabenklassen) gewicht werden.

4. Lehrplan für die Primarschulen des Kantons Graubünden vom 16. Okt. 1903.

VIII. Rechnen.

1. Schuljahr: Geküßtes Rechnen im Zahlenraum von 1—10 in allen Sparten.

2. Schuljahr: Entwicklung der Zahlenreihe von 1—100 in seinen Teilen und Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren mit diesen. Entwicklung der Zahlenreihe von 10—100 mit allen zwischengeschlagenen Zahlen. Addition und Subtraktion in diesem Zahlenraum mit 1- und Stelligen Zahlen.

3. Schuljahr: Multiplikation und Division zweistelliger Zahlen durch einstellige im Zahlenraum bis 100. Entwicklung der Zahlenreihe bis 1000. Die 4 Operationen bis zu dieser Grenze.

4. Schuljahr: Rechnen im unbegrenzten Zahlenraum (Vermeidung großer Zahlen). Die einfachsten Übungen mit gemeinen Brüchen, wenn die Aufgaben mit ganzen Zahlen zu solchen führen.

5. Schuljahr: Entwicklung der Zahlenreihe von den Einern aus nach rechts: Dezimalzahlen. Das metrische Maß und Gewicht. Addition und Subtraktion von Dezimalzahlen. Multiplikation und Division von Dezimalzahlen durch ganze. Gemeine Brüche wie im 4. Schuljahr. Der erste Fall der Zinsrechnung: Der Zins wird gesucht. Andere Drei- und Vierstreichrechnungen. Eventuell: Gemeine Brüche im 5. und Dezimalbrüche im 6. Schuljahr.

6. Schuljahr: Die gemeinen Brüche (Vermeidung großer Brüche). Weitere Übungen im Berechnen des Zinses. Die übrigen Fragen der Zinsrechnung.

7. Schuljahr: Die Dezimalen als Brüche. Wiederholung und weitere Übung der schon gelernten Operationen. Multiplikation und Division von Dezimalbrüchen durch Dezimalbrüche. Gewinn- und Verlustrechnung. Rabattrechnung.

8. Schuljahr: Wiederholung, Übung, eventuell Ergänzung der durchgenommenen Rechenarten. Einführung in die einfache Buchhaltung.

5. Lehrplan für die Städtischen Volksschulen mit deutscher Unterrichtssprache in Böhmen vom 9. Mai bzw. 9. Juni 1913.

IV. Rechnen, in Verbindung mit der geometrischen Formenlehre¹⁾.

Lehrziel: Sicherheit und Fertigkeit in der mündlichen und schriftlichen Lösung praktischer Rechenaufgaben aus dem häuslichen, bürgerlichen und wirtschaftlichen Leben. Einige Sicherheit

¹⁾ Auf die Wiedergabe der Lehrpläne für Böhmen (4.—8. Schuljahr) wurde hier verzichtet.

Im Abschätzen, Messen und Berechnen der im wirklichen Leben häufiger vorkommenden Strecken, Flächen und Körper.

Stoffgebiete und Übungen: Die vier Grundrechenarten mit ganzen Zahlen und Einmalehahlen sowie mit den gebrochenen ganzen Brüchen. Rechnen mit reinen Zahlen, mit benannten und nachkommigen Zahlen. Mündliches Rechnen (Kopfrechnen) ist auf allen Stufen, besonders aber auf der Unter- und Mittelsstufe zu üben. Das schriftliche Rechnen, auf der Unterstufe nur Gedächtnisstütze, tritt erst allmählich, so wie sich der Zahlenraum erweitert, in den Vordergrund. Das eigentliche Schlußrechnen (Dezimal-) tritt erst ein, wenn die Schüler im Rechnen mit reinen Zahlen einige Sicherheit gewonnen haben, also nicht vor dem 5. Schuljahre. Gefällige Einführung in unsere Verhältnisse, Maße und Gewichte. — Die Übungsstoffe werden dem Erfahrungsreichtum der Schüler entsprechen, also dem Schulalter, dem künftlichen und dem wirtschaftlichen Leben der Heimat. Einprägung der für dieses Leben wichtigen Zahlen. Auf der Oberstufe können im Bedarfsfalle die Grundzüge der einfachen Buchführung an praktischen Beispiele geübt werden. Die einschlägigen Druckarten: des Geschäftsverkehrs (Post, Eisenbahn, Steuerwesen) werden gelegentlich im Anschlusse an passende Rechenaufgaben in Verwendung gezogen. Die wichtigsten Grundbegriffe der geometrischen Formalehre werden anschaulich, und wenn möglich, selbstthätig von den Schülern entwickelt. In gleicher Weise ist das Schätzen, Messen und Teilen von Strecken und Flächen zu üben.

1. Schuljahr: Zahlenraum von 1 bis 10. Zo- und Wapzählen, Vervielfachen und Messen. — Vorwiegend mündliches Rechnen. Schriftliche Darstellung der Zahlenzeichen (Ziffern) und der gewonnenen Rechenetze. — Anwendung der gewonnenen Zahlenreihen und der Rechenarten auf einfache, dem kindlichen Gedächtnisse angemessene Sachverhältnisse.

2. Schuljahr: Zahlenraum von 1 bis 100. Zo- und Wapzählen; leichtere Aufgaben des Vervielfachens, Messens und Teilens (ohne Post). Einführung in das Krameln. Vorwiegend mündliches Rechnen. Die schriftlichen Darstellungen haben sich der Form nach dem mündlichen anzuschließen. Vaterländische Münzen, Maße und Gewichte, soweit deren Gliederung auf der Handzettelung beruht. — Anwendung der gewonnenen Zahlen und der Rechenarten auf einfache Sachgebiete des Familien- und des Schullebens.

3. Schuljahr: Zahlenraum von 1 bis 100. Das Einmalehale: sichere Beherrschung desselben ist zu erreichen. Die vier Grundrechenarten mit besonderer Berücksichtigung des Vervielfachens, Messens und Teilens. Erweiterung des Zahlenraumes bis 1000. Zo- und Wapzählen. Die schriftlichen Darstellungen haben sich der Form

nach den natürlichen sinnlichen Mäßen, Maße und Gewichte, soweit sie nicht aus dem Reichen der Zahlenreihe treten. — Anwendung der Rechenarten auf entsprechende Sachgebiete der Heimat.

4. Schuljahr: Zahlenraum von 1 bis 1000. Verwickelten, Meßen und Teilen im Kopfe. Einführung in das schriftliche Rechnen. Die vier Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen. Vorbereitung des Rechnens mit Dezimalen durch die doppelte Schreibung von Angaben in metrischem Längensystem und Gewichte sowie von Wertangaben in Kreiswährung. Rechnen mit den Brüchen $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ und $\frac{1}{32}$ als Kopfrechnen, hauptsächlich im Anschlusse an Zahl- und Teilmaße. Übertragung der vier Grundrechnungsarten auf angemessene Sachgebiete der eigenen und weiteren Heimat.

5. Schuljahr: Die vier Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen und Dezimalzahlen im maßvoll erweiterten Zahlenraum, wie er den Bedürfnissen des praktischen Lebens entspricht. Rechnen mit mehrnamigen Zahlen, hauptsächlich mit jenen, die sich auf Dezimalen zurückführen lassen. Einfache Schlussrechnungen. Rechnen mit den einfachsten Brüchen ohne Anwendung von besonderen Regeln für das Bruchrechnen. Steigerung der Fertigkeit im Kopfrechnen. — Sachgebiete: Stoffe, insbesondere des Lebens- und Erwerbsverhältnisses des Heimlandes und des sachkundlichen Fachern (Natur- und Vaterlandskunde).

6. Schuljahr: Fortgesetzte Übung im Rechnen mit ganzen Zahlen und Dezimalzahlen unter allseitiger Erweiterung des Zahlgebietes. Rechnen mit mehrnamigen Zahlen, hauptsächlich mit jenen, deren Verwandlungsmaß nicht 10, 100, 1000 usw. ist. Rechnen mit den gebräuchlichsten gemeinen Brüchen als Rechnen mit bekannten Zahlen. Die gebräuchlichsten und zweckmäßigsten Rechenstoffe bei den vier Grundrechnungsarten. Schlussrechnungen. Einkaufs- und Verkaufsrechnungen. Einfache Prozent- und Zinsrechnungen. Steigerung der Fertigkeit im Kopfrechnen. — Sachgebiete: Haus- und Landwirtschaft. Warenverkauf und Warenverkauf. Frachtkverkehr, Sparkasse. Passende Stoffe der sachunterrichtlichen Gegenstände (Naturkunde, Erdkunde und Geschichte).

7. und 8. Schuljahr: Verhältnisse und Proportionen. Angewandtes Rechnen: Anwendung der Schlussrechnung zur Lösung von häufig vorkommenden Aufgaben aus dem bürgerlichen und hauswirtschaftlichen Leben und dem Haushalte. Die wichtigsten natürlichen Mäßen, Maße und Gewichte im Vergleich mit den völkerrätlichen. Praktische Beispiele über Geldverkehr und Wohlfahrtsversicherungen. Die Grundzüge der einfachen Buchführung an praktischen Beispielen. An Mädchenschulen sind die Schülerrinnen mit den einfachsten Voraussetzungen häuslicher Buchführung bekanntzumachen. Steigerung der Fertigkeit im Kopfrechnen. — Anwendung

des auf der vorhergehenden Stufe zum Abschluß gelangten schriftlichen Rechnens auf erweiterte Gebiete der Sachliche (Masse, Länge, Fläche und Volumen) sowie des Gemischten, Verketten- und Statistischen.

6. Lehrplan der siebenstündigen Volksschule in Hildesheim¹⁾.

1. Schuljahr: Addition und Subtraktion im Zahlenraum von 1 bis 99 als Hauptformen. Außerdem: Leichte Aufgaben aus der Multiplikation und Division.

2. Schuljahr: Die vier Grundrechenarten im Zahlenraum von 1 bis 100. Maß und Pflanze; Meter und Zentimeter; Schick, Dasein und Glück; Zeiteinheit: Jahr, Monat, Woche, Tag, Stunde, Minute. Das kleine Einmaleins. Schriftliche Arbeiten: Wöchentlich einmal eine kleine hässliche Aufgabe.

3. Schuljahr: Die vier Grundrechenarten im Zahlenraum von 1 bis 1000. Einführung in das schriftliche Verfahren. Behauptung und Erweiterung des Einmaleins. Erlernung der gebrauchlichsten Maßangaben: Maß — Pflanze, Behälter — Liter, Meter — Zentimeter, Kilometer — Meter, Kilogramm — Gramm. Die einfachsten Brüche. Schriftliche Arbeiten: Wöchentlich dreimal eine hässliche Arbeit.

4. Schuljahr: Die vier Grundrechenarten im unbegrenzten Zahlenraum. Festlegung des schriftlichen Verfahrens und des Einmaleins. Die gebrauchlichsten Maßangaben und ihre dekadische Teilung. Aufgabenkette. Die einfachsten Brüche. Fractionsrechnungen. Schriftliche Arbeiten: Wöchentlich dreimal hässliche Aufgaben.

5. Schuljahr: Die Grundrechenarten mit mehrstelligigen Zahlen dekadischer und nichtdekadischer Maßung. Die Dezimalbruchrechnung (Hauptformen). Zeitrechnung. Einfache Regeldetri. Masse, Länge, Fläche und Volumen, Gewichte und Papiermaß. Schriftliche Arbeiten: Wöchentlich dreimal hässliche Aufgaben und alle 14 Tage eine Arbeit zur Korrektur.

6. Schuljahr: Die Zeitrechnung. Die gemischten Brüche (Hauptformen). Verwandlung gemischter Brüche in Dezimalbrüche und umgekehrt. Die einfache Regeldetri und der Bruchteil. Ein- und Prozentrechnung. Schriftliche Arbeiten: Wöchentlich dreimal hässliche Aufgaben und alle 14 Tage eine Arbeit zur Korrektur.

7. und 8. Schuljahr: Erneute Wiederholung der Bruchrechnung. Einfache und zusammengesetzte Regeldetri, Ein-, Prozent-, Rabatt und Diskont, Wärm, Verhältnisse, Termin- und

¹⁾ Vgl. Lehmann, Die Organisation des mathematischen Unterrichts an öffentlichen Volks- und Mittelschulen, HBR-Schule Nr. 7, 1903 S. Leipzig 1904, Brauns.

Mischungsrechnung. Münz- und Wertpapierrechnung (baldes Kurs). Feuer-, Kapital- und Lebensversicherung (Sturm). Kranken- und Unfall-, Invaliditäts- und Altersversicherung. Schriftliche Arbeiten: Wöchentlich zweimal hässliche Aufgaben und alle 14 Tage eine Regent Arbeit zur Korrektur.

3. Lehrplan einer Bürgerschule zu Dresden¹⁾.

1. Schuljahr: Addition und Subtraktion 1—20, Multiplikation und Division 1—10, die Ziffern lernen.

2. Schuljahr: Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division 1—100, 1×1 bis 5, Rechenaufgaben.

3. Schuljahr: Das kleine 1×1 vollständig; Addition und Subtraktion 1—1000. Einführung schriftlicher Lösungsformen.

4. Schuljahr: Multiplikation und Division 1—1000; im zweiten Halbjahre Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division 1 bis 100 000; die Kinder sind in den unendlichen Zahlenraum einzuführen.

5. Schuljahr: Münzen, Maße, Gewichte, Dezimalzahlen, bekannte und mehrfach bekannte Zahlen; Deutschemark.

6. Schuljahr: Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division mit Dezimalzahlen und mit Brüchen; das Gleichnamigmachen; leichteste Fälle der Schuldrechnung, Rabatrechnung und Zinsrechnung.

7. Schuljahr: Schuldrechnung, Prozentrechnung, Zinsrechnung, Rabatrechnung.

8. Schuljahr: Prozentrechnung in ihrer Anwendung auf Rabatt, Diskont und Zinsrechnung. Zusammengesetzte Schuldrechnung. Verteilungsrechnung. Kautschrechnung. Verwandlung von deutschen Geldwerten in solche anderer Staaten.

4. Städtische achtklassige Schulen des Fürstentums Schwarzburg-Sondershausen²⁾.

1. Schuljahr: Der Zahlenraum 1—5, Zerklegen, Zu- und Abzählen und Vergleichen jeder GröÙe; Erweiterung des Zahlenraums bis 20; Zu- und Abzählen von 1 bis 2.

2. Schuljahr: Vervielfachen, Enthaltensein und Teilen innerhalb des Zahlenraums bis 10. Zu- und Abzählen innerhalb des Zahlenraums bis 100.

3. Schuljahr: Das kleine 1×1, Enthaltensein und Teilen im Zahlenraum 1—1000; der Zahlenraum 1—1000 mit allen vier Grundrechenarten; Einführung in die Bruchform.

¹⁾ Aus: Stoffer und Künze, Der mathematische Unterricht an den Volksschulen und Fortbildungsschulen in Sachsen, Thüringen und Anhalt. Band V. Heft 4 der MCH-Schriften. Leipzig 1914, Teubner.

²⁾ ebenda.

4. Schuljahr: Der unbegrenzte Zahlenraum mit unbekannten und bekannten Zahlen.

5. Schuljahr: Die vier Grundrechenoperationen mit mehrfach bekannten Zahlen und mit Dezimalbrüchen. Einfache Regeldekt.

6. Schuljahr: Die gemeinen Brüche in den vier Grundrechenoperationen; Verwandlung gemeiner und Dezimalbrüche; Zeltrechnung; Regeldekt mit gemeinen Brüchen; Prozentrechnung (ohne Diskont), Zinsrechnung (die Zinsen werden gesucht).

7. Schuljahr: Prozentrechnung mit Diskont; Zinsrechnung (Zinsfuß und Kapital werden gesucht); Gewinn- und Verlustrechnung; Rabatt- und Gesellschaftsrechnung.

8. Schuljahr: Mischungsrechnung, Versicherungswesen, Wertpapier.

9. Kaufmannmittelschule Gew.-Rech.

1. Schuljahr: Zahlenraum 1—99.

2. Schuljahr: Zahlenraum 1—100; das kleine Einmaleins ist als vor Schlägerfertigkeit zu thun.

3. Schuljahr: Zahlenraum 1—1000; Zahlenraum 1—1 000 000.

4. Schuljahr: Unbegrenzter Zahlenraum; Beschreiben und Rechnen mit nichtdeimalen Währungen, mit deimalen Währungen; vier Species mit mehrfach bekannten Zahlen, einfache Regeldekt mit geraden Verhältnissen.

5. Schuljahr: Dezimalbrüche, gemeine Brüche; einfache Regeldekt mit geraden und umgekehrten Verhältnissen.

6. Schuljahr: Gemeine Brüche, Dezimalbrüche; Durchschnittsberechnungen, Zeltrechnung (Stoff sehr zu beschränken), Prozent- und Zinsrechnung; Arbeitsversicherungen.

7. Schuljahr: Verwandeln gemeiner Brüche in Dezimalbrüche und umgekehrt; einfache und zusammengesetzte Regeldekt (Wareneinkaufspreise, Verhältnissberechnungen); Prozentrechnung im allgemeinen, Anwendung bei Gewinn und Verlust, Tara und Gutgewicht; Zinsrechnung, Rabatt- und Diskontrechnung. Die vier Species mit Buchstabengrößen, die Bruchrechnung mit Buchstabengrößen; Rechnen mit algebraischen Zahlen; Rechnen mit Mannsgrößen; Gleichungen 1. Grades mit einer Unbekannten.

8. Schuljahr: Gesellschafts- und Mischungsrechnung; Wiederholung Teilbarkeit der Zahlen; die deutsche Münzwährung; die wichtigsten arithmetischen Mittel; Wechselrechnung; Wertpapier in engem Sinne und Kursrechnung. Gleichungen 1. Grades mit einer, zwei und drei Unbekannten; Proportionen, Potenzen, Wurden, Gleichungen 2. Grades.

9. Schuljahr: Wiederholung der kaufmännischen Rechenoperationen unter Berücksichtigung des kaufmännischen Rechnens; Prozentrech-

nung, Zinsrechnung, Diskontrechnung, Effektenrechnung, Wechselrechnung, Kontokorrenten. Erweiterung des Rechnens mit Potenzen und Wurzeln; Logarithmen; Gleichungen 2. Grades mit einer und zwei Unbekannten; arithmetische Reihen, geometrische Reihen, Zinseszins und Rentenrechnung.

(Aus Brüller und Kriem.)

10. Grundlehrplan für die Schulen Groß-Berlins vom 3. Dec. 1913.

IV. Rechnen.

Ziel: Schulung der Zahlenfassung. Befähigung, Verhältnisse des täglichen Lebens zahlenmäßig zu verstehen und daraus sich ergebende Aufgaben selbstständig und sicher zu lösen.

1. Schuljahr: Zahlenreihe 1 bis 20; Zählen, Abzählen (mit Überschreiten der 10), Malnehmen.

2. Schuljahr: Zahlenreihe 1 bis 100. (Messen und Teilen mit Festi nur innerhalb des kleinen Einmaleins.)

3. Schuljahr: Zahlenreihe 1 bis 1000. Einmaleins mit 12, 16, 24, 25. (Multiplikator und Divisor sind einstellig oder die Zahlen 12, 16, 24, 25.)

4. Schuljahr: Die vier Grundrechnungsarten in maßvoll zu erweiternder Zahlenreihe.

5. Schuljahr: Die vier Grundrechnungsarten mit mehrfach benannten Zahlen in metrischer und anderer Währung.

6. Schuljahr: Bruchrechnung, Schbruchrechnung.

7. Schuljahr: Prozentbegriff in den bürgerlichen Rechnungsarten. Versicherungsrechnung.

8. Schuljahr: Verhltnisbegriff in den bürgerlichen Rechnungsarten. Haushalt der Familie, der Gemeinde und des Staates. Geldmarkt.

Erläuterungen und methodische Bemerkungen.

1. Auf allen Stufen sind die Kinder so weit zu bringen, daß sie die Rechenaufgaben selbsttndig lösen, ohne daß der Lehrer hilft und einkft, dabei ist ein gedankenvolles Rechnen nach Regeln zu vermeiden.

2. Die Entwicklung eines neuen Verfahrens darf die Zeit für die Übung und Anwendung nicht über Gebühr verkren.

3. Zur Erzielung der Rechenfertigkeit sind am Anfang jeder Stunde regelmäßig Wiederholungsaufgaben vorzunehmen, die auch und nach dem Stoff aller früheren Klassen durchlaufen. Bei diesen „täglichen Übungen“, aber auch sonst im Unterricht sollen die Kinder geübt werden, selber Aufgaben zu stellen und Feststellungen auszusprechen.

4. Die vollständige Durcharbeitung aller Aufgaben der eingekrten Rechenaufgabe wird nicht verlangt.

6. Über einen dreistelligen Multiplikator und Divisor darf in der Regel nicht hinausgegangen werden. Brüche mit großen Zahlen sind zu vermeiden.

8. Im Sachrechnen sollen die Aufgaben auf allen Stufen wirkliche, nicht ausgedachte oder im Leben selten vorkommende Verhältnisse betreffen; die alltäglichen Verhältnisse sind hierbei ganz besonders zu beachten.

7. Die Kinder sollen angeregt werden, das heimische wirtschaftliche Leben selbst zu beobachten, Erkundigungen einzutragen und auf Grund des Erhaltenen Berechnungen anzustellen.

8. Im Anschluß an wirtschaftliche Belehrungen sind auch Rechnungen, Quittungen, Schuldscheine, Postanweisungen usw. zu schreiben und rechnerisch zu verarbeiten.

9. Vom Rechenstoff und Rechenverfahren ist das anzuschließen, was lediglich späterer Fachbildung (kaufmännischer und gewerblicher Art) angehört und darum für das Kind noch lebensfremd ist.

10. Die Bruchrechnung ist auf dem unteren Stufen in geeigneter Weise vorzubereiten.

Diesen Lehrplänen, welche angeordnet werden, um einerseits die große Gütlichkeit der Unterrichts, andererseits das Streben nach dem Praktischen, dem Lebensfähigen, und seine fortschreitende Verwirklichung zu zeigen, sollen sich noch einige Ausführungen über das Lehrverfahren anschließen, wie es gegenwärtig als verbindlich erscheint. Die angegebenen Lehrgesetze sollen das erhellern. Auch hier konnten nur typische Stoffe und bewährte Vertreter in Betracht kommen¹⁾.

§ 4. Lehrverfahren der Gegenwart.

1.

§ 18. Das Lehrverfahren.²⁾

Die Behandlung des Rechenstoffes erfordert drei Hauptlehrfähigkeiten:

- a) Anschauliche Einführung in das Verständnis. „Das Rechnen ist auf allen Stufen als Übung im klaren Denken und richtigen Sprechen zu betreiben.“
- b) Übung bis zur Geläufigkeit. „Der letzte Zweck ist stets die Be-

¹⁾ Womit nicht gesagt sein soll, daß nur die angeführten bewährten Vertreter seien. Es gibt noch eine große Zahl verschiedener Methoden des Rechenunterrichts.

²⁾ Schumann und Voigt, *Lehrbuch der Pädagogik*, III. Teil, *Spezielle Methodik und Schulstoffe*, 11. Aufl., Hannover 1904, S. 399 und 407.

„Bilgung der Schüler zu selbstständiger, sicherer und schneller Lösung.“

- c) *Anwendung auf das praktische Leben.* „Bei der praktischen Anleitung ist überall die Beziehung auf das bürgerliche Leben ins Auge zu fassen.“

Die Wege, auf denen man diese drei Lehrstelligkeiten zur Geltung bringt, weichen im einzelnen voneinander ab; jeder führt zum Ziele, wenn ein geschickter Lehrer ihn geht.

Die zweckdienlichste Lehrform ist diejenige, die die Selbstthätigkeit der Schüler am meisten in Anspruch nimmt. Dazu aber ist die Begabung der Formalstufen in hervorragendem Maße geeignet. Nach diesem vollzieht sich die Unterrichtarbeit in jeder „mathematischen Einheit“ in folgenden drei Stufen.

1. Die Vorbereitung. Durch sie müssen diejenigen Stoffe herbeigeschafft werden, die dem Verstehen des darzubietenden Bases des Bases bereiten. Das geschieht einmal durch Wiederholung früher geübter Rechenstoffe — seien es Rechenoperationen, seien es Rechenregeln und Beweise oder Wort- und Sacherkklärungen — zum andern aber auch in der anschaulichen Erörterung der zu berechnenden und bis dahin unbekannten sachlichen Verhältnisse.

Die Vorbereitung sei kurz und knapp, enthalte nichts Nebenstehendes und vermiede alles, was die Teilnahme ablenkt. Auf die Vorbereitung folgt die Zielangabe, falls dies nicht schon bei Beginn der Behandlung geschehen ist. Zuweilen kann die Angabe des Ziles auch ganz weglassen.

2. Die Darbietung des neuen Stoffes gestaltet sich auf den verschiedenen Stufen verschieden. Auf der Unterstufe geht der Unterricht von bestimmten Dingen aus und veranschaulicht die Rechenoperationen an der Rechenmaschine oder mit Hilfe anderer Veranschaulichungsmittel. Auf der Mittel- und Oberstufe handelt es sich für die Darbietung in jedem Falle um die Lösung einer Aufgabe. Der Lehrer stellt dieselbe selbst und unterstützt darauf die Lösung unter Beteiligung aller Schüler, die somit den Gang der Lösung selbst sehen und sich der Gründe des Verfahrens bewußt werden müssen. Hieran schließt sich die zusammenhängende Lösung durch einen Schüler. Dabei unterbreche man ihn nicht, außer bei großen sprachlichen Vorstößen, mag die Darstellung auch noch weiter zu wünschen übrig lassen, sondern verheißere das Gange erst am Ende. Durch Stellen zusammenfassender Hauptfragen wird eine kurze Lösungsform festgelegt und den Schülern angeschlossen.

3. Auf der Stufe der Vergleichung werden noch mehrere Aufgaben derselben Art gelöst, wobei das Neue mit dem früher Gelernten eine mannigfache Verbindung erfüllt.

4. Wie bei jedem andern Unterricht, so sind im weiteren Verlauf auch hier allgemeine Regeln und Gesetze abstrahieren. Diese werden auf der Stufe der Zusammenfassung aus den betrachteten Einzelteilen scharf herausgehoben und sprachlich geklärt. Auch kann die Zusammenfassung sich erstrecken auf die zusammenhängende Wiedergabe dessen, was im Anschluß an die Sachgebiete, die Zinsrechnung, Rabattrechnung, Arbeiterverrechnung u. dgl. m. gelehrt worden ist.

Da das auch im Rechenunterricht erlangte Wissen und Können erst Wert hat, wenn es nicht totor bleibt, so ist

5. die Anwendung des Wissens mit aller Sorgfalt zu pflegen. Dies erfordert, daß während der Schüler Aufgaben mit bekannten und unbekannten Zahlen, sowie vor allen Dingen Aufgaben, die den Bedürfnissen des praktischen Lebens angepaßt sind, nach erlerter Anwendung von Rechenverfahren bis zur vollen Sicherheit und Beherrschung des Stoffes gelöst werden.

2.

XXVI. Die Durcharbeitung des Stoffes.¹⁾

Der naturgemäße Weg für die Durcharbeitung auch des Rechenstoffes wird durch die formalen Stufen bezeichnet. Unterscheidet man denn erst wie Dörpeld (Anschauen, Denken, Anwenden), vier wie Herbart (Klassifiz., Assoziation, System und Methode) oder fünf wie Ziller und Rein (Analyse oder Vorbereitung, Synthese oder Darbietung, Assoziation oder Verknüpfung, System oder Zusammenfassung, Methode oder Anwendung), dabei erscheinen die einzelnen Betätigungen nur mehr oder weniger gegliedert; wirklich bezeichnen die Stufen immer denselben Vorgang.

Zunächst muß der auf die einzelnen Klassen oder Abteilungen verteilte Rechenstoff in methodische Einheiten zerlegt werden. Diese sind in der Zahlenreihe 1—10 die einzelnen Zahlen, weiterhin Zahlreihen, Operationen usw.

Das Ziel für die methodische Einheit soll dieselbe sein sein und soviel als möglich ausspannen. Es soll das Denken und die Erwartung der Schüler in hohem Maße anregen. Am besten tritt das Ziel als zu lösendes Problem, als sachliche, möglichst konkrete und individuell gefaßte Aufgabe auf. Ein solches Ziel wäre z. B.: Wieviel Tage dauert unsere (vierwöchigen) Sommerferien?

Die Vorbereitung schließt sich an das Ziel an. Sie erstreckt sich auf die sachlichen und rechnerischen Schwierigkeiten, die in der Zielangabe liegen, um das richtige Vorstellungsvermögen der Lösung zu

¹⁾ Fests. Methodik des gesamten Volksschulunterrichts. II. Teil. 1. Aufl. Osnabrück 1912. S. 381—391.

ermöglichen. Was die Schüler bereits wissen, wird ins Bewußtsein gerufen. Vermutungen, auf welche Weise die Aufgabe gelöst werden könnte, werden angestellt. Die Vorbereitung muß kurz und knapp gehalten werden.

Die Darbietungsstufe hat die Aufgabe, die Schüler zum klaren Verständnis des Normalverfahrens zu bringen. Sie müssen den Gang desselben in allen Teilen völlig begreifen lernen. Vorstellbar wäre es, wenn der Lehrer die Lösung vorrechnete und die Schüler dieselbe nachsprechen ließe. Das wäre ein geistloser Abstrich. Vielmehr sollen die Schüler den Gang der Lösung möglichst selbsttätig finden; der Lehrer darf ihnen notwendigfalls nur Fingerzeige dafür geben. Zum klaren Verständnis gehört eine klare und deutliche Anschauung. Dasselbe ist für das Rechnen von 1—100 von größter Wichtigkeit und unentbehrlich. Auch für die Zahlreihe 1 bis 1000 ist bei schwach befähigten Schülern die Veranschaulichung noch sehr wünschenswert. Die Einführung in die Bruchrechnung muß unbedingt durch Veranschaulichung bewirkt werden.

Die Verknüpfung bildet den Abstraktionsgrad aus. Die Aufgabe derselben ist es, aus dem bisher erarbeiteten Stoffe das Allgemeingültige herauszuheben. Die dritte Formalstufe kann es mit zwei Tätigkeiten zu tun haben: mit der Vergleichung oder der Verknüpfung. Wenn ein Begriff oder Gesetz abgefaßt worden soll, dann werden Vergleicheungen angestellt. Das Alte, Bekannte wird mit dem neu Erarbeiteten, das letztere untereinander verglichen. Zu dem Zweck der Darbietungsstufe darf aber weiteres im Wesen Neues nicht hinzutreten. Die 3. Formalstufe darf wohl der Form, aber nicht dem Inhalt nach Neues bringen. Die Vergleichung gestaltet sich je nach dem Stoffe verschieden. Bei der Zahlenreihe kann man die volle Woche mit der Arbeitswoche vergleichen. Vergleiche 4 volle Wochen mit 4 Arbeitswochen! Dabei wird die Zahlen- mit der Sachreihe verglichen. — Die Tausendreihe wird mit der Hundertreihe verglichen: 300—60, 60—4. Zweitens ist die Vergleichung vieler Rechenefälle notwendig; das Unwesentliche wird abgestreift, das Wesentliche herausgestellt. In anderen Fällen kann auch schon aus einem oder wenigen Beispielen die Regel, das Gesetz durch reines Denken gewonnen werden; weitere Einzelfälle werden dann zur Klärung, zum gründlicheren Verständnis des Begrifflichen herangezogen. Die Geistesfähigkeit ist hierbei eine entscheidende (subjektive).

In manchen Fällen handelt es sich nicht um die Gewinnung von Begrifflichen, sondern nur um eine Erweiterung des Systems, wenn z. B. zu den vorhandenen Reihen des Klammerens eine neue Reihe hinzugefügt wird. Dann haben wir es mit einer Verknüpfung im eigentlichen Wortsinne zu tun.

Die Stufe der Zusammenfassung bildet den Abschluß der vorigen Stufe. Das Ergebnis der Abstraktion findet hier seinen sprachlichen Ausdruck als Regel oder Musterbeispiel. Doch darf das Rechnen nicht in ein Regelwerk ausarten; vielmehr muß der Lehrer sich auf die Entwicklung notwendiger und wichtiger Regeln beschränken. Auch sollen dieselben einfach und elementar gefaßt werden, z. B.: Man vervielfacht eine Zahl mit Zehn, indem man eine Null anhängt. Statt der Regel kann auch ein typisches Beispiel in ein Systembeispiel eingetragen werden, z. B.: $87 \cdot 10 = 870 + 0 + 0$.

Die Stufe der Anwendung hat den Zweck, das Wissen in ein Können überzuführen. Dazu gehört Übung und Anwendung auf das praktische Leben, namentlich auf das Sachgebiet. Die Übung hat es vorwiegend mit unbekannten und bekannten Zahlen zu tun. Die Anwendung geschieht nach der Natur der Sache in angewandten Aufgaben. Das Rechenbeispiel bietet solche Aufgaben in Fülle. Bei der Anrechnung beschränkt der Lehrer seine Schüler nicht nur auf das Normalverfahren; vielmehr können sie auch leichtere und künftere Wege einschlagen. In der Lehrer weist selbst auf praktische Rechenverfahren hin und übt deren Gebrauch. Auf der Stufe der Anwendung sind auch algebraische Aufgaben mit Vorteil zu verwerten. Sie bringen die üblichen Aufgaben in eine andere, eine Normalform. Auch das Proberechnen im Kopfe und in schriftlicher Darstellung gehört auf die Stufe der Anwendung.

2.

1. Stufe. § 3. Zählen und Zerschlagen der 1 und 2 in der Zahlenreihe bis 3.¹⁾

Zählen.

1. Der Lehrer schiebt auf einem Drehtische nach und nach 5 Kugeln vor und lehrte die Kinder zählen, ohne daß sie die Benennung „Kugeln“ verwenden. Sie zählen also, dem Vorzeichen folgend: „1^{ste} .. 2^{te} .. 3^{te} .. 4^{te} .. 5^{te}“. Diesen Zählen läßt man jetzt ohne Veranschaulichung einseln und im Chöre und bildet die Übung durch Faktieren mit der rechten Hand oder mit dem Zeigestock. Auch die Kinder müssen Anfangs bei jeder Zahl einen Wiedereckling mit der erhobenen rechten Hand auf dem Rücken der linken Hand ausführen, welche wagerecht gehalten wird.

2. „Nach 1 kommt 2, nach 2 kommt 3,“ bis 5. Erst mit Veranschaulichung am Kugellapparat, dann ohne Veranschaulichung. Fragen außer der Reihe: Was kommt nach 2? nach 1? nach 4? Steckt ein Kind, so greift man zur Veranschaulichung zurück.

¹⁾ Hilfer, Anleitung für den Rechen- und Rechenlehreunterricht. 18. Aufl., bearb. von Marwede und Schreiner. Leipzig 1913. S. 76 und 77.

3. Zählt von 1 bis 4! von 3 bis 5! von 2 bis 4! von 1 bis 3!

4. Prüfung! Zeigt 3 Finger (an einer Hand)! 1 F. + 2 F. = 2 F. + 1 F. + 1 F. Schiebt an der Maschine drei Kugeln vor! 2 K. + 2 K. + 4 K. + 1 K. Wer will an der Wandtafel 3 Strichen (Dächer) malen?

5. Zeigt an der linken Hand 2 Finger, an der rechten 1 F. Zeigt 2 F. und 1 F. + 4 F. und 1 F. + 1 F. und 1 F.

Zusählen.

1. Man zeigt 1 F. und 1 F. und bringt dann die beiden F. dicht zusammen. Die Kinder sprechen, dem Vorgehen folgend: „1 F. und 1 F. sind 2 F.“ An der Rechenmaschine schiebt man 1 Kugel und dann noch 1 K. vor, und die Kinder sprechen: „1 + 1 ist 2.“ (Also ohne Benennung?)

Das Zusählen der 1 zu 3 nimmt denselben Gang. An den Fingern lesen die Kinder den Satz ab: „2 F. + 1 F. = 3 F.“ Dann schiebt man an der Rechenmaschine 2 Kugeln vor, und indem man noch eine dritte hinauflegt, sprechen die Kinder: „2 + 1 ist 3.“ (Also ohne Benennung?)

Ganz in derselben Weise führen wir die Kinder an den Sätzen: $3 + 1 = 4$, $4 + 1 = 5$. Jetzt folgt die Übung ohne Veranschaulichung: $1 + 1$ ist 2, $2 + 1$ ist 3, $3 + 1$ ist 4, $4 + 1 = 5$, in der Reihe, außer der Reihe. Stecht ein Kind, z. B. bei der Aufgabe: Wieviel ist $3 + 1$? so geht man auf die Veranschaulichung zurück; am besten bewirkt sie das Kind selbst, indem es 3 Finger und 1 F. zeigt. Reist genügt es auch schon, wenn man 3 Finger an einer Hand zeigen läßt.

Wir haben jetzt drei Arten des Zählens, die öfter geübt werden: 1. „Eins, zwei, drei, vier, fünf.“ 2. „Nach 1 kommt 2, nach 2 kommt 3“ usw. 3. zählen wir: „1 + 1 ist 2, $2 + 1 = 3$ “ usw.

2. Wie beim Zählen der 1, so üben wir das Zählen der 2 erst anschaulich mit Benennung, dann anschaulich ohne Benennung und zuletzt ohne Veranschaulichung. Als Vorbereitung läßt man die beiden Foten an den Fingern herstellen. Zeigt an der linken Hand 1 Finger, an der rechten 2! An jeder Hand 2 F.! An der linken Hand 3, an der rechten 2 F.! Die Summen werden durch Zählen gefunden: $1 F. + 1 F.$? $1 F. + 2 F.$? Am Kugellapparat schiebt man eine K. vor, und indem man 2 K. hinauflegt, sprechen die Kinder: $1 + 2 = 3$. $2 F. + 1 F.$? $2 F. + 2 F.$? Nachher ohne Benennung: $2 + 2 = 4$. Zuletzt übt man die 7 Aufgaben des Zählens in bariem Wechsel mit und ohne Benennung.

3. Die schriftliche Beschäftigung dient hier nicht dem Zusammenzählen. Das wird nur mündlich geübt. Bei der Klapperg der zur Einprägung kommenden Sätze stellt der Lehrer die Aufgaben an der Maschine oder mittels seiner Finger dar, meist ohne ein

Wort zu sprechen. Schriftlich werden nur die Aufgaben so hingestellt: $I + I$, $III + I$, $II + II$ usw. Dasselbe Darstellung mit Häckern. Das stehende Kreuz ist bereits geübt. Man sagt den Kindern: Es wird „auf“ geklebt.

4. Anwendung. Ein Kind hat 2 Arme (Ohren, Augen); wieviel Arme haben 3 Kinder? Du hast 2 Griffe und bekommst noch einen geschenkt. Ein Kind hat vom Vater 3 Äpfel, von der Mutter 1 Apfel geschenkt erhalten; wieviel Äpfel hat es jetzt? Zeige 2 Finger! Der Nachbar zeigt 1 F. (2 F.)! Wieviel Finger zeigt ihr beide? An einem Wagen ziehen 4 Pferde, 1 kleines Pferd läuft nebenher. Vormittags 1 Stunde Schule, nachmittags 1 Stunde. Hühner, Tauben, Springe auf dem Hofe. 3 lange Seiten der Tafel, 2 kurze. — Es macht den Kindern Freude, wenn sie selbst Aufgaben stellen. Wieviel Fenster hat unsere Scholtube?

Schlußbemerkungen. Wir üben nur das Zuzählen mit 1 und 2, nicht mit 3 und 4, weil wir die Kinder erst in leichteren Übungen sicher machen wollen. Eine Erschöpfung des Stoffes ist durch nichts geboten. Wir wollen beide Rechner haben, wollen die Freude an der Arbeit nicht dadurch trüben, daß sie den Kindern zu schwer wird. Was wir jetzt übergeben, werden die Kinder nach kurzer Zeit mit Leichtigkeit lernen.

4.

2. Stufe, § 4. Zuzählen mit Überschreiten der 10.¹⁾

1. Vorbereitung.

a) Wiederholung: Ergänzung jeder Grundzahl zu 10 und Zerlegung jeder Grundzahl in zwei beliebige Posten.

b) Vorübungen in dreigliedrigen Aufgaben: $9 + 1 + 1$, $8 + 2 + 3$, $7 + 3 + 3$, $6 + 4 + 2$, $5 + 5 + 2$ usw.

2. Die Reihenfolge der Aufgaben ist am besten folgende:

a) Zuerst legen wir zu 9 die Zahlen 2, 4, 6, 8. b) Zu 8 legen wir die Zahlen 6, 8, 9. c) Zu 8 werden die Zahlen 4, 5 addiert usw. Man nehme also beim Beginn dieser Übungen nicht zugleich alle möglichen Aufgaben durch. Aber man lasse eine Aufgabe mehrmals rechnen, auch bald wiederholen.

3. Allgemeine Bemerkungen. Die Zahl von 26 Aufgaben verringern sich durch die Umkehrungen bereits geübter auf 20. So tritt 9 und 2 später als 7 und 9, 8 und 3 als 3 und 8 auf. Deshalb muß der Schüler ganz sicher darin werden, daß die Reihenfolge der Summanden für das Ergebnis ohne Bedeutung ist. Wir üben das in den leichtsten Aufgaben, bei denen der eine Posten 10 ist. Was ist mehr: „10 und 2“ oder „2 und 10“? „10 + 2 ist 12; 2 + 10

¹⁾ s. auch S. 22–24.

ist 12." $10 + 2$? $6 + 10$? Die Zahlen, die man zusammenzählen soll, vertauscht man gern, wenn die erste Zahl kleiner ist als die zweite. Statt $2 + 6$ rechnet man lieber $6 + 2$.

Es erleichtert die Eingprägung, wenn man die Aufgaben mit zwei gleichen Punkten an der betrattenden Stelle sofort sicher einträgt, wobei man die Multiplikationsform zu Hilfe nimmt. 2 und 2 oder 2×2 ist 4. 3 und 3 oder 3×3 ist 9. 4 und 4 oder 4×4 ist 16. Die Schüler erkennen leicht, daß 2×6 nur ein anderer Ausdruck für $6 + 6$ ist. An diese Aufgaben, die sich am leichtesten einprägen, schließt man dann die nebenliegenden bei der Eingprägung an. Bei 2 und 3 erinnert man an 2 und 4, bei 7 und 8 (3 und 7) an 7 und 7 usw.

4. Die Entwicklung des Normalverfahrens zeigen wir an der Aufgabe $9 + 3$. An der Maschine wird die Aufgabe auf 2 Dreiecke so hingestellt, wie die folgende Punktlage es zeigt.

Auf dem zweiten Dreieck stehen 9 Kapseln in einer Gruppe; in einiger Entfernung steht die eine Kapsel, die am vollen Zahnstocher fehlt. Über dieser einen K. befinden sich auf dem obersten Dreieck 3 Kapseln. Soll später die Aufgabe $9 + 4$ hingestellt werden, so blüht der zweite Dreieck unverändert; statt der 3 K. oben schiebt man deren 8 an. Die Kinder bilden sich die Aufgabe bald selbst. Man zeigt auf die 9 K., und die Kinder sprechen: „neun"; zeigt man dann auf die 3 K. rechts, so sagen sie: „und drei". Wieviel fehlt bei 9 an 10? Wir nehmen die 1 von 3 ab. Wieviel bleibt? Wieviel müssen wir also noch zu 10 hinsetzen? Man schiebt jetzt die 1 K. an die 9 heran und fragt: Wieviel ist $9 + 1$? Wieviel hast du jetzt zur 9 hinzugelegt? Wieviel sollst du aber noch zählen? Wieviel mußt du noch hinsetzen? (Man zeigt auf die 2 K.) „Zu 10 müssen wir noch 2 hinzulegen." Wieviel ist $10 + 2$? Wieviel ist $9 + 3$?

Nachdem einige Beispiele in dieser entwickelnden Form der Lösung durchgearbeitet worden sind, geht man zur selbständigen Lösung selbst der Schüler. Hierbei ist die kürzeste Form die beste. Die Lösung geht demnach so: $9 + 3$ „ $9 + 1$ ist 10, $10 + 2$ ist 12; $9 + 3$ ist 12." Das Ergebnis muß schließlich ohne die Rücks der Berechnung angegeben werden können; die Aufgaben sind bis zur Behaglichkeit zu üben. (Vergleiche die methodischen Winke beim Zusammenzählen in der Zahlenreihe 1 bis 100.)

5. Reihenbildungen. a) $1 + 2 = 3$, $3 + 2 = 5$, $5 + 2 = 7$, bis 19. b) $2 + 2 = 4$, $4 + 2$, bis 20. c) $1 + 3 = 4$, $4 + 3$, bis 19. d) $3 + 3 = 6$, $6 + 3$, bis 18. e) $1 + 4 = 5$, $5 + 4$, bis 17. f) $4 + 4 = 8$, $8 + 4$, bis 20. g) $5 + 5 = 10$, $10 + 5$, bis 20. Die Reihen, welche das Einmaleins vorbereiten, sind besonders aufs Kern zu nehmen.

6. Anwendung. 1 Dutzend hat 12 Stück. Wieviel Stück sind 1 Dutz. und 1, 2, 3 bis 8 Stück? 1 Mdl. hat 16 Stück. Wieviel Stück sind 1 Mdl. und 1, 2, 3, 4, 5 Stück? Auf jeder Bank sitzen 6 (7, 8) Schüler, wieviel auf 2 Bänken? Ungleiche Zahlen. In einer Abteilung sind 9 Kinder, in der andern 8. Neu eingetreten sind 3 Knaben und 2 Mädchen. Ein Knabe kauft einen Bleistift für 8 \mathcal{A} . und ein Schreibfach für 9 (12) \mathcal{A} . Auf einer Seite der Tafel steht ein Knabe 6 Linien, auf der andern 8 (7). In einer Reihe stehen 4 Knaben; wieviel in 2, 3, 4, 5 Reihen? Wieviel \mathcal{A} sind 2 Föder und 6 \mathcal{A} ? 1 Zehner, 1 Föder und 1 Zweifelnigstück? Auf einer Seite einer Straße stehen 11 Häuser, auf der andern 7 (8, 6 Häuser). 1 Britchen kostet 5 \mathcal{A} und 1 Hering 3 \mathcal{A} . 1 Woche hat 7 Tage; wieviel Tage haben 2 Wochen?

5.

4. Stufe. § 2. Teilen und Erhaltensein in der Zahlenreihe bis 1000.¹⁾

A. Das Kopfrechnen.

1. Übersicht des Stoffes.

1. Das Erhaltensein der Zehner: a) Teilen und b) Erhaltensein. (a) 120:6; b) 6 in 120.)
2. Teilen aller Zahlen innerhalb des Erhaltenseins der Zehner durch die Grundzahlen a) ohne Rest und b) mit Rest. (a) 18:2; b) 179:3.)
3. Teilen durch 12, 15, 24 und 35 wie durch einstellige Teile.
4. Leichte Aufgaben, in denen reine Hunderter- und gemischte Hundertresten durch Grundzahlen dividiert werden. (900:3; 500:5.)
5. Teilen durch 10, 50, 50 usw. (420:10; 760:40.)

B. Methodisches.

Zu 1. Wir geben die Reihe mit dem Teiler 2, 3, 4 bis 5 durch. Grundlage für das Verstehen der Arbeit ist das Vervielfachen der Zehner. Teilen wir durch 3, so wird zuerst die Reihe 3·30, 3·30 bis 3·100 wiederholt. Bei dem Teiler 2 vervielfachen wir zunächst 10, 20, 30 bis 100 mit 2.

Die Vermittlung des Neuen geschieht durch die Zerlegung der Ergebnisse in die Einmaleinszahlen. 3·30 ist 60, 60 ist 3·20 oder 30·2. Daran schließen sich die Aufgaben: a) 60:3=20; dann 3·20=60, b) 3 in 60=20×; dann 20×3=60. Haben wir eine Reihe von Aufgaben so durchgesprochen, dann zeigen wir dem Schüler

¹⁾ ebenfalls S. 126–28.

den Zusammenhang mit den Grundaufgaben. Wir stellen einige Aufgaben nebeneinander.

$6:3=2$	$60:3=20$	3 in 6 = $2 \times$	3 in 60 = $20 \times$
$9:3=3$	$90:3=30$	3 in 9 = $3 \times$	3 in 90 = $30 \times$
$21:3=7$	$210:3=70$	3 in 21 = $7 \times$	3 in 210 = $70 \times$

In der ersten Reihe teilen wir 6, 9 usw., in der zweiten Reihe 10×6 , 10×9 ; folglich muß auch der Teil $10 \times$ so groß sein. Beim Teilen wechseln wir im Ausdruck: 60 geteilt durch 3; $\frac{1}{3}$ von 60; der 3. Teil von 60.

Die Begründung der Lösung im Sinne des Teilens oder Enthaltenseins durch das Einmaleins erscheint in reinen Zahlen nicht immer notwendig, wohl aber bei bestimmten Zahlen und angewandten Aufgaben.

Anwendung. a) Teilen. Auf beiden Seiten einer Straße stehen 60 (120) Bäume, wieviel auf jeder Seite? In drei Monaten verdient A. 180 (210) M. Von 120 Fischen wird der 4. Teil verkauft; die andern tut man in den Fischkauten. Eine Kiste mit Ware wiegt 880 kg; die Kiste allein wiegt den 8. Teil des Gewichtes, wieviel die Ware? 8 Kassen teilen 4 Schock Maas. b) Enthaltensein. Wieviel Reiben bilden 80 (120) Soldaten, wenn in einer Reihe 4 stehen? Wieviel Wochen sind 70 (350) Tage? Ein Krabe holt Fünfpfennigsmarken; wieviel Stück schält er für 1 M? In einer Klasse sitzen 80 Schüler und Buben zu je 4. Wieviel Bänke stehen in der Klasse? Wieviel Blätter hat ein Buch mit 160 Seiten?

Zu 3. Teilen zwei- und dreiteiliger Zahlen innerhalb des Einmaleins der Zehner durch die Grundzahlen. Die Lösung verlangt Sicherheit in der Zerlegung der zu teilenden Zahl auf Grund des Einmaleins der Zehner. Diese Zerlegung ist so wichtig, daß wir sie bei jedem neuen Teiler zuerst für sich üben. Bei dem Teilen durch 4 lassen wir zunächst die Einmaleinszahlen 40, 80 bis 400 angeben. Wir verlegen sodann einige Zwischenzahlen. 90 ist $80 + 10$; 118 ist $80 + 38$; 240 ist $240 + 20$. Erst wenn die Schüler diese Zerlegung ohne Hilfe sicher machen können, geben wir zum Teilen selbst über. Auch hier fangen wir mit der Zerlegung an. $160:4$ „ 160 ist $80 + 80$; $80:4$ ist 20, $80:4$ ist 5, zu 20 ist 25.“ $280:4$ „ 280 ist $240 + 40$; $240:4$ ist 60, $40:4$ ist 10, zu 60 ist 70.“ Nach einiger Übung lassen wir den Zerlegungsatz nicht mehr aussprechen; die Kinder müssen sich die Zerlegung gegenwärtig halten und rechnen: $\frac{1}{4}$ von 280! „ $\frac{1}{4}$ von 240 ist 60, $\frac{1}{4}$ von 40 ist 10, zu 60 ist 70“; später noch können: „ $\frac{1}{4}$ von $280 = 80 + 80 + 20 = 70$.“

Zweckmäßig ist es, die Probe machen zu lassen. Hat der Schüler die Aufgabe $320:4$ gelöst, so wird er veranlaßt, $4 \cdot 80$ zu berechnen.

$4 \cdot 50 = 200$, $4 \cdot 3 = 12$, von 200 ist 200, Dadurch sieht der Schüler, daß er beim Teilen durch 4 die Zahl 200 in 200 und 12 zerlegen muß. Geht die Rechnung nicht auf, so wird der Rest angegeben.

$78:3$	$468:6$	
$78:3=26+18$	$468=480+48$	$500:4$
$40:3=13$	$480:6=80$	$480:4=120$
$18:3=6$	$48:6=8$	$80:4=20, 8, 2$
$78:3=26$	$468:6=78$	$500:4=125, 8, 2$

Anwendung wie unter 1. Die Zahlen werden entsprechend verändert.

Zu 1. Das Einmalehnen mit diesen Zahlen ist erst auf dieser Stufe gelernt worden (§ 4). Hier werden also nur die Einmalehnenzahlen dividiert.

Zu 2. Der Schüler wird ohne Schwierigkeit erkennen, wie $8:4=2$, $80:4=20$ ist, so ist $800:4=200$. Bei $840:3$ muß der Schüler zerlegen: $840=800+40$ usw.

Zu 3. Der Schüler hat gelernt: Wir vervielfachen eine Zahl mit 10, indem wir rechts eine Null anhängen. Daraus erkennt er unmittelbar: Wir teilen eine Zahl durch 10, indem wir bei den reinen Zehnerzahlen (10, 20, 100) die Null (Einereile) abschneiden. Sind Zehner vorhanden (20, 120), so bilden diese den Rest in dem Ergebnis. Zweifelsfrei ist es, einige der zu teilenden Zahlen anzuschreiben und bei der Teilung durch 10 die Einer durch ein Komma abzuschneiden.

Bruchrechnung.

1. $5\frac{1}{2}=7\frac{1}{2}$; $2\frac{1}{2}=4\frac{1}{2}$. Verwandle ebenso in einem Bruch: $3\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{2}$, $7\frac{1}{2}$, $8\frac{1}{2}$, $9\frac{1}{2}$, $10\frac{1}{2}$.

(Eine ganze Zahl mit einem Bruche heißt „gemischte Zahl“.)

2. $\frac{1}{2}=2\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}=3\frac{3}{4}$. Verwandle in gemischte Zahlen: $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{11}{5}$, $\frac{13}{6}$, $\frac{15}{7}$, $\frac{17}{8}$, $\frac{19}{9}$.

3. Wieviel Stck. sind $1\frac{1}{2}$ Stck.? $1\frac{1}{2}$ Schck.? $1\frac{1}{2}$ Stck.? $2\frac{1}{2}$ Schck.?

Wiederholung.

4. 50, 240, 260, 478, 739. Lege so jeder Zahl 401 legs 25 mal

5. Von jeder Zahl in voriger Nr. ziehe 60 ab! ziehe 79 ab!

6. 25, 56, 68, 72, 88. Vervielfache diese Zahlen mit 4! mit 9!

7. Wieviel Wochen und Tage sind 15, 30, 45, 60 Tage?

8. Wieviel Schöck und Mandel sind 10, 20, 30, 40, 48 Mandel?

B. Das Teilrechnen.

wird auf die Teilung zwei- und dreistelliger Zahlen durch die Grundzahlen beschränkt, und wir arbeiten immer im Sinne des Teilens. Der

Doppelpunkt wird „geteilt durch“ gelesen und steht stets hinter der teilenden Zahl; nach dem Doppelpunkt steht der Teiler und rechts von diesem das Gleichheitszeichen.

$$a. 864:2=\overset{\text{H.H.}}{432}$$

$$\begin{array}{r} 8 \text{ H.} \\ 4 \text{ Z.} \\ 8 \text{ „} \\ 4 \text{ E.} \\ 4 \text{ „} \end{array}$$

$$b. 350:2=\overset{\text{H.H.}}{175}$$

$$\begin{array}{r} 8 \text{ H.} \\ 18 \text{ Z.} \\ 14 \text{ „} \\ 18 \text{ E.} \\ 18 \text{ „} \end{array}$$

$$c. 906:2=\overset{\text{H.H.}}{453}$$

$$\begin{array}{r} 8 \text{ H.} \\ 08 \text{ H.} \\ 4 \text{ „} \\ 6 \text{ „} \end{array}$$

$$d. 416:8=?$$

$$e. 758:4=189$$

Entwicklung des Verfahrens. a) Es sollen 8 H., 6 Z., 4 E. durch 2 geteilt werden. Wir beginnen mit den Hunderten. Wie heißt die erste kleine Teilaufgabe? „8 H.:2 sind 4 H.“ Die 4 H. schreiben wir hinter das Gleichheitszeichen. Wir haben $2:4=8\text{H.}$ verteilt. Die 6 setzen wir unter die 8 H., machen einen Strich und stehen ab. Es bleibt nichts übrig. „Wir ziehen die 8 Zehner herunter.“ Zweite kleine Aufgabe! „6 Z.:2 sind 3 Z.“ Wir setzen die 3 Z. rechts neben die 4 H. usw. Welche Zahl haben wir geteilt? Wie heißt der Teiler? Wie heißt der Teil?

Zu b). Lies die Aufgabe! Wieviel H., Z. und E. hat 350? Wie heißt die erste kleine Aufgabe? „3 H.:2=8 H.“ Wir schreiben die 8 H. hinter das Gleichheitszeichen; $2:8 \text{ H.}=6 \text{ H.}$ Wieviel setzen wir die 4 H.? Wir ziehen ab; es bleibt 1 H.; den machen wir zu Zehnern und stehen dann die 5 Z. herunter. Wie heißt jetzt die kleine Aufgabe? „15 Z.:2=7 Z.“ Wieviel schreiben wir die 7? $2:7 \text{ Z.}=14 \text{ Z.}$ Wieviel schreiben wir die 14? Was tun wir jetzt? „Wir ziehen einen wagerechten Strich und stehen ab.“ Wie heißt der Rest? 1 Z.; den machen wir zu Einern und stehen die 8 Einer dann herunter. Wie heißt jetzt die kleine Aufgabe?

Bei Aufgabe c) ist den Kindern klar zu machen, daß keine Zehner herunter; es ist ihnen einzuschärfen, daß die Darlegung in das Ergebnis selbst eine Null setzen müssen, was der kleine Rechner leicht oft vergißt.

Bei Aufgabe d) weisen wir den Kindern, daß keine Hunderte herunterkommen, daß also die erste kleine Aufgabe heißt: 41 Z.:8.

Zu e). Für das spätere Rechnen mit dem Brechstrich ist es unbedingt nötig, daß die Schüler durch einen einstelligen Teiler so teilen können, daß nur der Teil hingeschrieben wird, von der Abtreibung aber nichts. Die Reste, die sich beim Teilen der einzelnen Stellen ergeben, behält man im Kopfe und legt die nächste Stelle hinzu. Bei Beginn der Übung kann man als Gedächtnishilfe die Reste in

kleinen Ziffern über den Dividenten setzen, wie das Beispiel es zeigt; später läßt das auch fort. Man beginne mit der Übung aber erst, nachdem die Schüler in der bisher geübten Form recht sicher sind.

6.

Das Teilen gemischter Zehnerzahlen durch 2; ohne Zehnerauflösung.¹⁾ (Fr. de Gossens.)

1. Vorbereitung: Wir haben bisher reine Zehnerzahlen geteilt; wir wollen heute zunächst solche Aufgaben mit dem Teiler 2 wiederholen! Wie groß ist die Hälfte von 40? — Suche die Hälfte von 80! — Teile 60 durch 2! — Rechne: 100 geteilt durch 2! ... Bilde eine Reihe, in der die Hälfte von 20, 40, 60, 80 und 100 angegeben wird! — ($\frac{1}{2}$ von 20 = 10 usw.) Sage dieselbe Reihe rückwärts in dieser Form: 100 geteilt durch 2 = 50, 80 geteilt durch 2 = 40 usw.! Nenne nur die Zehnerzahlen, die sich leicht durch 2 teilen lassen! (Was?) — Ein Schock hat 60 Stück; wieviel Stück hat $\frac{1}{2}$ Schock? (Ähnliche Aufgaben!)

2. Ziel und Darstellung: Wir haben bisher nur reine Zehner geteilt; heute wollen wir von Zahlen durch 2 teilen lernen, die Zehner und auch Einer enthalten! Dazu gehört folgende Aufgabe: Zwei Kraben wollen sich gleichmäßig in 24 Nüsse teilen; wieviel Nüsse erhält jeder? Wiederhole diese Aufgabe! — Welchen Teil von 24 Nüssen mußt du suchen? — (Die Hälfte.) Die Hälfte von 24 findest du nicht sogleich; aber es liegt unter der 24 eine reine Zehnerzahl, von der du die Hälfte sehr leicht findest. Welche Zehnerzahl ist das? — Nun verlege 24 in 20 und die noch übrigen Einer! — Wir haben also aus den 24 Nüssen zwei Haufen gebildet; wieviel Nüsse enthält der erste Haufen? — Wieviel Nüsse enthält der zweite Haufen? — Jetzt suche die Hälfte vom großen Haufen, von 20 Nüssen! — Nun suche auch die Hälfte vom kleineren Haufen, von 4 Nüssen! — Wieviel betragen beide Ergebnisse zusammen? — Von welcher Anzahl sind diese 12 Nüsse also die Hälfte? — Wir wollen das vorrechnen: „Wieviel ist die Hälfte von 24 Nüssen? 24 Nüsse sind 20 Nüsse und 4 Nüsse; die Hälfte von 20 Nüssen ist 10 Nüsse; die Hälfte von 4 Nüssen ist 2 Nüsse; 10 Nüsse und 2 Nüsse sind 12 Nüsse; also die Hälfte von 24 Nüssen 12 Nüsse.“ — Wiederhole die Aufgabe und rechne sie vor!

3. Technismpfung: Wieviel Nüsse erhält jeder von den zwei Kraben, wenn 26 Nüsse zu verteilen sind? (Die Lösung in ähnlicher Weise wie oben unter 2; ebenso werden 28, 32, 44, 48 usw. Nüsse geteilt.)

^{1) Rehm, Handbuch der Pädagogik. II. Band: Besondere Unterrichtsmethoden. 8. Aufl. Leipzig 1911. S. 696—2.}

4. Zusammenfassung: Wir haben hier bei allen Aufgaben die zu teilenden Hefen in einen größeren und einen kleineren Haufen geteilt. Welche zwei Haufen bildeten wir aus 48 (63, 84 usw.) Hefen? — Kurz, wir zerlegten die zu teilende Zahl. Welche Zahl bildete den größeren (den kleineren) Haufen? — Und so wollen wir es stets halten bei allen diesen Aufgaben des Teilens! Wie zerlegst du also, wenn du rechnen sollst $48:3$? — Welche Zahl teilst du zuerst? — danach? — Was geschieht mit jenen beiden Ergebnissen 16 und 4? — Wiederhole im Zusammenhange, wie du 48 durch 3 teilst! — Wie rechnest (zerlegst und teilst) du bei folgender Aufgabe: Wieviel beträgt die Hälfte von 82? usw.

5. Übung: a) In runden Zahlen. Wieviel ist die Hälfte von 68? — Rechne die Aufgabe vor! — Wir wollen die Hälfte von 80 suchen; wie zerlegst du 80 vor der Teilung durch 2? — Suche nun die Hälfte von 88! — Rechne vor! usw.

b) In barenen Zahlen. Suche die Hälfte von 48, 46! — Wiederhole die Aufgabe und rechne sie vor! usw.

c) Angewandte Aufgaben. Anna kauft für zwei Meter Band 48 h ; wieviel Pfennig kostet ein Meter? Wiederhole diese Aufgabe! — Berechne den Meterpreis! — Wiederhole die Aufgabe und rechne sie vor! usw.

2.

Die Eins.¹⁾

I. Stufe der Anschauung.

A. Zergliederung. Wir wollen lernen, wie viel Eins ist. Zähl diesen Griffel! Wie viele sind's? — Diese Mark! Wie viele sind's? — Diesen Soldat! Wie viele sind's? — Wie viele Tadeln hast du? — Ich schlage mit dem Stock auf den Tisch! Wie viele Schläge waren es? — Wiederholt (vorsingen, Chorsprechen):

Ein Griffel,
eine Mark,
ein Soldat,
eine Tadel,
ein Schlag.

Für einen von jedem Dinge sagt man Eins. Wiederhole den Satz! Nenne Dinge im Zimmer (im Hause, draußen), von denen eins vorhanden!

Für Eins schreibt man dieses Zeichen: 1. Lesst alle: Eins. Da habe ich auch noch eine ganz große 1 angeschrieben. (Zeichnen, beschreiben.) Schreibt die 1 auf unser Table! (Hausaufgabe).

^{1) Vgl. unten, Abschnitt des elementaren und höheren Schulunterrichts. Hpt. 1: Zahlen und Formzeichen. Hannover 1880. S. 100 und 104.}

II. Empfehlungswert ist der Gebrauch einer Tafel oder eines Fettes mit Quadratraster. Es muß den Kindern durch Vornachsetzen an der Wandtafel gezeigt und wiederholt gesagt werden, daß jede 1 ein Feld für sich bekommt, daß nach jeder 1 ein Feld und nach jeder Reihe eine Reihe bei bleibt.

2. Aufbau. Ihr seht hier eine Kugel (einen Punkt): Diese Kugel bedeutet eine (eines von jedem Ding). Wiederhole, was die Kugel bedeutet! Die Kugel wollen wir zeichnen (Vornachsetzen eines „Kaisers“ mit einem Punkt darin). Seht hier das Bild der Eins! Sage, wie es aussieht! Zeichnest auch das Bild der Eins!

II. Stufe der Erkenntnis. Führt fort, da erst ein Zahlbegriff gewonnen ist und in einem Zahlwort mindestens zwei Begriffe erkennbar sind.

III. Stufe der Anwendung. Hebt einen Arm hoch! Zeig! einen Finger! Klopft einmal in die Hände! Gib an, wie viele Bonnen am Himmel stehen (wieviel Lehrer im Schulzimmer sind, wie viele Tische die Kirche hat, wie viele Kaiser wir haben usw.)! Ihr kennt alle eine Lampe; gib an, welche Teile der Lampe einen sind! Zähle auf, was am Hantel (am Haken, an der Hantel usw.) eines ist! — Auf der ersten Seite eines Rechenbuches seht ihr das Bild der Eins! Beschriftet es! (Ein Karten, oben links ein Punkt darin.) Zeichnest zu Hause das Bild nach, nicht bloß einmal, sondern eine halbe Seite voll! —

2.

Die Einsstufenzahl 18.)

1A. Wiederhole 1×3 bis 4×3 ; 1×6 bis 2×6 .

1B. Aufbau von 4×3 und 3×6 (große Zahlbildtafel).

```

  **  *  *      **  **      ***          ***
  *  **  **      |*  *      ***          ***
    *
  **

```

Wieviel stehen links immer beisammen? Wievielmahl 3 sind in der ersten Reihe? In der zweiten Reihe? Wievielmahl 3 sind also im ganzen? Wieviel stehen rechts immer beisammen? Wievielmahl 6 sind vorhanden? Gib noch einmal die Anzahl und die Multiplikation an — Inkapi rechts! —

IIA. Wie wollen jetzt die Gesamtzahl suchen. Zähle zusammen, wieviel Teile im ganzen vorhanden sind! (Übersetzung der Zahlenreihen!) Wieviel ist also 4×3 ? Wie haben wir's gefunden? (Die 4 Reihen zusammengezählt.) Sucht rechts die Gesamtzahl! Wieviel ist also 3×6 ? Wie haben wir's wieder gefunden? (Die 3 Reihen zusammengezählt.) Das Zusammenzählen:

dauert ziemlich lange; man weiß sich deshalb die Gesamtzahl zu jeder Malzahl und Anzahl fest einprägen.

UB 1. Wenn man zu einer Anzahl und Malzahl die Gesamtzahl sucht, so nimmt man mal.

HA 2. Geh noch einmal an, wieviel 5×3 ist? Und 3×5 ? Ihr seht, daß beides gleich viel ist. Zeige am Bilde rechts, daß es nicht anders sein kann! (Jede 5 ist 3×3 , die 3 Sechsen sind also 3×3).

UB 3. Was laßt ihr daraus? (Man kann Malzahl und Anzahl miteinander vertauschen.) Man hat deshalb auch für Malzahl und Anzahl denselben Namen; man sagt für beide „Faktoren“. Was herauskommt (die Gesamtzahl) nennt man „Produkt“.

HA 3. Wir wollen jetzt sehen, wie oft die Anzahl in der Gesamtzahl enthalten ist. Wie oft ist 3 in 18 enthalten? 3 in 18? Welche Zahl gibt an, wie oft die Anzahl in der Gesamtzahl enthalten ist?

UB 4. Die Anzahl ist so oft in der Gesamtzahl enthalten, wie die Malzahl angibt. Erklärung der schriftlichen Form: 3 in $18 = 6 \times$, 3 in $18 = 3 \times$. Angliederung an die betreffenden Eindeckscheitern.

HA 4. Wir wollen jetzt die Gesamtzahl in so viele Teile zerlegen, als die Malzahl angibt. Wie heißt die Malzahl hier (6). Teile 18 in 6 gleiche Teile; wie groß ist jeder Teil? Teile 18 in 3 gleiche Teile; wie groß ist jeder Teil? Spricht: $18:6=3$; $18:3=6$. Welche Zahl gibt an, wie groß der Teil ist?

UB 4. Wenn man die Gesamtzahl in so viele Teile teilt, als die Malzahl angibt, so ist jeder Teil gleich der Anzahl. Erklärung der schriftlichen Formen (Antwort ohne \times , auch nicht „geteilt“ sondern; geteilt durch — in). Angliederung an die betreffenden Eindeckscheitern.

HA 5. Ich habe oben links und rechts 3 hinzugelegt! Wie groß ist nun die Gesamtzahl? Wieviel $\times 3$ und wieviel ist 30? Wieviel $\times 6$ und wieviel ist 30? Wievielfach mag nun 3 in 30 enthalten sein? Es bleiben 3 übrig. Diese 3 können nicht mit geteilt werden. Wir wollen sie deshalb den Rest nennen. Wieviel ist also 3 in 30? (3 in $20 = 6 \times$ und 3 R.). Wieviel ist 6 in 30? (3 in $20 = 3 \times$ und 3 R.). Derselbe Rest bleibt auch, wenn wir 20 durch 6 oder durch 3 teilen. Wieviel ist also $20:6$? $20:3$ — Einige andere Beispiele, etwa: 3 in 18, 6 in 18, $18:3$, $18:6$.

UB 5. Wenn man zur Gesamtzahl eine kleinere Anzahl hinzulegt, so kommt diese beim Teilen als Rest.

III. Aufgaben zur Multiplikation der 3 und 6 ohne und mit Ergänzung, ferner zum Enthaltensein der 3 und 6 ohne und mit Rest, endlich zum Teilen durch 6 und 3 ohne und mit Rest. Wiederholungsaufgaben zu den Einmaleinsreihen von 4 bis 12.

Das vorstehende Lehrbeispiel enthält den intellektuellen Ertrag der Bearbeitung jeder einzelnen Klausuraufgabe. Daraus folgt, daß sich die Behandlung in den wesentlichen Stücken wiederholen und deshalb mit der Zeit leichter und schneller vorantreiben gehen muß als zu Anfang. Die Sätze des Malnehmens, Enthaltenseins und Teilens werden bald ohne Schwierigkeit auf den ersten Blick aus der Anschauung entnommen, und man kann dann sogleich zur Verknüpfung und Befestigung schreiten; dabei darf die Angliederung an die angefügten Reihenbildungen nicht vernachlässigt werden. Die volle gedächtnismäßige Beherrschung dieser Stoffe wird am besten durch die planmäßige Benutzung der S. 94 beschriebenen Tabelle nach der z. z. G. gegebenen Anweisung erreicht. — Noch ist zu bemerken, daß das Malnehmen mit Ergänzung und das Teilen mit Resten (II A 8, 8 S.) zweckmäßig bis zur Erledigung der ersten 11 Einmaleinsreihen zurückgestellt, alsdann in dem Uebungs Nr 90 nachgeholt und erst von da ab der Behandlung der einzelnen Einmaleinsreihen angeschlossen wird.

8.

Mischungsrechnung.^{*)}

1. A. Die Stufe der Analyse hat den Zweck, die zur Aufklärung des Neuen erforderlichen Begriffe vorher zum klaren und geläufigen Bewußtsein zu bringen. In diesem Falle handelt es sich um den Begriff der Mischung und was damit zusammenhängt.

1. Wo stellt eine Mischung her? Ein Kaufmann. Er kauft Waren je nach der Güte zu verschiedenen Preisen an. Bei einigen Waren ist es ihm gestattet, solche von verschiedenen Werten zu mischen, z. B. Kaffee, Tee, Tabak. Ferner mischen Weinbändler, Kornbändler, Handwerks Waren verschiedenen Werten. (Beispiele.)

2. Weshalb wird eine Mischung hergestellt? Ein Kaufmann hat vielleicht Kaffee, den er des hohen Preises wegen nicht verkaufen kann, und sucht zu einem billigeren Preise. Dann kann er den teuren Kaffee mit dem billigen mischen und so eine Sorte herstellen, die er leicht verkaufen kann. Oder eine Handwerks Person selbst den Kaffee und nimmt dazu verschiedene Sorten. Der gute Kaffee allein ist ihr zu teuer, die billige Sorte ist wieder nicht gut genug. Sie kann dann aus beiden Sorten eine gute Mischung herstellen. (Weinbändler, Getreidehändler usw.)

^{*)} siehe S. 120–21.

3. Zu welchem Preise muß die Mischung verkauft werden? Die Kinder geben an: Der Kaufmann darf nicht die ganze Mischung für den besten Preis verkaufen, weil er dann seine Käufer überverten würde. Ebenso wenig kann er die Mischung für den billigen Preis abgeben, da sich dann für ihn ein beträchtlicher Verlust einstellen würde. Um nun seinem Käufer und sich selbst gerecht zu werden, muß er einen Preis für die Mischung wählen, der zwischen dem besten und dem billigen Preise steht. Diesen Preis nennt man den Durchschnittspreis. Wir wollen zunächst den Durchschnittspreis, abhens die eine oder andere der gemischten Sorten berechnen.

IB 1. Ein Getreidehändler mischt Gerste und Hafer und zwar a) zu gleichen Teilen, b) $\frac{1}{2}$ zu $\frac{1}{2}$. Wie hoch muß er den Durchschnittspreis stellen, wenn 100 kg Gerste 23,40 M, 100 kg Hafer 18,80 M kosten?

2. Wieviel kg Kaffee à 1,80 M muß man zu 8 kg à 2,10 M mengen, damit das kg der Mischung auf 2 M zu stehen kommt?

II A 1. Wiederhole die erste Aufgabe! Wir hatten zunächst den Fall a) im Auge. Da beide Sorten zu gleichen Teilen gemischt worden sollen, so nehmen wir an, daß 100 kg Gerste mit 100 kg Hafer gemischt werden. Wie hoch stellen sich die 100 kg Gerste? Die 100 kg Hafer? Wie hoch die 200 kg der Mischung? Wieviel kosten nun 100 kg im Durchschnitt? — Schriftliche Form:

100 kg der besseren	Sorte = 23,40 M
100 kg der geringeren	Sorte = 18,80 M
<hr/>	
200 kg der Mischung	= 42,10 M
100 kg im Durchschnitt	= 21,05 M

Wir fassen jetzt den Fall b) im Auge. In welchem Verhältnis sollen Gerste und Hafer gemischt werden? Stelle ein solches Verhältnis her! (100 kg Gerste, 200 kg Hafer.) Berechne die Preise für jede Sorte! Wie stellen wir den Preis für 100 kg der Mischung? — Schriftliche Form:

100 kg der besseren	Sorte = 23,40 M
200 kg der geringeren	Sorte = 18,80 M
300 kg der Mischung	= 32,10 M
100 kg im Durchschnitt	= $\frac{32,10}{3}$ = 10,70 M

2. Wiederhole die zweite Aufgabe! Gegeben ist außer dem Preise der besseren und dem der geringeren Sorte auch noch der Durchschnittspreis. Was soll berechnet werden? Wie werden wir's angehen? Die Kinder müssen zunächst heraussuchen, wieviel 1 kg

der besseren Ware mehr kostet, als 1 kg der Mischung und wieviel 1 kg der geringeren Sorte weniger kostet als 1 kg der Mischung. Schriftliche Darstellung:

bessere Sorte	2,50 \mathcal{M}	Durchschnittspreis 2 \mathcal{M}	— 50 %
geringere Sorte	1,50 \mathcal{M}		+ 40 %

Würde man 1 kg der Ware zu 2,50 \mathcal{M} für 2 \mathcal{M} verkaufen, so würde man 50 % Verlust haben. Verkauft man 3 kg der Sorte zu 2 \mathcal{M} , so ist der Verlust $3 \times 50 \text{ %} = 1,50 \mathcal{M}$. Der Kaufmann will aber nicht verlieren, daher muß er an der geringeren Ware etwas gewinnen und zwar 2,40 \mathcal{M} . Verkauft er 1 kg der billigen Sorte zu 1,50 \mathcal{M} für 2 \mathcal{M} , so gewinnt er 40 %. Er will 2,40 \mathcal{M} an der Ware gewinnen. Er muß also an 6 kg der geringeren Ware bekommen, als 40 % in 2,40 \mathcal{M} enthalten sind = 6 mal. Folglich muß er 6 kg der geringeren Sorte mit 3 kg der besseren Sorte mischen. Schriftliche Darstellung:

3 kg der besseren	Sorte $3 \times 1,00 \mathcal{M} = 3,00 \mathcal{M}$ Verlust,
1 kg der geringeren	Sorte $= 0,40 \mathcal{M}$ Gewinn,
6 kg der geringeren	Sorte $= 2,40 \mathcal{M}$ Gewinn.

II B. Seht jetzt auf die (angeschriebenen) Lösungen. Wie haben wir nach der ersten Lösung den Durchschnittspreis berechnet? (Wir haben zunächst den Preis jeder Sorte berechnet, alsdann die Mengen und die Beträge dafür addiert und schließlich von der Summe den vorrichtigen Teil genommen, als die zu berechnende Menge in der ganzen Menge enthalten ist.)

III. Schaut das Verfahren bei der zweiten Lösung an! Vergleiche es mit dem Verfahren bei der ersten Lösung! (Stimmen überein.) Wiederhole, wie man den Durchschnittspreis berechnet!

Seht jetzt auf die dritte Lösung! Was haben wir zuerst bestimmt? (Den Verlust bzw. Gewinn an einer Mengeneinheit der besseren bzw. geringeren Sorte.) Was haben wir aus dem ersten Ergebnis berechnet? (Den Gesamtverlust an der besseren Sorte.) Dieser Verlust muß durch einen entsprechenden Gewinn an der geringeren Sorte ausgeglichen werden. Wie haben wir die gesuchte Menge der geringeren Sorte gefunden? Wiederhole, wie man die geringere Sorte berechnet! (Man bestimmt nach dem Durchschnittspreis den Verlust und den Gewinn an einer Mengeneinheit der besseren bzw. geringeren Sorte, berechnet alsdann den Gesamtverlust an der besseren Sorte und teilt in diesen den Gewinn an einer Mengeneinheit der geringeren Sorte.) An einer weiteren Aufgabe

wird gezeigt, daß das Verfahren im wesentlichen dasselbe bleibt, wenn statt der geringeren die bessere Sorte zu berechnen ist.

III. Lösung einschlägiger Aufgaben, teils im Kopfe, teils schriftlich.

10.

Die Einführung in das Wesen der Dezimalzahlen.¹⁾

(Für den 4. Schuljahr.)

A. Sachgebiet.

Untere dekadischen Mäße, Maße und Gewichte.

a) Münzen. Einheit: Die Mark; die übrigen Münzen sind Vielfache oder Teile derselben. Schreibweise. (Beispiele): b) Längenmaße. Einheit: Das Meter. Vielfache und Teile derselben. Schreibweise. (Beispiele): c) Flächenmaße. Einheit: Das Quadratmeter. Vielfache und Teile derselben. d) Hohlmaße. Einheit: Das Liter. e) Gewichte. Einheit: Das Gramm. f) Papiermaße. Einheit: Das Bogen. — Währungszeichen.

B. Rechenaufgaben²⁾.

a) Zehntel (z), Hundertstel (h), Tausendstel (t).

1. Zahlen: 1, 2 ... 10; 10, 20 100; 200, 300 ... 1000;
1000, 2000 ... 10000; 10000, 20000 100000; 100000, 200000
... 1000000.

2. Sätze: 10 z ist 1 z; 10 z ist 1 h; 10 h ist 1 t usw.

3. Zahlen: 100000; 900000 100000; 900000, 90000 ...
10000 usw.

4. Sätze: 1 M ist 10 h; 1 h ist 10 z; 1 z ist 10 t usw.

5. Sätze: 1 E mal 10 ist 1 Z; 1 Z mal 10 ist 1 H usw. bis: 1 H mal 10 ist 1 M. (Erste Form.) Das 10fache von 1 E ist 1 Z; das 10fache von 1 Z ist 1 H usw. bis: das 10fache von 1 H ist 1 M. (Zweite Form.)

6. Sätze: 1 M durch 10 ist 1 H usw. bis: 1 Z durch 10 ist 1 E. (Erste Form.) Der 10. Teil von 1 M ist 1 H usw. bis: der 10. Teil von 1 Z ist 1 E. (Zweite Form.)

*1. 1-10, 10-10, 100-10 ... 100000-10.

*2. 1000000; 10; 100000-10 ... 10-10.

*3. 1 km; 1 m; 1 cm; 1 qm; 1 qkm; 1 ha; 1 a; 1 q; 1 qm; 1 qkm.

*4. 1 M; 1 H; 1 z; 1 q; 1 kg; 1 g; 1 B; 1 S.

Merke: Das zehnte Teil nennt man 1 Zehntel (z).

¹⁾ Zöllig und Fritzsche, Praktische Volksschulmethodek. 2. Aufl. Leipzig 1908. S. 186-200.

²⁾ Aufgaben mit * sind auch schriftlich zu erledigen.

11. Berechne 1 Zehntel von: a) 1 km, 1 m, 1 cm; 1 qkm usw. (Nr. 9); b) 1 µf; 1 kg; 1 t usw. (Nr. 10)

12. Dargestellt von: 1 kg, 1 H ... 1 Z

13. Merke: Da 1 Zehntel von 1 cm ebenfalls wie 1 mm ist, so darf man hier sagen: 1 mm ist ein Zehntel-Zentimeter. Bitte entsprechende Sätze für 2 mm, 3 mm ... 10 mm!

*14. Schreibweise: a) 1 mm = 0,1 cm; 2 mm = 0,2 cm ... 10 mm = 1,0 cm; b) 0,1 cm = 1 mm ... 1,0 cm = 10 mm!

(Sprich: 1 mm ist 1 Zehntel-Zentimeter usw.)

*15. a) 11 mm = 1 cm 1 mm = 1,1 cm; 12 mm = 1 cm 2 mm = 1,2 cm ... 90 mm = 9 cm 0 mm = 9,0 cm; b) 1,1 cm = 1 cm 1 mm = 11 mm; 1,2 cm = 1 cm 2 mm = 12 mm ... 2,0 cm = 2 cm 0 mm = 20 mm. (Sprich: 11 mm oder 1 cm und 1 mm sind 1 und 1 Zehntel-Zentimeter usw.)

*16. a) 21 cm = 2 cm 1 mm = 2,1 cm; ebenso: 22, 34, 40, 55, 69, 76, 88, 99, 104, 127 mm; b) 2,1 cm = 2 cm 1 mm = 21 mm; ebenso: 2,2; 3,5; 4,7; 5,0; 6,2; 7,4; 8,6; 9,8; 10,9; 12,9 cm.

17. Wieviel ist 1 Zehntel von 10, 100, 1000 ... 100000? (Sprich: 1 Zehntel von 10 ist 1 usw.) Umkehrung: 1 ist 1 Zehntel von 10 usw.)

18. Wieviel ist 1 z von 1 Z, 1 H ... 1 M? (Sprich: 1 Zehntel von 1 Zehner ist 1 Einer usw.) Umkehrung: 1 E ist 1 z von 1 Z usw.)

19. Wieviel ist 1 z von 1 E? Merke: 1 Zehntel von 1 Einer nennt man 1 Zehntel (z). 1 Einer hat 10 Zehntel. Die Zehntel bilden eine besondere Zahlordnung. Zähle: a) 1 z, 2 z ... 10 z; 1 E, 2 E ... 10 E; 1 Z, 2 Z ... 10 Z; b) 10 Z, 9 Z ... 1 Z; 10 E, 9 E ... 1 E; 10 z, 9 z ... 1 z.

20. Merke: Die Zehntel erhalten ihre Stelle rechts neben der Einer. Diese Stelle heißt Zehntelstelle. Einer- und Zehntelstelle werden durch ein Komma getrennt. Sind keine Einer vorhanden, so setzt man eine Null in die Einerstelle. Schreibweise: a) 1 z = 0,1; 2 z = 0,2 ... 10 z (1 E) = 1,0; b) 1 E + 1 z = 1,1; 1 E + 2 z = 1,2 ... usw.

21. Lerne: 0,7 (sprich: 7 Zehntel); 4,7 (sprich: 4 und 7 Zehntel) usw. Besondere: a) 0,2; 0,6; 0,9; 0,1; 0,4; 0,7; 0,3; 0,5; 0,8; b) 1,1; 1,4; 3,2; 4,6; 5,3; 6,7; 7,4; 8,9; 9,5; c) 11,1; 22,2; 33,3; 44,4; 55,5; 66,6; 77,7; 88,8; 99,9; d) 2,4; 0,8; 45,3; 0,7; 0,9; 79,2; 0,1; 0,6; 49,1.

*22. Schreiben mit Ziffern nach Diktat: 6 E 3 z = 6,3 usw. Ebenso: a) 3 E 3 z; 8 E 6 z; 4 E 9 z; 9 E 4 z; 6 E 4 z. b) 8 z; 3 z; 7 z; 1 z; 5 z.

*23. Ebenso: a) 32 E 5 z; 65 E 9 z; 48 E 2 z; 96 E 7 z; 50 E 4 z. b) 5 E 2 z; 9 z; 14 E 7 z; 4 z; 80 E 3 z.

24. Zerlegen: 3,8 = 3 E + 8 z; 62,4 = 6 Z + 2 E + 4 z usw. Zerlege ebenso: 3,9; 1,2; 4,6; 12,6; 24,3; 68,5; 80,1; 127,1; 365,7; 506,9!

25. Verwandeln: $5,8 = 50 x + 8 = 58 x$; $13,4 = 130 x + 4 = 134 x$ usw. Verwandte ablesen: 8,7; 4,8; 9,6; 19,2; 28,4; 69,2; 143,1; 437,8; 701,9; 984,3²⁾

Merke: Das 100. Teil nennt man 1 Hundertstel ($\frac{1}{100}$).

26. Berechnen 1 h von: a) 1 km, 1 m; 1 qkm, 1 km, 1 a, 1 qm, 1 qcm; b) 1 μ f; 1 m; 1 l, 1 kg, 1 g; 1 Hg!

27. Merke: Da 1 h von 1 μ f absteigend ist wie 1 $\frac{1}{100}$, so darf man hier sagen: 1 $\frac{1}{100}$ ist 1 Hundertstel-Mark. Welche entsprechende Stufen für 2, 3, 4 ... 10 $\frac{1}{100}$; 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 $\frac{1}{100}$!

*28. Schreibweisen: a) 1 $\frac{1}{100} = 0,01 \mu$ f; 2 $\frac{1}{100} = 0,02 \mu$ f ... 10 $\frac{1}{100} = 0,10 \mu$ f; 11 $\frac{1}{100} = 0,11 \mu$ f ... (nach Bedürfnis). b) Umkehrungen: $0,01 \mu$ f = 1 $\frac{1}{100}$... (Es sprechen ist z. B.: 3 $\frac{1}{100}$ sind 3 Hundertstel-Mark usw.)

*29. 101 $\frac{1}{100} = 1 \mu$ f 1 $\frac{1}{100} = 1,01 \mu$ f ... 110 $\frac{1}{100} = 1 \mu$ f 10 $\frac{1}{100} = 1,10 \mu$ f. Ebenso: 113, 174, 146, 568, 190, 212, 337, 405, 573, 801 $\frac{1}{100}$.

*30. $1,01 \mu$ f = 1 μ f 1 $\frac{1}{100} = 101 \frac{1}{100}$... $1,10 \mu$ f = 1 μ f 10 $\frac{1}{100} = 110 \frac{1}{100}$. Ebenso: 1,13; 1,25; 1,37; 1,49; 4,50; 6,78; 8,44; 1,34; 9,08; 2,01 μ f.

Anmerkung: Bei Nr. 27 bis 30 können nach Bedürfnis nach unten hin bis z. B. 1 cm = 2,54 m herabgezogen werden.

31. Wieviel hat 1 h von 1 H, 1 T, 1 Z, 1 M, 1 MH? (Nr. 18.) Stren. Umkehrungen.

32. Wieviel hat 1 h von 1 E?

Merke: 1 Hundertstel von 1 E nennt man ein Hundertstel ($\frac{1}{100}$). 1 Elng hat 100 Hundertstel. Die Hundertstel bilden eine besondere Zahlordnung.

33. Wieviel Hundertstel hat 1 Zehntel?

Merke: Die Hundertstel erhalten ihre Stelle rechts neben den Zehnteln. Diese Stelle heißt Hundertstelstelle. Schreibweisen: 5,55 (sprich: 5 E 5 u 5 h); 5,04 (sprich: 5 E 4 h) usw. usw.³⁾

²⁾ Die Stangen dieser Eisenstäbchen sind nicht sehr klein wie Nr. 102.

§ 5. Der Abbau.

Vorkenntnis. Was an dieser Stelle der Kritik erscheinen muß, so kann es nur in großen Zügen geschehen sein; es darf nicht der Eindruck gelten, daß mit der Begründung der Eigenschaften der Kritik und damit der erforderliche Teil verstanden, damit zugleich genügt werden kann, auf welchem Wege und mit welchen Mitteln das klassische Mathematik abgebaut werden kann. Weiter soll diese vollständige Kritik nicht den unteren Stufen wie in den Klassen, daß ganze abstrahieren sollen, was gut, was noch vermeintlich sind was zu erwarten ist; sie wird vielmehr in großen Zügen die Gründe darlegen, die zu einem Fortschritt nötigen.

Wenn der Dozierende sich die Ziele, die Lehrpläne und die Musterbeispiele des bisherigen Rechensunterrichts vor Augenwürgt, so hat er zunächst den Eindruck, daß eine fast unüberwindliche Forderung von Arbeit und Erfahrung in diesen Bestimmungen und Beispielen niedergelegt ist. Er schließt dann weiter, daß doch alles in schönster Ordnung sein müsse, und befreit nicht die allgemeine Klage über den Mißerfolg der aufgewandten Mühe. Da dieser Mißerfolg aber schlechterdings nicht zu leugnen ist, so kann er seiner Meinung nach nur dem Fache selbst zugesprochen werden, mit andern Worten: Rechnen, Mathematik ist eine Sache, die nicht für die Allgemeinheit bestimmt sein kann; die um ihren eigenartigen Charakter willen eigenartige persönliche Voraussetzungen erfordert, die eben die große Mehrheit nicht erfüllen kann.

Ansatz der psychologisch geschulte Beobachter. Er überblickt mit einem Blick die gewaltige Distanz zwischen seelischer Entwicklung und den Forderungen der Schule. Da wir nun die seelische Entwicklung unseres Geschlechts nicht ändern können, wohl aber die Forderungen der Schule, so enthalten eben diese Schullorderungen Irrtümer, die beseitigt werden müssen. Es sind folgende:

1. Unser Rechensunterricht geht von dem Standpunkte des Erwachsenen, des gebildeten Erwachsenen. Dieser ist in der Lage, eine Anzahl Erscheinungen des Lebens zusammenzufassen in einen gemeinsamen Ausdruck, gemeinsame Beziehungen in eine Regel, widerstrebende Beziehungen in ein Gesetz¹⁾. Mit einem gewissen Feingefühl und einer sich stetig steigenden Sicherheit befaßt er nun neue ähnliche Fälle mit den gewonnenen Ausdrücken und Sätzen. Glaubt er, die Abstraktionen irgendwelchen Gebieten nicht genügend erfüllt zu haben, so zieht er daraus den Schluß, daß er die Bearbeitung dieser Gebiete hätte früher beginnen müssen, damit er ihnen mehr Zeit hätte widmen können²⁾; denn die Zeitstellung der Gegenwart gestattet selten einen vorläufigen Fort.

¹⁾ Er nennt gewisse ganz verschiedene Eigenschaften Zahlenreihen, und bezeichnet diese z. B. mit „Reihe“ und „Folge“. Er gewinnt aus verschiedenen Erfahrungen die Regel: Wir sind geneigt zu glauben, das wir wissen.

²⁾ Je più er sich mit den Abstraktionen des arithmetischen Gebiets, indessen mit denen der Geometrie, befaßt.

Dabei ist ihm der Gedanke fremd, daß Abstraktionen zu ihrer Bildung Zeit brauchen; er abstrahiert ja ununterbrochen, selbst in jeder Einnahmebeziehung trennt er das Wesentliche vom Unwesentlichen.

Diese Fähigkeit der Abstraktion überträgt nun unser Rechenunterricht irrtümlicherweise auf das Kind. Ganz besonders zeigt sich dies in der Annahme der Selbstverständlichkeit der mathematischen Form und in Methode und Plan des elementaren Rechnenunterrichts¹⁾.

Aber die menschliche Seele läßt sich eben vor einem gewissen Abstrahieren zu Abstraktionen beliebiger Art zwingen. Eine große Zahl bilden sich zwar schon im Kindesalter, aber langsam und mit kopierten Vorlesungen, will sagen: noch nicht befreit von Verfestungsvorstellungen. Wenn es nun, dem Erwachsenen, so schädel, als hätten die Kinder tatsächlich Abstraktionen in seinem Sinne vollzogen, so ist das in weitaus den meisten Fällen die Irrtum; es ist in Wirklichkeit Nachsägerei, bei der die Fähigkeit eigener Konkrektisierung fehlt. Das gilt selbst in Fällen, wo anscheinend lange Gedankengänge und eine große Summe von einzelnen Abstraktionen „geleitet“ worden sind, wie im Einmaleins, im Bruchrechnen, im Schlußrechnen usw.

3. Der Erwachsene hat das Bedürfnis, öfter vorkommende Tätigkeiten mechanisch abstrahieren und die Sicherheit ihrer erfolgreichen Durchführung technisch zu erhöhen. Die Buchungen, Quittungen und Wechselformulare des Geschäftslebens, die Formulare der Post, die Listen der Schul- und aller anderen Verwaltungsbehörden, selbst die Vordrucke in Notizbüchern und viele ähnliche Erleichterungen sind das Zeuge. Es ist dies der Schematismus, eine außerordentlich wertvolle Erleichterung, weil die Energie spart, Überflüssiges und Vollständiges gewährleistet und selbst minder guten Kritikern Leistungen ermöglicht, an denen sie auf sich selbst gewiß nicht stolz wären²⁾.

Auch dieses Bedürfnis nach Schematisierung überträgt der Erwachsene irrtümlich auf das Kind. Er glaubt, der Rechenunterricht, der praktische Ziele erreichen sollte, müsse es umsetzen mit dem Schema für möglichst alle die verschiedenartigen im Leben vorkommenden Fälle. Dadurch werden die „Fälle des Lebens“ maßgebend für Ziel, Lehrverfahren und Plan, und es ergibt sich daraus die gewaltige Stofffülle, unter der die Schule weit hinaus rückt.

Von hier aus wird es klar, daß der gesamte Rechenunterricht

¹⁾ Man vergleiche im Lichte dieses Gedankens nochmals die verpönten Lehrsätze, die im Hinblick auf das höher Geschaffene sichbegründet die Höhe der Erkenntnis vermissen.

²⁾ Daß der Schematismus, wie jede menschliche Einrichtung, mit gewissen Reizen korn, ist eine Sache für sich; darum handelt es sich hier nicht.

der Volksschule — und ein großer Teil des Rechenunterrichts der höheren Schulen — durchaus von dem einem Gedanken der Stoffausammlung durchdrungen ist, der Stoffausammlung mit allen möglichen Mitteln, mit dem apperzeptiven der Abstraktion, wie mit dem mehr associativen des Schemen.

Die Kehrseite dieser stofflichen Orientierung unseres Rechenunterrichts ist eine nicht geringe psychologische Kenntnislösigkeit. Diese kommt eigenartigerweise den meisten, die an ihr leiden, gar nicht zum Bewußtsein, weil sie sich in dem Glauben befinden, daß sie sich vielmehr eingehend mit Psychologie beschäftigen und seitdem selbst in verschiedenen unsere Werke Einblick genommen hätten. Sie haben freilich vielleicht die Technik, aber nicht den Geist der heutigen Psychologie erfaßt. —

Es ist sehr beachtenswert in diesem Zusammenhange, daß auch der Blick auf die anderen Fächer unserer Erziehungsschulen zu dem gleichen Ergebnis führt, unser Schachterrichte sei in der Hauptsache vom Stoffprinzip beherrscht. Es zeigt sich darin, daß Art und Menge des zu übermittelnden Stoffes eigentlich im Vordergrund des Interesses steht bei fast allen, welche die Gestaltung des Unterrichts beeinflussen und durchführen; daß der Gedanke herrscht, ein Stoff müsse um seines allgemeinen nützlichen Bildungswertes willen irgendwo im Stoffplan der Schule untergebracht werden; daß das Werturteil der Erwachsenen das alleinige Motiv zu sein habe für die Auswahl der zu behandelnden Stoffe¹⁾; vollständig ausgedrückt: daß die meisten Stoffe behandelt werden müßten, damit der Schölerallgemein „es gehabt habe“.

Infolge der Herrschaft dieses Grundsatzes hat unser ganzer Unterricht eine eigenartige utilitaristische Tendenz angenommen, eine Richtung, bei welcher sehr viel geschieht nicht um der gegenwärtig zweckmäßigsten Bildung des Schölers willen, sondern um eines in der Zukunft liegenden Erfolges willen. Es schwebt gewissermaßen über der ganzen Klasse keine der Gedanken: „Warum ihr das lernt, könnt ihr zwar alle miteinander nicht begreifen; aber ihr werdet es schon später gut brauchen können.“ Und der Lehrplan entspricht dem und wählt aus, was das Kind „im Leben brauchen

¹⁾ Das darf nicht falsch empfunden werden: Es wird keineswegs verlangt die Erziehungspraxis, daß das Vertrauen des Kindes an die Güte des Werturteils der Erwachsenen zu hohen Maße, sondern die kindliche Bildungsstufe, die Instabilität und emotionale Instabilität, die es wichtiger an sich empfindet hat, mit Ausdrucksform sein für die Auswahl der Erziehungsmaßnahmen, auch der Stoffe. Ich meine verschiedenen möglichen Stufen des Werturteils des Erwachsenen einschließend, ist es selbstverständlich, daß es nur widersteht, das auszusprechen. Letzter ist der sehr richtig gestellte, welcher die Erziehungspraxis, der Gegenwart im Hinblick bringen wollen. Auch darf nicht missverstanden werden, daß nach dem Geiste der meisten Lehrpläne die Rücksicht auf den Bildungsgegenstand und den Bildungsfortschritt des Kindes eine mehr sekundäre Bedeutung haben, nämlich für die Anordnung des Stoffes, zum Teil auch für die Art seiner Vermittlung.

Kinder", als Erwachsener natürlich. Das ist aber ein Transferen-
branch an falscher Stelle. Zwar weist die alte Schule auf den
formalen Gewinn hin, den jeder solcher Transferenbranch habe.
Es ist aber trügend zu wünschen, daß der formale Gewinn wesent-
lich erhöht und gleichzeitig noch ein materieller Gewinn gemacht
wird. Und dies ist möglich durch eine Änderung des Standpunktes.

Haben wir den ersten Wunsch und Willen, daß unser Volk
seine Aufgabe nicht erschöpft sehe in der Erhaltung und Über-
lieferung der Kulturgüter, sondern daß es die inneren Kräfte ent-
wickle, welche die Grundlage und Vorbedingung des Aufstiegs zu
immer höherer Kultur, vor allem zu immer höherer Geistesbildung
sind, wollen wir also nicht Stillstand, sondern Fortschritt, so müssen
wir in der Organisation unserer Erziehung den Blick umstellen
lernen und an Stelle des Stoffprinzips das psychologische
Prinzip heranziehen lassen.

Dies würde sich darin zeigen, daß Art und Tempo der kind-
lichen Entwicklung — im Hinblick auf die letzten und höchsten Er-
ziehungsziele sowohl, wie im Bewußtsein der einzelnen Entwick-
lungsphasen — in den Vordergrund des Interesses der pädago-
gischen Kreise treten würde; daß unser Absehen darauf gerichtet
wäre, die Kräfte des Kindes zu entwickeln, damit es befähigt werde,
sich all den wertvollen Kulturgütern zu bedienen. Das ihm irgend
erreichbar ist, daß der Stoffgehalt aus der Fortsetzung, die
er jetzt kennt hat, herausgerückt und — als zwar hochbedeutend,
aber doch minder bedeutsam gegenüber der Entwicklung der ein-
geborenen Kräfte — an die zweite Stelle des pädagogischen Inter-
esses gestellt würde.

Damit ist keine Revolution auf dem Gebiete der Erziehung
betroffen, nur eine veränderte innere Einstellung, die
die Gewähr bietet, daß wir den höchsten Erziehungszielen die ge-
nügende Nähe zu kommen vermögen¹⁾, als bei der alten Einstellung.
Diese Umstellung wird nicht nur durch die ganze Entwicklung unseres
Volkes wie unserer Wissenschaft gebodert, sondern sie ist auch

¹⁾ Dieser tiefere Gedanke, dessen innerer Kern unserer Erziehungslehre
versteckt war, in ihrem Zusammenhang mitwirkend auf Leistungen, die
in den letzten Jahren in Epistemologie und Ethik erzielt wurden, ist unser
Thema wie „Die Kräfte des Kindes“, „Das Ende der Schulreform“,
„Vorbereitungsfächer“ und „Schulbuch“, und die umschließend den Kreis verläßt,
im Hinblick auf „Lehren des Volkstums“ eine Schulreform im pädagogischen
Bedeutungsrahmen betrachten sich an solchen Gedanken nicht zu lösen, die
durch ihr Einwirken für den „alten Bewußtsein“ ein Stücklein zu machen helfen,
sondern auch solche, deren gute Absichten außer Zweifel stehen. Denn gegen-
über ist es von Bedeutung, ausdrücklich festzustellen, daß die Erziehungslehre,
wie wir sie mit vielen Gesichtspunkten wünschen, nicht das geringste zu tun hat
mit einer sogenannten „richtigen Schule“, und daß es eine unbedachte Verwirrung
ist, wenn die Schulreformbewegung allgemein behandelt wird als eine nur den
Anfängen gekennzeichneter veränderte Theorie von Erziehungsführung.

schon von dem pädagogischen Kantonen fast aller Zeiten vergewahrt und herabgelächelt werden?).

Der Rückblick auf die Klagen über den Rechenunterricht, auf die Lehrpläne und Lehrproben, endlich auf die Eigenart der im Betracht kommenden Grundstufe läßt keinen Zweifel darüber bestehen, daß in der stofflichen Orientierung unsere Rechenunterrichts der letzte und innerste Grund der beklagten mangelhaften Ergebnisse zu suchen ist.

Im einzelnen darf man folgendes behaupten: Er leidet

1. an der Forderung frühester und möglicher Abstraktion,
2. an der Übertreibung der sprachlichen Übung,
3. an der Überfülle mechanischen Stoffe,
4. an der Vernachlässigung eigenständiger mathematischer Bildung und praktischer Anwendung.

Die Richtigkeit dieser Behauptungen ist für viele ohne weiteres aus den Plänen und Lehrbeispielen zu ersehen. Andere finden sie durch die eigene Praxis bestätigt. Wer aber jenem noch nicht zurustimmen vermag und über praktische Erfahrungen entsprechender Art nicht verfügt, dem sei das Studium der folgenden Darlegungen und ihr fortwährender Vergleich mit dem heutigen Stande der Sache empfohlen.

Nicht ein Fieber oder eine Treppe oder ein Uchthalten unsere Gebäudes bedarf der Ausbesserung, das alles ist in keinem schlechten Zustande, und es wäre verlorene Mühe, an der Verbesserung Kleiner und Kleinsten Ecken zu arbeiten. Nur ein Neubau auf neuen Grundlagen kann helfen. Das auszuführen vermag freilich nicht ein einzelner, selbst nicht, wenn er auf der Vorsehung vieler Vorkämpfer ruht; das vermag nur die Gesamtheit der deutschen Erzieher. Aber sein Bild wollen wir malen, wie es uns vorschwebt und wie es in tausend stillen Stunden der Selbstprüfung und in abertausend Stunden heißen Studiums und in noch mehr tausend Stunden praktischer Erprobung uns in immer klareren Zügen vor die Seele getreten ist.

Wir versuchen es darzustellen: 1. in einer psychologischen Grundlegung, 2. in einer ihr und dem allgemeinen Erziehungsziel entsprechenden Zielsetzung, 3. in einem zweckmäßigeren Lehrverfahren, 4. in einem geeigneten Lehrplänenentwurf, dem einige Lehrproben angehängt werden sollen.

*) Praktische Forderung „juniorer Bildung“, köstliche Behauptung des „Schweizerischen Schulmannes“ und nicht anders. Man kann aber die Idee noch weiter zurückverfolgen. Die philosophische „Jugendlichkeit des Lehrers“ dagegen kann nur die Unfähigkeit durch verwechseln.

Der Aufbau.

I. Teil: Die Grundlagen.

§ 6. Der Zahlbegriff.

Wenn wir die Behandlung irgendeines Schulgebiets untersuchen wollen, so müssen wir uns zunächst über den Gegenstand selbst völlig im klaren sein. Wer mit seinen Schülern Sprachlehre treiben will, muß wissen, welche Summe von Kenntnissen unter diesem Ausdrucke zusammengefaßt wird; und ebenso ist es bei Geographie, Geologie, Psychologie und in jedem anderen Gebiete. Wer Geographie und Geologie einerseits nicht auseinanderhalten, andererseits nicht die Beziehungen zwischen beiden sofort anzugeben weiß, wird keinen guten Geographielehrer erteilen können; und wer Literatur und Sprachlehre in seinem Denken nicht reichlich geschieden hat, wird nur einen mangelhaften Deutschunterricht geben. Die möglichste Klarheit über den Bildungsstoff ist also eine ebenso notwendige wie selbstverständliche Voraussetzung für die pädagogische Behandlung. So ist es nötig, auch den Stoff des Rechenteunterrichts zu betrachten.

Der Rechenteunterricht hat es zunächst mit Zahlen zu tun. Das ist sein Stoff. Der Rechentelehrer muß darum ein möglichst hohes Verständnis für die Zahlen zu gewinnen suchen. Er muß z. B. Auskunft geben können auf die Frage: Was ist die Zahl? oder zunächst: Was ist eine Zahl?

Wenn sich irgendein gebildeter Mensch diese Frage vorlegt, so kommt er auch ohne psychologische Vorkenntnisse zu einer ganzen Reihe von Ergebnissen. Er verfährt so: Um die Frage zu beantworten, stelle ich mir irgendeine Zahl vor, sagen wir 4, und frage mich: Was ist eigentlich 4? Es ist bald klar, daß hier verschiedene Antworten möglich sind. Zunächst die: 4 ist ein Ding, das geschrieben wird, und zwar mit drei eigenartig gestalteten geraden oder wenig gebogenen Strichen, von denen der zweite und dritte einander kreuzen. Weiter findet aber auch folgende Erwägung

vier¹⁾; 4 ist doch aber noch etwas, das ohne diese drei Striche bestehen kann, nämlich in der von ihnen gänzlich verschiedenen Form „vier“. Auch dies ist zwar ein Ding¹⁾, das geschrieben werden kann, jedoch völlig anders.

Jedes Denkgebilde muß nun einer doppelten Nachprüfung unterzogen werden: in bezug auf die gleichartigen Fälle und in bezug auf die andern gerieten. Mit anderen Worten: Jedes Urteil wird geprüft an den Tatsachen dadurch, daß man versucht, einerseits die verschiedenen Subjektionsmöglichkeiten, andererseits irgendwelche ähnlich gerieteten Fälle unter den Falsitätsbegriff zu stellen. In unserem Falle also: Paßt die obige Aussage, daß 4 ein Ding sei, das auf verschiedene Art geschrieben werden kann, auf alle Zahlen, auf 5, 9, 100 usw.? Das ist offenbar der Fall. Aber paßt sie nur auf die Zahlen? Oder gibt es vorhandene Dinge, die auf zweifache Weise geschrieben werden können? Das letztere ist in hohem Maße der Fall. Man braucht sich nur zu erinnern an die Noten in der Musik, die als Punkte auf bestimmten Stellen eines bestimmten Notensystems erhalten können, ebenso gut aber auch als Buchstaben mit Berichtsbeziehungen, wie endlich auch als ausgeschriebenes Wort.

Man erinnert sich weiter, daß es ja eigentlich nur auf verschiedene Schriftarten hinankommt, ob etwas in zweifach oder mehrfach verschiedener Weise geschrieben werden könne. Man denkt an Druckschrift, an Stenographie, an die chinesische Silbenschrift, an die Koresasschrift usw. Dies in Betracht stellend könnte man die obige Erklärung für Zahl dahin abändern: Zahl ist ein Ding, das sowohl in Wertschrift (4) wie in Buchstaben- oder Lautschrift (vier) dargestellt werden kann. Was man freilich auf diese Art erklärt hat, gilt auch ähnlich von anderen Dingen, z. B. den erwähnten Noten. Auch trifft es wohl ein interessantes Merkmal, aber offenbar nicht den Kern der Sache.

Was ist also eine Vier, abgesehen von der schriftlichen Darstellung? Hier hilft uns zunächst der Gedanke weiter, daß alles Schriftliche ein Symbol ist für etwas anderes, für die Sprache, ein räumliches Zeichen für das gesprochene, unräumliche Wort. Demnach ist 4 eine Spracherscheinung, ein Wort, und die Zahlen sind im allgemeinen Wörter, z. B. Hund, siebenzig, tausend u. d. Mit dieser Erkenntnis hat man schon einen bedeutenden Schritt vorwärts getan. Denn wenn man die Zahlen nur als Wörter aufzufassen gelernt hat, so sind sie eben etwas anderes als die Dinge selbst.

¹⁾ Ding in dem ganz allgemeinen Sinne von einer naturwissenschaftlich feststellbaren Tatsache gemeint im Gegensatz zu Eigenschaften usw.

Von ist bei der Nachprüfung wieder zweiermal zu bemerken: Auch alle anderen „Dinge“ erscheinen in der Form von Wörtern, und mit der Erklärung „Zahlen sind Zahlwörter“ stehen wir gewissermaßen wieder am Anfange unserer Untersuchung. Und dennoch haben wir schon zwei wichtige Ergebnisse gewonnen, nämlich: Die Ziffer ist nicht die Zahl, d. h. ist nicht gleichbedeutend mit Zahl; das Zahlwort aber ist ebensowenig die Zahl, will sagen: erst hinter Ziffer und Zahlwort steht etwas, das wir eigentlich erst als Zahl bezeichnen dürfen.

Ein weiteres Prüfen dieser Ergebnisse an der Wirklichkeit zeigt ihre Richtigkeit: Die Zahl 4 bleibt die Zahl 4, ob ich sie mit dieser Ziffer oder mit der römischen Ziffer IV, oder versigraphisch oder in Buchstaben, oder ob ich sie überhaupt nicht schreibe; ob ich sie in deutscher oder lateinischer oder in irgend einer anderen Sprache ausspreche: Ziffer und Wort haben mit der Zahl an sich eigentlich wenig zu tun.

Dadurch sind wir aber in der Lage, die Frage genauer zu stellen: Was ist die Zahl, abgesehen von Ziffer und Zahlwort? Hier gibt es zunächst keine Möglichkeit des Fortschreitens. Fassen wir darum wieder den einzelnen Fall ins Auge: Was meinen wir, wenn wir „vier“ sagen, oder was meinten die Römer, wenn sie „quattuor“ sagten? Sie meinten 4 Stämme oder 4 Häuser oder 4 Goldstücke oder 4 Tage; aber man weiß nicht diese Dinge mit dem Worte vier; sollte das beabsichtigt sein, so würde man eben dem Worte vier die Namen dieser Dinge hinzufügen. Man meint etwas, was — wir wollen zunächst einmal diesen Ausdruck unerschüttert: was an den Dingen ist, an den Dingen sein kann. Dies Ergebnis halten wir fest mit dem ganz bestimmten Bewußtsein nur der Annähernden, nicht der vollen Richtigkeit.

Wenn wir nun weiter überlegen, was sonst noch an den Dingen sein kann, so ist es zunächst klar, daß wir unsere Aufmerksamkeit bei jenen Dingen nicht auf Stämme, Äste und Blätter, bei den Häusern nicht auf Fenster, Türen und Schornsteine, bei Goldstücken nicht auf Vorder- und Rückseite richten dürfen. Denn alles dies sind Teile von Dingen und insofern wieder selbst Dinge. Wir können uns ein Blatt oder ein Fenster vorstellen ohne das Baum und das Haus.

Aber wir bemerken, daß die Stämme grün und hoch sind und eng beieinander stehen, und daß die Häuser weiß oder gelblich aussehen, daß das Glas glatt und das Eisen kalt ist: wir gelangen von den Dingen zu den Eigenschaften, die wir damals vorstellen können ohne ein Ding. Dann folgen wir dem die weitere Beobachtung hinzu, daß die Blätter gelb werden und die Häuser grün und das Eisen gelegentlich auch heiß, daß also einzelne

dieser Eigenschaften wechselt. Damit gewinnen wir den Gedanken der zeitlichen Begrenztheit, der vorübergehenden Eigenschaft, des Zustandes; sodann — zumal wenn wir die Veränderung des Ortes hinzunehmen — den Gedanken der Erscheinung, endlich auch den der räumlichen Begrenztheit der Dinge.

Wir vergleichen nun die Zahlen mit alledem. Wir vergegenwärtigen uns das Rot der Möbklitze, die Rundung ihrer Hüftklüfter — dazwischen deren Viereck — dann die Erscheinungen des Abfalls, den Zustand, daß sie wächst oder daß sie vom Winde geschaukelt wird. Wir stellen uns vor den Klang der Trompete, ihre Länge, ihren erregenden Ton, ihr Stehen im Kasten, ihre Behandlung beim Gebrauch. Wir richten unsere Aufmerksamkeit auf das Aussehen des Federhalters, mit dem wir schreiben, auf sein Alter, seine Dienste, seine Form, sein Gewicht — und zwar all das mit dem Bewußtsein der Frage: Finden wir in all diesen Beispielen etwas Ähnliches, wie die Zahl es ist? Und wir fühlen die Antwort, daß Erscheinungen und Zustände mit den Zahlen eine gewisse Ähnlichkeit zu haben scheinen, daß aber zwischen Eigenschaften und Zahlen eine stärkere Ähnlichkeit besteht. Ja, es gelangt uns sogar, die Stellen der größten Ähnlichkeit zu entdecken. Es sind ihrer zwei.

Indem wir bemerken, daß nicht alle Dinge rot oder gelb oder blau aussehen, werden wir uns dessen bewußt, daß alle Dinge eine Farbe haben; und daß es mit der Form oder der Schwere der Dinge ebenso ist. Auch die Zahlen erscheinen nur an den Dingen, in unendlichem Wechsel, aber in einer gewissen Anzahl erscheinen alle Dinge. Keins ohne die Zahl, wie keins ohne die Farbe, Form usw. wie kann. So stehen die Zahlen den allgemeinen Eigenschaften der Dinge sehr nahe. Und dann das andere: Daß der Stängel lang oder kurz ist, die Hüftklüfter dünn, das Schallrohr sehr gerade, sehr gebogen, der Ton ausgehalten, der Federhalter alt — auch diese Angaben scheinen den Zahlen viel näher zu stehen, als dies bei irgendeiner Farbe oder dem Geruch eines Dinges der Fall ist. Sie sagen gewissermaßen von dem Dinge etwas aus, was sich auch mit Zahlen ausdrücken läßt. Es sind die Eigenschaften der Ausdehnung und damit zusammenhängend die der räumlichen und zeitlichen Begrenztheit.

Damit sind wir zu folgendem Ergebnis gelangt: Wir unterscheiden die Zahlen von den Dingen, an denen allein sie freilich in der Wirklichkeit vorkommen. Wir unterscheiden sie von Erscheinungen, von den Zuständen und Eigenschaften der Dinge, können sie aber ganz in die Nähe gewisser Eigenschaften stellen, nämlich einerseits der allgemeinen, anderseits der der Ausdehnung.

Hier stehen wir wieder an einem Wendepunkte der Unter-

rechnung. Um vorwärts zu kommen, wollen wir uns der Tatsache erinnern, daß unser gesamtes geistiges Leben seinen Ausdruck findet in der Sprache. Sie prägt für die Dinge Hauptwörter, die die Erscheinungen Zeitwörter, für die mehr dauernden Merkmale Eigenschaftswörter⁷⁾. Hier erscheinen nun auch die Zahlwörter. Dazwischen noch Fürwörter, Geschlechtswörter, Umstandswörter, Verhältniswörter und Bindewörter, von den Äußerlichkeiten abgesehen. Da für sich allein doch nur Dinge (im weitesten Sinne) vorgestellt werden können, Erscheinungen und Merkmale aber — wie auch die Zahlen — nur an ihnen, so schließen sich auch die übrigen Wortarten an die Dinge selbst angeschlossen lassen oder an etwas ihnen schon Angehörtem. Die meisten Fürwörter treten eher weitem an den Dingen als ihre Stellvertreter. Hinweisende Fürwörter und bestimmte Geschlechtswörter können den Eigenschaftswörtern zugehört werden; sie bezeichnen das Merkmal der Hervorhebung⁸⁾. Umstandswörter passen als Merkmale der Erscheinungen zu den Zeitwörtern. So bleiben außer den Zahlwörtern noch Verhältniswörter und Bindewörter übrig. Diese gemeinam ist, daß sie nie etwas von einem Dinge aussagen; sie fordern immer, daß zwei Dinge zusammen zu denken sind, und sie drücken das verschiedenartige Verhalten dieser beiden Dinge zueinander aus, ihre Beziehung⁹⁾.

Man wird nicht leugnen können, daß die Zahlen auch mit dieser Beziehungsbegriffen eine gewisse Ähnlichkeit haben. Man könnte es als eine Art von Beziehung auffassen, die ich ausdrücke, wenn ich sage: Auf meinem Schreibtische stehen zwei Tintengläser. Würde ich nur das eine sehen, so würde ich mich nach dem andern umblicken. Und selbst die Bezeichnungen eine Uhr, eine Palme würden andeuten, daß eben eine solche Beziehung wie zwischen den beiden Tintengläsern in diesen Fällen nicht besteht. Während andererseits durch „vier“ Stühle die Gedächtnis ihres Auftretens, eine gegenseitige Beziehung zueinander, kundgegeben wird. Aber die Zahlen um dieser Ähnlichkeit willen zu den Beziehungsbegriffen zu rechnen — wie es tatsächlich von manchen Autoren geschieht

⁷⁾ Selbstverständlich wollen diese Einteilung nur Andeutungen sein.

⁸⁾ Bei den Geschlechtswörtern entspricht in der ursprünglichen Bedeutung bereits auch die Bekräftigung.

⁹⁾ Solche Beziehungen sind Artlicher Natur: Mann, weibl., bei, neben, wo . . . zeitlicher Natur: nach, mit, während; ab, sobald . . . und räumlicher Natur, die sich gliedern in Beziehungen des Grades aus, wegen, kraft, daß, weil . . . des Mittels: mit, mittels, durch; indem, wie . . . des Zweckes: für, um, halben, daß, durch . . . der Folge: solange, solange, sobald, dann, als, wenn . . . der vereinigten Erwartung: dann, weder, noch, unabhängig, trotz; aber, dennoch, jedoch, allein, indessen . . . der Beschränkung: gegen, ungegen, wider, dagegen, entgegenüber . . . der Einschränkung: nur, allein . . . der Bedingung: wenn, ob . . .

ist — gibt nicht an. Denn die Verschiedenheit zwischen beiden Begriffsklassen ist doch größer als die Ähnlichkeit. Dabei trägt die Menge der so verschiedenartigen Beziehungsbegriffe doch einen durchaus einheitlichen Charakter. Endlich verbindet die Ähnlichkeit der Zahlbegriffe mit gewissen Eigenschaftsbegriffen eine Unterscheidung unter die Beziehungsbegriffe. Denn diese beiden Begriffsklassen sind durchaus voneinander.

Hiernach ordnen sich die Zahlen in folgender Weise ein: Dingbegriffe, Zustandbegriffe, Eigenschaftsbegriffe, Zahlbegriffe und Beziehungsbegriffe. In dieser Reihe bilden sie eine Begriffswelt eigener Art, die Begriffe des Reinen.

Nach dieser Selbstständigkeitserklärung können wir die Beziehungen der Zahlen mit den übrigen Begriffsklassen noch enger knüpfen. Daß die Zahlen nur an Dingen und Erscheinungen vorkommen können, nicht für sich allein, enthält May eine neue Beleuchtung. Aber sie treten eben auch an ihnen nur in Erscheinung dort, wo inwendig der Begriff des Maßen — der Anzahl, der ständlichen oder zeitlichen Ausdehnung — in Betracht kommt, also z. B. nicht bei den reinen Abstrakta — sechs Gerechtigkeiten gibt es nicht! — wohl aber z. B. zwei verschiedene Höhen, die vier Lebensalter auf. Die Ähnlichkeit der Maßbegriffe mit den Eigenschaftsbegriffen wurde schon gezeigt. Hingewiesen sei noch auf die bekannten Beziehungen Qualität und Quantität, die viel weniger einen Gegensatz, als vielmehr eine enge Verwandtschaft andeuten, nämlich beides Deckbegriffe der Dingbestimmung. Hingewiesen sei ferner auf die Kennzeichnung unserer Sinnesempfindungen und Gefühle nach Qualität und Intensität, wobei jener Ausdruck sich auf das Aderartige, Dieser auf das verschiedene Ausmaß an sich gleichartiger psychischer Vorgänge bezieht. Sofern kann man die Geometrie als Mittelgebiet zwischen Eigenschafts- und Maßbegriffen bezeichnen: ihre elementaren Elementarbegriffe (geradlinig, kreisförmig, parabolisch usw.) gehören ins Gebiet der Eigenschaften, sie sind aber — wie schon „parabolisch“ zeigt — ganz und gar von Maßbegriffen durchtränkt, jedenfalls in ihrer weiteren Entwicklung. Das Verhältnis der Zahlen zu den Eigenschaften spiegelt sich auch in der Sprache wieder, indem sie die Zahlwörter ganz ähnlich den Eigenschaftswörtern bildet und behandelt. Endlich kommt das Bewußtsein des Wertes der Dinge, der schon in der Steigerung der Eigenschaftswörter angedeutet ist, in den Zahlen zu einer gewissermaßen eigenen Ausdruckswelt.

Es ist einleuchtend, daß keine von beiden — Eigenschaftsbegriffe wie Zahlbegriffe — für die Erkenntnis der wirklichen Welt ausreicht werden kann, ja, daß nicht einmal das eine kleiner das andere zurückgestellt werden darf.

Auch die Verwandtschaft der Maßbegriffe und der Beziehungsbegriffe ist schon berührt worden. Hier sei noch hingewiesen darauf, daß die Begriffe immer abstrakter wird, d. h. der Abstand zwischen der Vorstellung, die in unserem Bewußtsein den betreffenden Begriff vertritt, und diesem Begriffe selbst wird immer größer¹⁾.

§ 7. Die Entwicklung der Sachbegriffe.

Ehe wir in der Betrachtung des Rechenstoffes fortfahren können, wird es nötig sein, uns die Entwicklung der ersten Zahlbegriffe zu vergegenwärtigen. Um aber dem Erzieher die Möglichkeit nicht nur der Gedanken, sondern auch der erfahrungsgemäßen Nachprüfung zu geben, erscheint es zweckmäßig, zunächst kurz die Entwicklung der übrigen Begriffsarten, hauptsächlich die der Sachbegriffe darzulegen. Die Feststellungen, die hier gemacht werden können, dürfen als willkommene Arbeitshypothese unseren Beobachtungen auf dem Gebiete der Zahlenlehre nur Hedecklich sein.

Etwa wenige Monate alten Kinde erscheint ein dahinlaufendes Rind als etwas Dunkles, das sich dahin bewegt, wobei die Bewegungen der Unterseite heftiger sind als die Gesamtbewegung. Es wird keinem Gebildeten schwer fallen, sich dies vorzustellen. Man braucht nur an den Fall zu denken, daß man ein ähnliches Erlebnis bei Nebel begegnete²⁾.

Diese Vorstellung des auf Boden sich bewegenden Etwas — im Gegensatz beispielsweise zum rollenden Ball — wird nun vom Kinde wiederholt erlebt und mit jedem neuen Erfahrene eine Wichtigkeit klarer. Dann geschieht es wohl, daß die Mutter gleichzeitig das Wort *Wurra* ausspricht. Auch dies wiederholt sich, und es bildet sich in dem kindlichen Geiste eine Association zwischen jenem visuellen [mit dem Auge aufgenommenen] Vorstellungsg-

¹⁾ Man vergleiche daraufhin die Vorstellung Rind mit dem Eingetaucht Rind, die Vorstellung Sprung mit dem Zusammensprung Sprung — die Vorstellung steigt fällt, einen Reichen oder ein Tier; die Vorstellung niedrig mit dem Eigenschaftsbegriff niedrig — die Vorstellung steigt ein Mann, vom Rind; die Vorstellung hoch mit dem Maßbegriff hoch — Körner, Erbsen, Felsen, Wüste, Tausend Dinge und Vorstellungen; endlich stellen wir uns bei „der“ zwei Dinge, bei „wegen“ zwei Beziehungen vor, aber wir wissen auch, daß die Vorstellung dieser Dinge ähnlich — z. B. wenn wir sie miteinander — in dem anderen (den Beziehungen) durchaus nicht die von uns gewählten Beziehungsbegriff hervorgeht, wenn wir nicht eben sehr ungeschicklich zu Werke hervorgeht.

²⁾ Man möge es mir verzeihen, wenn ich dieses Beispiel etwas ausführlicher gestalten laße, als es im Hinblick auf viele meiner Leser nötig wäre. Ich sah unter einem kleinen auch jüngere Lehrer vor mir, und da hat mich die Erklärung gelehrt, daß es nicht überflüssig ist, ihnen eine Vorstellung mit ihren verschiedenen Arbeitsmethoden und Fehlerquellen vorzuführen.

³⁾ Wie können entsprechende Beispiele von schuld gewordenen Mädeln, die mit dem Experiment der Endbeobachtung ganz übereinstimmen.

bilde und dem Laufformplan Wauwau, welche die Psychologie mit Komplikation bezeichnet. Damit ist eine eigentlich der Begriff des Hundes beim Kinde entstanden. Er ist in unserem Sinne völlig falsch. Denn eine unwissenschaftliche Entscheidung, das Laufen, ist zum sachlichen Vorstellungsinhalt der Sach-Wort-Komplikation Wauwau geworden. Jenes unwissenschaftliche Merkmal war aber gefühlbetont und konnte darum zunächst die Bedeutung des alleinigen Sachinhalts gewinnen.

Nun ist es dem Kinde möglich, diesen Begriff in eigenartiger Weise zu übertragen — nicht auf den ruhenden Hund, sondern auf die laufende Katze, sogar auf das laufende Huhn; das letztere jedenfalls dann, wenn die Auffassung von der Vielzahl der Beine bei den bisherigen Erfahrungen mehr vorherrschend¹⁾. Dieses falsche Übertragen des Begriffs Wauwau auf andere Dinge erfolgt solange, bis bei einer oder der anderen dieser psychischen Erscheinungen ein anderes gefühlbetontes Merkmal aufsteht, welches nun ebenfalls das Vorstellungsbild für einen neuen Begriff bilden kann. So etwa beim Huhn das Flattern, bei der Katze das Klettern, bei Hund, Katze und Huhn die jedem dieser Tiere eigentümliche Stimme. Fortan erscheint das alte Merkmal zwar durchaus nicht beseitigt, aber doch mehr in den Hintergrund gedrängt, während das neue Merkmal des Begriffsinhalt vortritt. Je nach der in Betracht kommenden Erfahrung komplizieren sich beide Merkmale. Das neue behauptet sich nun immer solange, bis durch neue Erfahrungen neue Berücksichtigungen sich nötig machen. Meistens nun, die augenscheinlich nicht mehr der Berücksichtigung bedürfen — z. B. daß ein Haisch ein Geplümmer enthält, daß eine Glocke eine bestimmte Gestalt habe — erscheinen uns als wesentliche Merkmale, und unter den ihrer Gesamtheit entsprechenden Bezeichnungen denken wir Begriffe, von denen wir behaupten, daß sie logisch, d. h. an dieser Stelle, einwandfrei sind. Wir nehmen dabei an, daß — weil höher keine Erfahrung sie umgestaltet — sie auch künftig

¹⁾ Weitere Beispiele unserer Erfahrung sind folgende: Das Kind nennt jede gewöhnliche stehende Person Onkel, jede erwachsene weibliche Person nennt es die Tante. Im Alter von drei nicht von Jahren konnte sich noch nicht in einer Gertepersönlichkeit vom Vorgesetzten der Erwachsenen getrennt hat, der er leicht bezeichnend von sich gab: „Der (kleine) Wauwau hat weiße und schwarze Flecken.“ Bald hat er an den Wauwau lernen gelernt, die er täglich beobachtet bei Kanari. Ein anderer lernte er seine Erfahrungen an mit den Worten: „Als ich noch ein Mädchen war . . .“ In einem dieser Fälle stellt ein unwissenschaftliches Merkmal des Begriffsinhalt und bewirkt einen Schluß, der uns als ein Charakteristik der Begriffsprozesse erscheint, und der dem nicht psychologisch Gebildeten mit Interesse oder gewöhnlich vollkommen. Ein Charakteristik des Gedankens ist aber gerade ein Beweis dafür, daß es sich um einen — wenn auch irrtümlich zu weit geführten — Begriff, nicht um die Annahme einer Wortverbindung mit einer bestimmten Sachbezeichnung handelt, wie sie etwa in „Mama“ vorliegt.

sich behaupten werden, ja daß sie unangreifbar sind. Sie erschöpfen gewissermaßen die uns mögliche Erfahrung¹⁾.

Die weitere Entwicklung des Begriffs geht nun so vor sich, daß die Vorstellung, die wir bis dahin erlangt hatten, durch immer genauere Beobachtung zu immer größerer Klarheit und Zwecklichkeit gelangt, aber immer mit dem Bewußtsein dafür, daß gewisse Merkmale sich als dauernd erwiesen haben, während andere — deren Zahl fortwährend wächst — als zufällig anzureichen sind und die Unterarten des Begriffs darstellen. Mit der zunehmenden Klarheit der Vorstellung geht also eine zunehmende Gliederung des Begriffs parallel.

Lawiesen hat aber neben dieser aufwärts schreitenden Bewegung der Entwicklung eine regressive, eine rückwärtsgehende eingewirkt. Sie kommt erstens etwa an der Stelle, wo die Gesamtvorstellung ungefähr dem Begriffe entspricht, wo die Merkmale beider annähernd dieselben sind. Diese regressive Entwicklung läßt von ganz allmählich, ohne daß in den meisten Fällen aus dies vom Bewußtsein kommt, die sinnliche Vorstellung immer schwächer werden und schließlich und sehr gleichzeitig das Wort an ihre Stelle als Symbol für den Begriff. Dabei erkennen wir uns, daß wir früher das Wort (z. B. Hund) mit der Gesamtvorstellung assoziierten, während wir es jetzt auf die Gesamtheit jener als wesentlich betrachteten Merkmale beziehen. So kommt es, daß Gesamtvorstellung und Begriffswort immer weiter auseinander treten, und daß wir ein Zusammenrücken beider nur dadurch ermöglichen können, daß wir dem Begriffswort noch eine Anzahl unwesentlicher Merkmale anfügen, z. B. dieser schwarze Dachband, jener bernsteinfarbene Hühnerband uaf. Die größere oder geringere Entfernung zwischen Vorstellung und Begriffswort (dem allgemeinen) kommt uns vom Bewußtsein im Begriffsgefühl. Es ist der Ausdruck dafür, daß wir letztlich einer Gleichsetzung von Gesamtvorstellung und Begriffswort nicht mehr zustimmen können, während diese Gleichsetzung an jenem Wendepunkte noch als selbstverständlich und einzig möglich erschien. Bei entwickeltem Begriffsgefühl aber läßt — nämlich gesprochen — unsere Erinnerung mit außerordentlicher

¹⁾ Man kann die Vorstellung betrachten als ein psychisches Gebilde (sinnlicher Natur), dessen Eigenschaften durch sinnliche und sinnliche Beziehungen zu einem Ganzen verbunden sind. Diese sinnlichen und sinnlichen Beziehungen — z. B. die sinnliche Beziehung der Teile — bilden beim Begriff keine; bei ihm handelt es sich nur um logische Beziehungen; ob eine Merkmal wesentlich ist oder nicht. Von dem nicht wesentlichen nicht der Begriff grundsätzlich ab. Da nun unser Vorwissen zu Raum und Zeit gebunden ist — wir stellen uns einen Hund besser in bestimmten Größe und Färbung vor, andere ist es uns unmöglich; aber Größe und Färbung sind für den Begriff unwesentlich — so können wir den Begriff überhaupt nicht vorstellen, sondern wir können nur das System ihrer wesentlichen Merkmale nur denken, d. h. eine Abstraktion.

Geschwindigkeit und darum mit entsprechend geringem Energieaufwand an der ganzen Reihe der Gesamtvorstellungen hin, indem die mit dem Begriffswort assoziierten Merkmale aufgenommen (beim Worte Hund läuft sie an allen möglichen Hunden vorbeiliegend vorbei) und bewirkt dabei das Bewußtsein, daß keines dieser Vorstellungen für sich allein dem Sinne des Begriffswortes gerecht werden kann.

Unikwohl gibt es, wenn die Nützigung zum Vorstellen an uns herantritt, keine andere Möglichkeit, als eben eine beliebige Vorstellung herauszugreifen, z. B. einen bestimmten Hund vorzustellen. Diese Beschreibung ist es, welche die Psychologie in dem Satze ausdrückt, daß jedem Begriffsworte unsere Denkmass eine Reihe von sachlichen, dinglichen Stellvertretungsvorstellungen zugeordnet sind¹⁾.

Man könnte nun geneigt sein, die Sachvorstellung anzusehen als eine niedrigere Stufe der Entwicklung, an deren Stelle das abstrakte Denken steht (und sie demgemäß wesentlich geringer einzuschätzen als das rein begriffliche Denken). Tatsächlich werden solche Anschauungen vertreten von einem großen Teile derer, welche verbanntet worden sind. Solche Ansichten werden aber der Wirklichkeit nicht im mindesten gerecht.

Denn was hier als Entwicklung schlechthin angesehen wird, ist nur die regressive Linie der Entwicklung, welche zu immer größerer Annäherung der Vorstellung und gleichzeitig zu immer vollkommener Abstraktion führt. Die andere Linie, die progressive, die unabweislich schon früher einsetzt, bricht von an jener Kreuzungstelle, von der wir oben sprachen, nicht ab, sondern setzt sich fort zu immer größerer Klarheit und Deutlichkeit der Vorstellungen, zu immer vollkommenerer Konkretion.

Wohl ist anzugeben, daß die Entwicklung des Denkens, die Entwicklung der Erkenntnis und aller der Werte, welche sich an die „Wissenschaft“ angliedern, diesen Weg von der Vorstellung zum Begriffe geht. Aber gleichzeitig ist doch hervorzuheben, daß die „Erkenntnis“ nie und nimmer das einzige Ziel des Menschseins und der menschlichen Entwicklung sein kann, sondern daß ihr ein Gegenwert gegenübersteht, der gerade infolge seines vielseitig menschlichen Charakters, der eben des Abstrakten so wenig fähig ist, mit dem mannigfaltigsten Ausdrücken zu konkretischem verweht wird. So etwa, wenn man sagt, daß die Erkenntnis immer

¹⁾ Man kann auch das Wort selbst als Stellvertretungsvorstellung für den Begriff ansehen, und der Reizmoment des Gegenwertes nicht wegen des Bildes als Stellvertretungsvorstellung für den Begriff sehen. Darum werden wir geneigt, die Zahl vier zunächst als Ziffer 4, als Schriftbild, dann als Wort aufzufassen. Darum können wir, daß Kinder, die sich selbstbewußt eine Weile vorzeitig sollen, zur Schilderung ihrer Vorstellung veranlaßt, das Wort „Wider“ in die Luft blasen. Diese Handlung ist der Stellvertretungsvorstellung immer hier nicht in Betracht.

und immer wieder neue Kräfte suchen müsse aus dem Nährboden der Beobachtung (und der Intuition), daß das Denken zu ergreifen sei durch das Handeln, das Wissen durch das Handeln, die Wissenschaft durch die Kunst, alle Einwirkung auf die Bildung der Psyche durch Auswirkung dieser gebildeten Psyche, der Gedanke durch die Tat, die Erkenntnis durch die Liebe usw.

Für alle diese Gebiete aber, welche die noch außen verbliebene Richtung zeigen, hehrt sich das Wortverhältnis von Begriff und Vorstellung um: Während in den Gebieten der Erkenntnis die Gesamtvorstellung die grundlegende Bedeutung hat, und die Begriffe die der höchsten Entwicklungsform, haben in den Gebieten des Ausdrucks die Begriffe grundlegende Bedeutung, während die Gesamtvorstellung (in Konzeption wie Darstellung) die Höhe der Entwicklung vertritt.

Dann noch ein Beispiel. Zwei Personen können beide, vielleicht gar auf gleichem Wege, zu denselben vertroffenen Erkenntnis gelangt sein. Die eine gibt dieser Erkenntnis folgenden Ausdruck: „Buchweisheit taugt im Leben nichts; daraus vermeide ich das Buchstudium und halte mich an die Wirklichkeit.“ Man sieht sofort: So late die Erkenntnis ist, welche zu diesem Satze geführt hat, so unglücklich ist der Ausdruck. Er ist falsch und verstanden zugleich, und beiden hat die Person nicht beabsichtigt, als sie ihre Erkenntnis Ausdruck verlieh. Fragen wir nach den Ursachen, so erhalten wir die Antwort, daß es an den Begriffen Buchweisheit, Leben, Buchstudium, Wirklichkeit liegt. Sie werden nämlich von fast jedem mit einem anderen Inhalt erfüllt. Wie ganz andere, wenn man statt dieser allgemeinen Begriffe solche anwendet, die weniger allgemein sind: „Wenn man ein Buch liest und glaubt, dadurch das betreffende Gebiet beherrschen gelernt zu haben, so tut man sich; das Lesen eines Buches muß vielmehr ununterbrochen begleitet und ergänzt werden durch das Betrachten der Dinge selbst und die eigenständige Arbeit an ihnen.“ In dieser Form hat der Gedanke sowohl das Falsche als auch das Vorbedeute des ersten Ausdrucks abgetrennt. Aber noch erscheint er falsch, unklar, und ist wenig geeignet, die gemeinsame Erkenntnis zu vertreten. Anders, wenn Gesamtvorstellungen eingeführt werden, z. B. „Wenn ich nicht geladener Soldat gewesen bin und habe mir ein Buch über moderne Kriegführung, um als daraus lernen zu lernen, so bin ich auch nach heiligem Durchdenken noch nicht in der Lage, die Entschlüsse unserer Heerführer kritisch zu betrachten. Wollte ich mir diese Können aneignen, so könnte ich das nur dadurch, daß ich den theoretischen und praktischen Bildungsgang eines Offiziers verfolgte. Aber von der Art und Schwierigkeit der

Aufgabe ihres Berufs bekennen ich aus dem Nachstudium eine Abneigung, und mein Interesse wird lebhafter als früher auch des Einzelnen der Erregführung sich zuzuwenden.“ (Hier: „Wenn ich als Erzieher meine Ansichten über Rechenunterricht lediglich einem Buche entnehmen wollte, das diesen Gegenstand behandelt, so kann ich leicht zu einer einseitigen oder irrthümlichen Auffassung gelangen; darum wähle ich für mein Studium möglichst ein Buch aus, welches gestattet, die darin vorgetragenen Gedanken sogleich in der Praxis des Unterrichts nachzuprüfen.“

In welchem Sinne sagt Wundt: „Auch das abstrakte Denken hat in der Anschauung seine Quelle, und was in ihm von unmittelbarer Evidenz enthalten ist, das muß schließlich auf ein anschauliches Verhältnis zurückgeführt werden können.“ (Logik I, 2. A. S. 84.)

Nachdem so die Entwicklung der Zahlbegriffe vorgedehrt worden ist, genügt es, darauf hinzuweisen, daß bei den Zustands- und Qualitätsbegriffen die Entwicklung insofern noch einfacher sich gestaltet, als eben der Begriff von vorhanden aus einem einzigen (oder wenigen) wesentlichen Merkmale besteht, das zunächst unklar, mit zunehmender Schärfe der Sinnesorgane und mit zunehmender Wiederholung immer klarer und deutlicher aufgefaßt wird, d. h. in seiner Eigenart und seiner Abgrenzung von anderen ähnlichen Erscheinungen immer besser unterschieden wird; so rot, still, glatt, schwer, lauten, weinen, singen, fahren auf, Treten voran, so vorhanden, so die Entwicklung der Zahlbegriffe heran.

§ 8. Die Entwicklung der ersten Zahlbegriffe.

Vier- bis fünfjährige Kinder können leicht dahin gebracht werden, daß sie bis 10 und noch viel weiter zählen lernen, wenn Eltern, Geschwister, sonstige Verwandte oder Dienstboten die Einübung dieser Wortreihe in die Hand nehmen. Aber selbst wenn die Reihe fehlerlos und völlig sicher abläuft, so sind doch ihr entsprechende Zahlbegriffe in der Regel nicht damit vorhanden. Es dürfte höchstens seltene Fälle ganz besonderer Benützung sein, verbunden mit sehr günstigen äußeren Umständen, wenn ein Kind dieses Alters über die Zahlbegriffe des ersten Hundertens wirklich verfügt¹⁾. Dagegen sind nun wiederholt Fälle vorgekommen, daß sechsjährige Kinder beim Eintritt in die Schule weder eine Vorstellung von 4 Dingen noch erst recht keinen Zahlbegriff 4 hatten, obwohl das eine von ihnen auch noch in Hausnummer 4 wohnte

¹⁾ Dabei handelt es sich um einen Fall, daß die ältesten Eltern sich in solchen Feststellungen irren, weil sie nicht in ausreichendem Maße über die dort geltende psychologische und sprachliche Sachlage verfügen.

und dem auf Befragen auch angeben wollte. Ein hübsches Beispiel, das geeignet ist, auch dem Pädagogen Einblick zu verschaffen in die derzeitige Struktur der kindlichen Psyche, erzählt Otto Ernst: Ein kleiner Bube schaut zu, wie vor einem Kasten die Ziegelfabriken abgeladen wurden. Tausend megen wohl in dem Haufen sein; aber er kann sich noch viel, viel mehr denken, „vielleicht gar hundert“. Oder wenn unsere Kinder in der Schule oder im Hause das erste mal etwas von Millionen hören und ein besonders Interessierter wirft gar die Milliarde hinein, so möchte man staunen, wie dies alles, einschließlich Billionen, Trillionen und allen Tausendern lange Zeit durcheinander wirbelt, wenn man eben nicht wüßte, daß mit dem Zahlwort nie und nimmer der Zahlbegriff gegeben ist. Der muß erst erweckt werden, und er wird gewislich erweckt, nachdem das Zahlwort längst bekannt ist.

Diese Erlebung ist ganz allgemein. Neumann stimmt ihr völlig zu. Das Zählen kleiner Kinder ist „ein mechanisches Erinnern einer fest auscollierten Wortreihe, das nach einer jeden Verknüpfung für die Bedeutung der Zahlennamen stiftenden kann . . . Während sich bei einigen Kindern (bei Eintritt in die Schule) schon das Verknüpfte für die Zahlen 1 bis 4, bisweilen selbst von 1 bis 10 (und mehr) vorfindet, kommt die Mehrzahl nicht über die Kenntnisse von 3 oder 4 hinaus, bei einigen scheinen selbst diese Zahlen zu fehlen“. (Abriß der experimentellen Pädagogik, S. 376f.).

Der erste Zahlbegriff, den ein kleines Kind entwickelt, ist eine ganz unbestimmte Vorstellung einer Vielheit von Dingen. Aber durchaus nicht etwa so, daß diese Vielheit zugleich bei ihrem ersten Auftreten bewußt wurde, es muß vielmehr mit der Auffassung der Vielheit als solcher eine ganz besondere Gefühlshenkung verbunden sein. Als mein Sohn fast zwei Jahre alt war, legten wir ihm eine Anzahl Reihchen aus dem Christollen auf dem Tisch. Er war darüber so glücklich, daß er auf dem Sofa heftige Sprünge vollführte und vielfach die Worte wiederholte: „Ganze Reihe, Haufen, Masse!“ Es war dies offenbar nicht der Anfang der Entwicklung von Zahlbegriffen. Denn indem schon ein einziger solcher Ausdruck an Gegenständen sinnlicher Auffassung (eine Reihe Soldaten, eine Reihe Backsteine uel.) geknüpft wird, ist ohne Zweifel schon der erste Zahlbegriff entstanden. Daß eine Mehrheit von solchen Ausdrücken — Reihe, Haufen, Masse — hier sinngemäß angewandt wurde, zeigte, daß die Entwicklung der Zahlbegriffe ihren Anfang schon wesentlich früher genommen hatte. — Daß nun der Begriff „viel“ — gleichbedeutend mit den genannten Ausdrücken und solchen wie

*) Ebdell in Vorlesungen, III, S. 639 ff.

des Menge — auf jede beliebige Mehrheit angewendet wird und daher Zeit der einzige Zahlbegriff bleibt, über den das Kind verfügt, das werden alle diejenigen Eltern bemerken, die daraufhin ihr Kind aufmerksam beobachten.

Kurze Zeit später entwickelt sich ein zweiter Zahlbegriff, das „wenig“, selten freilich gleich in dieser Form, sondern meist in der anderen: nicht viel. Diese Entwicklung erfolgt ganz und gar aus der kindlichen Interessenosphäre heraus und weist, — wie schon der anfängliche kindliche Ausdruck zeigt — im Gegensatz zum ersten Zahlbegriffe. „Nun ist es genug, du hast viel Bismarck bekommen!“ „Nein, ein viel!“

Selbstverständlich ist die Entwicklung dieser beiden Zahlbegriffe nicht so zu verstehen, als wüchse das alles allein von innen heraus, ohne äußere Anregung. Vielmehr ist es die Umgebung des Kindes, welche es und so oft die Zahlbegriffe viel und wenig auf die Dinge der kindlichen Interessenosphäre anwendet, vor allem auf Schwamm und Spielzeug, aber auch auf Lieber, Soldaten und anderes Aufkluge und Gefühlsbetonte. Dabei ist zu beachten, daß von dieser Umgebung gleichzeitig auch bestimmte Zahlbegriffe angewendet werden könnten neben den beiden genannten unbestimmten. Aber für die bestimmten würde das Kind dieser Stufe nicht das geringste Verständnis entwickeln: 4 Dinge kann es nicht von 8 gleichartigen Dingen unterscheiden, nur viel von wenig, und auch hier zunächst nur im gefühlsbetonten Gegensatz.

Als dritter Zahlbegriff erscheint wieder etwas später das „mehr“, während die nächsten: wenige, zuviel, sowenig — gemeinhin erst in größerem Abstände folgen.

Veruchen wir, uns die wesentlichen Merkmale dieser ersten Entwicklungsstufe der Zahlbegriffe klar zu machen, so gelangen wir zu folgenden Ergebnissen:

1. Es ist die Stufe des reinen Vergleiches, dem es gar nicht auf feine Unterschiede ankommt, der nur grobe Unterschiede (ein paar, ein Haufen) in starker Gefühlsbetonung als mehr oder weniger angesehen erfüllt.

2. Eigenartig ist, daß auf dieser Stufe die Einheit (1) als Zahlbegriff noch gar nicht zum Bewußtsein kommt. Das Kind bemerkt wohl einen Wurm, ein Huhn, aber nicht im Sinne der Betonung der bestimmten Anzahl, sondern mehr im Sinne unserer unbestimmten Größlichkeitsworten, oder im Sinne eines befehlungslosen Einschalwortes, das es zunächst einfach dem Erwachsenen nachspricht. Die gesonderte Auffassung der einzelnen Dinge innerhalb einer Mehrzahl ist auf dieser ersten Stufe der Entwicklung noch nicht vorhanden.

3. Dann kommt, daß die gewonnenen Begriffswörter an die

engste Interessensphäre des Kindes gebunden sind. So kennt es viel Bienen, viel Lächler, viel „Teier“ (Kornel), viel Falst (Hölzer), viel Kollern (Mäuse), aber es wendet das „viel“ nach nicht an auf Nicker, Töpfe, Klauen, Äpfel usw., obgleich ihm diese Dinge nicht unbekannt sind und nach Forderung der Angehörigen gerade durch die Menge ihres Vorhandenseins wirken sollten. Es wendet eben seine Zahlbegriffe noch nicht allgemein an, sie haften ihm noch an den Dingen, wo tatsächlich die Vielheit zum gefühlbetonten Erlebnis ihm geworden ist. Seine Zahlbegriffe sind daher auch noch keine Abstraktionen, wie das bei unsern Zahlbegriffen der Fall ist. Sie sind ihm vielmehr lediglich Merkmalsteile der an interessierenden Dinge, die Vertrauensverstellung wird noch vollkommen mit dem Begriffe identifiziert.

Auf Grund solcher Beobachtungen und der übrigen Feststellungen der psychologischen Wissenschaft sind wir nun in der Lage, uns ein noch weiter ausbreitendes Bild von der Entstehung der Zahlbegriffe zu machen, um es immer tiefer in ihr Wesen eindringen, ihr Wachstum fördern zu können.

Dies Bild läßt sich etwa so darstellen. Jedes seelische Erlebnis läßt nach dem Grade seiner Gefühlbetontheit mehr oder weniger starke Spuren zurück.

Teils nun ein ethisches Erlebnis an das Kind heran, so gelangt es in der Spur des ihm entsprechenden ersten zu genauerer Auffassung. Gleichzeitig stellt sich ein kleines Bewußtsein der Tatsache ein, daß dem seelischen Erlebnis schon da war. Das Kind erlebt ein Bekenntnisgefühl.

Gehen wir von unserer eigenen Erfahrung aus. Wenn wir auf der Straße das Charaktergesicht eines sternen weißtätigen Herrn sehen, und wir begegnen ihm acht Tage darauf wieder, so erleben wir dies Bekenntnisgefühl. Es ist die Gefühlbegleitung einer dunkleren Vorstellung, der Tatsache nämlich, daß reproduktive Elemente gleichsam der neuen Wahrnehmung entgegenkommen. Wir haben dabei das Unterbewußtsein¹⁾, daß dem neuen seelischen Vorgange eine Bahn bereitet ist, daß ihm keine Hemmungen begegnen,

¹⁾ Wir verstehen die Begriffe Bewußtsein, Bewußtheit und Unterbewußtsein in folgender Weise: Bewußtsein als Gesamtheit der von gegenwärtigen psychischen Vorgängen, Bewußtheit als einem psychischen Vorgange, dessen Bewußtsein während im Bewußt seinem Wesen liegt. Ich kann die 3. Person von dem mich anreichend, ich kann schwimmen, ich kann die Bewegung, die Glöckchen, ich weiß auf andere wichtige Fragen der Physik und Chemie Antwort zu geben, ich kann Schachern spielen, die Freunde, viele Menschen und andere Personen usw. Unterbewußtsein als psychische Vorgänge, die sich nur dem Blick des psychischen psychologischen Bewusstseins offenbaren. Man könnte die drei Formen auch so gliedern: volles Bewußtsein mit dem Gehalt der Tätigkeit, aufgedecktes Bewußtsein mit dem Gehalt der Tätigkeit, gewisses Bewußtsein mit dem Gehalt der Tätigkeit der jeweils abstrakten Vorstellung.

wie auch andere Vorgänge, daß eine gewisse Leichtigkeit der Auffassung in diesem Falle besteht.

Ähnlich sieht das kleine Kind, das zum ersten und zum zweiten Male dem besonnenen Christknecht sieht. Sein Verhalten ist im letzteren Falle nicht wesentlich verändert: die Thermierung des ersten Males hat sich schon beträchtlich gelöst, der Fremdenangst tritt früher ein. Aber auch jedes andere garantierte ansehnliche Erlebnis, das wiederkehrt, entfaltet die angegebenen Wirkungen, und zwar beim Kinde wie auch beim Erwachsenen. Wir sehen eine Querschnittsreihe des ersten und des zweitenmal; wir hören einen Autorschnittsbraten des ersten, des zweitenmal; wir sehen ein Stück Kreide und am folgenden Tage nochmals nur. Die große Menge dieser psychischen Vorgänge gliedert die psychologische Wissenschaft je nach der besonderen Struktur des Einzelnen in Assimilationen, Wiedererlebungen und Erkennungsprozesse. Sie macht auch darauf aufmerksam, daß bei sehr häufiger Wiederholung — z. B. beim Anblick der Gebrauchsgegenstände des täglichen Lebens — das Bekanntheitsgefühl immer schwächer wird und ganz verschwindet, eine Erscheinung, die sich auch auf anderen Gebieten zeigt.

Der Blick auf diese Abschwächung des Bekanntheitsgefühls lenkt unser Augenmerk auch auf die entgegengesetzte Erscheinung eines allmählichen Wachstums. Wir begegnen auf unserem Schulwege einer Anzahl fremder Leute, die ihrer Berufsarbeit anstehen. Keinen von diesen würden wir beim zweiten Anblick kennen, beim hundertsten Male aber kennen wir ihrer eine ganze Reihe. In sehr vielen Fällen tritt eben das Bekanntheitsgefühl nicht plötzlich und stark auf, sondern so klein und schwach, daß es unter der Menge der übrigen Eindrücke völlig verschwindet. Es entwickelt sich langsam infolge der Wiederholung und gewinnt allmählich an Stärke, bis es gelegentlich ins reine Bewußtsein kommt. So spielt sich der Vorgang überall dort ab, wo die Gefühlsbetonung der einzelnen Eindrücke sehr schwach ist. Beide Entwicklungsrichtungen vereinigen sich meist in dem Sinne, daß das Bekanntheitsgefühl erst infolge der Wiederholung bis zu einem an sich geringen Höchstwert steigt und dann wieder abnimmt.

Die Stärke des ersten Bekanntheitsgefühls, welches also die erste Wiederkehr des betreffenden psychischen Erlebnisses begleitet, hängt ab von zwei Faktoren, einem Hindernis und einem Beschleuniger. Immer besteht in der Gefühlsbetontheit des ersten Erlebnisses: Wir begegnen einer Schaar Kinder, die aus der Schule kommt. Zwei unter ihnen fallen uns auf durch ihre ausgezeichnete Heiterkeit. Wenn wir zehn Tage später denselben Kindern begegnen, so kennen wir die beiden noch, die übrigen aber nicht. — Als

bestimmender Faktor aber kommt in Betracht die Länge des Zwischenraums und die Art und der Grad ihrer Auffüllung: Eine längere Zwischenzeit kann aus der Wiedererkennung ganz unmöglich machen, die Spur ist völlig verblasst, ein Bekanntheitsgefühl tritt nicht ein. Derselbe Wirkung auf die Spur hat es, wenn die Zwischenzeit mit vielen ähnlichen Erscheinungen angefüllt war, entgegen-gesetzte erhalten sie; und starke Auffüllung verwischt mehr als geringe.

Am stärksten ist daher dann das Bekanntheitsgefühl, wenn ein gefühlbetontes Erlebnis unmittelbar nach seinem ersten Auftreten wiederkehrt, allgemeinere: wenn gefühlbetonte gleichartige Erscheinungen unmittelbar aufeinander folgen.

Durch das enge Beschreibtereis gleichzeitiger Eindrücke bekommt das Bekanntheitsgefühl aber auch noch eine qualitative Färbung: Es ist etwas anderes, ob es in uns verhältnismäßig langsam aufsteigt, oder ob es begleitet ist von dem Unterbewußtsein, daß inzwischen eigentlich keine anderen psychischen Vorgänge erlebt wurden. So etwa, wenn wir eine schöne Libelle sehen, die unsere Blicke anzieht und gleich darauf wieder verschwindet¹⁾. Dieses seinem Wesen nach etwas veränderte Bekanntheitsgefühl sondert sich nun auch noch deutlich in zwei verschiedene Formen, je nach den in Betracht kommenden Begleiterscheinungen. Sie veranschaulicht folgendes Beispiel. Ein Redner habe uns während eines Vortrags ein bestimmtes Lichtbild gezeigt. Er verfaßt den Schluss und hebt darauf die Klappe des Apparats wieder, und es erscheint — dasselbe Bild. Dann tritt (ganz abgesehen von irgendwelchen Gefühlen erfüllter oder unerfüllter Erwartung) das Bekanntheitsgefühl auf. Ganz anders freilich, wenn er das Bild aus dem Projektionsapparat herausnehmen und ein neues, ein anderes einschalten läßt. Wenn auch jetzt wieder das vorher gesehene Bild erscheint, dann ist zwar auch wieder das Bekanntheitsgefühl da, aber in ganz anderer Ausprägung. In jenem ersten Falle hatte sich zu dem Bekanntheitsgefühl ein Identitätswußtsein gesellt²⁾, in diesem das Bewußtsein des Wechselns des Reizobjekts.

Das heißt also: bei unmittelbarer Aufeinanderfolge gleichartiger psychischer Erlebnisse gewinnt eine der beiden intellektuellen Komponenten besonderes Gewicht, die der Identität oder die des Wechselns. Jenes Libellenbeispiel würde zu dem ersten Falle passen, wenn wir glaubten, es sei beim zweiten Erscheinen dasselbe ge-

¹⁾ In diesem Falle ist der erste Vorgang gewissermaßen auch in Hinblick des Bewußtseins, wie auch in seinem ähnlichen Falle, während der zweite bereits in das Unbewußte sinkt.

²⁾ Dabei haben wir das Bewußtsein, daß die Wahrnehmung von außen eigentlich nur unterbrochen war, jetzt aber nur fortgesetzt wird.

wesen, die wir das erste mal sehen; es würde den zweiten Fall erklären, wenn wir dächten, jene erste hätte doch eine andere Richtung eingeschlagen, so daß diese also eine zweite, ihr genau gleiche sei. Beispiele für diese Form sind noch die folgenden: Wenn wir die Augen von dem einem Torne einer gotischen Kirche nach dem anderen ganz gleiches hinüberwenden, also der Veränderung der Richtung uns bewußt sind. Wenn ein Stück Goldsch auf unserem Teller lag, von dem wir wissen, daß wir es gegessen haben, und wir indes beim Hinblicken wieder ein gleiches dazul.

Bei zeitlichen Erscheinungen, wie Glockenschlägen, sind wir schon völlig davon gewohnt, daß der erste ein neues Reizobjekt darstellt, daß der erste nicht nochmals erscheinen kann. Aber bei räumlichen Erscheinungen ist es anders. Da unterscheiden wir durch aus das Bekanntheitsgefühl mit dem Identitätsbewußtsein von dem Bekanntheitsgefühl mit dem Reizwechselbewußtsein. Später überträgt sich beides auch dieses auf jenes. Nur gilt es dann nicht dem objektiven Reiz, sondern dem subjektiven Erlebnis.

Das Bekanntheitsgefühl mit dem Reizwechselbewußtsein ist nun die Grundlage für die Entstehung der Zahlbegriffe.

Zur weiteren Klärung dieser Sachlage müssen wir den Blick noch richten auf zwei appetitive Tätigkeiten, die dabei in Betracht kommen, das Vergleichen und das Zusammenwählen.

Das Vergleichen besteht im Feststellen der Übereinstimmung und der Unterschiede. Es erfolgt zunächst ganz mechanisch-physiologisch. Es wird intuitiv gefühlt, und sein Ergebnis kommt im Bekanntheitsgefühl zum Ausdruck, wie das weiter oben dargelegt worden ist. In der frühen Kindheit kommt es in der größten Zahl der Fälle zu dem Ergebnis „gleich“. Die Linie dieser Entwicklung läuft aber beständig abwärts, weil wir mit fortschreitender Wahrnehmung und Beobachtungsfähigkeit immer mehr zunächst größere, dann immer feinere Unterschiede kennen lernen. Auf der Stufe des psychischen Lebens, die unserer höheren Betrachtung unterliegt, ist es nun noch sehr schwach ausgebildet — wir sprechen oben von der Stufe des hohen Vergleichen. Innerhalb muß es eine gewisse Stufe der Entwicklung schon erreicht haben, ehe die primitiven Zahlbegriffe gebildet werden. Diese Stufe wird dadurch gekennzeichnet, daß das Vergleichen sich geschildert hat in qualitativen und quantitativen, in urteilenden (im engeren Sinne) und messenden Vergleichen. Nun ist nämlich die Aufmerksamkeit in der Lage, sich einem besonderen Merkmalgebiete zuzuwenden und gleichzeitig von den übrigen mehr abzuheben. Wir besitzen uns hier auf folgende Ergebnisse. Ein Kind unterscheidet im zweiten Jahre getre Weizen — alter Weizen (alter im Sinne von besser, weil er es an-

gehört hatte), fette (schwarze) Putzet — weiße Putzet, große (große) Eibi (Puppe) — kleine Eibi, Weg — Häuserweg (Häuserchenweg, die schmale Fußpfad, der neben der Landstraße lief). Das urteilende Vergleichen konnte damit schon ablesen von Farbe, Größe, Gestalt usw., das messende von Farbe, Zweck, Beschaffenheit auf.¹⁾ Damit ist das Vergleichen auf einer Stufe der Ausbildung angelangt, wo die Aufmerksamkeit sich bereits zu konzentrieren gelernt hat auf das Merkmal der Ähnlichkeit. Nach unserer Erinnerung läuft die Entwicklung des Vergleichens übrigens ziemlich parallel dem allmählichen Erwachen des Bewußtseinsbewußtseins.²⁾

Der analytischen Tätigkeit des Vergleichens muß sich nun die synthetische Tätigkeit des Zusammenfassens angeschlossen, damit Zählbegriffe sich bilden können.

Was sich als unmöglich erweist — in unserer Auffassung natürlich, die ja lesen kann — lassen wir nicht zusammen, sondern nur, was wir als gleich verkennen. So ist das Kind viel mehr dem Zusammenfassen genügt als der Erwachsene. Es begegnet aber eher nur im Laufe der Jahre zu überwindenden Schwierigkeiten darin, daß sein Bewußtseinsanfang noch außerordentlich gering ist.³⁾ Darum ist die früheste Möglichkeit des Zusammenfassens nur bei unmittelbarer Aufeinanderfolge der Eindrücke gegeben. In dieser Weise umfaßt das kindliche Bewußtsein eine Anzahl Musiknoten, mit denen es spielt — im Buchstaben mögen noch mehr sein, sogar unmittelbar neben seinem Spielplatz; diese hat es „vergessen“, wenn es durch irgendeinen Umstand von ihnen abgelenkt wird. So umfaßt es die Reiter, über die sein Blick noch und noch gleitet; so die Lichter, wenn die Straßenlaternen angezündet werden: ein Licht!... ein Licht!... (das hat für das Kind keine Zählbedeutung!) viele Lichter! Dabei sind es vielleicht erst drei oder vier, aber auf die Zahl kommt

1) Daß von Farbe zunächst nicht abgelenkt wird, dürfte wohl besser so zu erklären sein, daß in jener Lebenszeit die Farbe als solche überhaupt noch nicht zum Bewußtsein kommt.

2) Hier ist eine Stelle, wo die Kinderforschung sehr reichlich ansetzen läßt.

3) Wäre man geneigt, die Annahme „es kann nicht zusammenfassen“ und „sein Bewußtseinsanfang ist gering“ auf nur andere Erscheinungen derselben Natur zurückzuführen, so würde die Erklärung lauten: die Intensität seiner Aufmerksamkeit ist noch so schwach, daß sie nur zur Beherrschung des im Vordergrund stehenden Eindrucks ausreicht, während die im hinteren Bereiche befindlichen kaum mehr als zufällige Wirkung wirken und nur so als beim Erwachen unterbewußt verbleiben. Ein selbigen Beispiel auf anderen Gebieten würden wir fast jede Woche, achtjährige Kinder — auch schwächer entwickelnde noch — sind nämlich noch nicht imstande, zwei selbstgeschriebene unmittelbar aufeinander folgende Worte in ihrer Hand zu behalten. Während sie dies werden können und anstreben, ist der erste Satz völlig vergessen. Man sieht das an dem Wiederholen derselben Wendung zweimal mit dem Kinderbucher. Wenn man ein solches Kind veranlaßt, seine Worte laut vorzulesen, gelingt es seinen unmittelbaren Eindrücken schon besser. Das führt uns dahin, daß das Kind sagt: Hier hängt nicht bloßlich, das hätte ich anders schreiben sollen.

es ja nicht an, sondern daß das Kind *intende* ist, die alle auf einmal aufzufassen. Dem Bewußtwerden verläuft — wie schon die Beispiele zeigen — zunächst in zeitlicher Aufeinanderfolge; diese verkümmert sich nun nach und nach so, daß das Erlebnis als ein augenblickliches erscheint, aus dem unbekannten Bewußtwerden ist ein einzelnes geworden⁷⁾. Auch die Forderung des Benachbarten fällt mit fortschreitender Entwicklung mehr und mehr weg, und es bleibt für das Zusammenfassen nur das Motiv der Gleichartigkeit übrig, und zwar in immer abstrakterer Ausprägung.

Diesem qualitativen Auswahlmotiv tritt nun ein quantitatives an die Seite. Wieviel auf einmal zusammenzufassen ist, das scheint — abgesehen von dem Umfang des Bewußtseins — in dem Vorhandensein der betreffenden Erscheinung gegeben zu sein, wie die Beispiele von den Bäumen und Lichtern es uns nahe legen. Das ist aber lange nicht in dem Grade der Fall, wie der Erwachsene es ansehen möchte, dessen Blick auch über die Grenzen des Gegebenen hinausgeht und die Tatsache der Begrenzung so gewissen Stellen und damit Anfang und Ende des Zusammenfassenden feststellt. Wollen wir die davon abweichende Auffassungswiese des Kindes verstehen, so kann dies leicht geschehen, wenn wir uns an eine ähnliche Erscheinung aus dem Leben des Erwachsenen erinnern: Wir können das Ticken der Wanduhr mit voller Aufmerksamkeit aufpassen, es kommt doch nicht eher zu einer Zahl, bis wir uns entschließen, aus dieser Reihe gewissermaßen ein Stück herauszuschneiden, es willkürlich abzugrenzen und es von Anfang bis zum Ende im Bewußtsein zu halten versuchen, beispielsweise, wenn wir beschließen, wieviel Schläge es hören sind, während wir um den Tisch herumgehen oder eine Tasse Tee ausgespart haben. Dem Kinde geht es aber auch noch mit räumlichen Eindrücken so. Selbst wenn es schon „zahlen“ gelernt hat, zählt es Fenster, Bäume, Früchte, Blumen und sonst etwas, indem es bei einem willkürlich gewählten Stück anfängt. In früherem Alter fällt diese willkürliche Begrenzung des Zusammenfassenden noch mehr in die Augen, indem es ausnehmend wählen zusammenfällt und die benachbarten Stücke liegen links, trotzdem sie seiner Auffassung nicht anhangen waren. So, wenn es z. B. zu dem freudigen Ausruf „viel Töne“ (Bausteine) gelangt, obwohl nur 5—10 vor ihm liegen und noch eine Anzahl kaum mehr als $\frac{1}{2}$ Meter davon, die es wohl sieht, aber nicht zählt. Gerade der psychische Vorgang der eigenmächtigen Begrenzung in den Fällen, da die Objekte nicht selbst schon isoliert

⁷⁾ Je häufiger bestimmte Vorstellungen sich wiederholt finden, um so rascher überlagert die Apperzeption dieselben, bis sie endlich in einem einheitlichen Vorstellungsbilde steht, was vorher in einer großen Zahl unbekannter Vorstellungen gewesen war.“ Wood, *Lehrl. I*, S. 98.

erscheinen, ist nun ein Fixpunkt dafür, daß in dem Zusammen-

Printed by

Navigation icons: back, forward, search, etc.

Page 67 of 100

umfang noch zu gering ist, das andere darin, daß symbolische Stellvertretungsverstellungen, wie sie uns in den Zahlwörtern (und später in der Ziffern) gegeben sind, noch nicht zur Verfügung stehen. Wohl war dies, wie die Kinder des Meisters des Rechenunterrichts seit langer Zeit schon bekannt, und durch unabhängige Übung von Zahlwort und Ziffer konnten sie es zu überwinden. Aber ihr Rechenvermgen war vergeblich, weil das erste jener beiden Hindernisse die groere Bedeutung hat und zuerst beseitigt werden muß. Hier aber laßt sich die Natur nichts abtrotzen, vor allem nicht von solchen, die ihre Gesetze nicht verstehend beachten.

Die heutige Pädagogik hat nun die Kenntnis der Naturgesetze, d. h. hier der Tatsachen der Kinderpsychologie, zu ihrer Richtschnur gemacht. Die dahin gehenden Untersuchungen zeigen, daß der Aufmerksamkeitsumfang des Erwachsenen schon bei sechs vorhandenen Elementen seine obere Grenze erreicht, während vornehmlichpflichtige Kinder nicht über vier hinauskommen. In diesem Raume — also bis nur vier — bewegen sich nun die ersten bestimmten Zahlvorstellungen¹⁾, die das Kind erwirbt; in diesem Raume auch die ersten Zahlwörter, die es sinnvoll anzuwenden lernt, im besonderen auch das Zahlwort eins.

Man hat häufig drber gestritten, ob die Gewinnung der Ordnungszahlen 2, 3, 4 usw. oder der Ordnungszahlen der 2, 3, 4. und vorausgeh. Man hat wohl darauf hingewiesen, daß unsere Kinder fast ohne Ausnahme diese Zahlwörter von Eltern oder älteren Geschwistern lernen; und daß die Belehrung — wenn sie überhaupt über das bloße Vorliegen der Zahlwörter hinauskommt — darin besteht, die Kleinen zu veranlassen, beim Aussprechen jedes einzelnen Zahlworts mit dem Finger auf einen Gegenstand einer vorhandenen Reihe zu tippen. Weil nun bei jedem Zahlworte nur auf einen Gegenstand gezeigt werde, lernen die Kinder nicht vier als Gesamtheit von vier Einheiten kennen, sondern als einen Gegenstand, dem drei andere vorangingen.

Wie glauben, daß man sich über diese Frage bersichtigen darf. Sie hat wenig theoretisches²⁾, gar keinen prktischen Wert. Es sind nur genug Kinder begabt, die im Alter von sechs Jahren wohl Zahlwörter, aber keine Zahlvorstellungen hatten. Aber Kinder, die mit den Zahlwörtern lediglich den Sinn der Ordnungszahlen

¹⁾ Vgl. hierzu die Ausführungen über Zahlvorstellung und Zahlgroe S. 112.

²⁾ Man könnte meinen, der Streit zwischen den verschiedenen Richtungen der Zahlen- und Arithmetik werde durch die wissenschaftliche Beantwortung dieser Frage entschieden. Das ist aber die letzte. Das Wesen dieser beiden Richtungen läßt in Gegensatz zu einander eigentlich erst auf dem Gebiete der Zahlvorstellungen von 5 bis 10, wo jene die erkennen, diese die unendliche Aufzählung annehmen. Im Ordnungszahlen handelt es sich bei keiner der beiden Richtungen. Vgl. dazu die späteren Ausführungen über dieses Gegenstand.

verbunden hätten, sind uns noch nicht vorgekommen. Das bedeutet natürlich nicht, daß dieser Fall nicht eintreten könnte — man kann ihn bei besonders intelligenten Eltern und schwachen oder wechnach gewöhnten Kindern wohl für möglich halten; es bedeutet aber, daß er sich in konkreter Zeit selbst ergiebt, berichtigt, verbessert, zumal bei rechter Behandlung, die oben auf das Zusammenfassen abzielt, und die später noch dargelegt werden soll.

Die natürliche Entwicklung führt nicht in erster Linie auf die Ordnungszahlen, sie geht einen andern Gang. Sie lehrt das Kind zwei Dinge kennen, etwa die zwei Pferdechen eines Knaben, die zwei Pappes eines Mädchens, noch ehe es daß das Zahlwort mit gehört wird. Aber der Eindruck muß gefühlbetont sein, und zwar nicht nur der Eindruck des einzelnen Dinges, sondern ihrer Anzahl. Wo das nicht der Fall ist, bleibt dieser abstrahierende Blick auf das Ansehn der Erscheinung noch aus. Darum werden in einem gewissen Stadium der Entwicklung von kleinen Kindern nicht unterschieden zwei Betten und drei Betten, zwei Fenster und drei Fenster, zwei Hosenstücke und drei, zwei Schlüssel, Pfennige usw. und drei. Und bei Reiten und dergleichen Dingen ist zwei wohl insoweit. Wenn aber die Erfahrung viele schon mehrfach gemacht worden ist, dann ist die Gefühlbetontheit von zwei wesentlich geringer; dann erscheint zwei dem Kinde so, wie wir von „ein paar“ sprechen, d. h. als wenige, nicht aber als eins und eins. Daraus geht hervor, daß auch diese ersten bestimmten Zahlbegriffe an gefühlstarke Vorstellungen gewachsen werden und zunächst gar nicht von ihnen losgelöst werden können.

Dann kommt noch ein anderes; der Vorgang ist ähnlich wie bei Gewöhnung der unbestimmten Zahlbegriffe: die latente Zahlvorstellung zwei, bezogen auf die beiden Pferdechen des Kindes, verharrt — mit oder ohne Zahlwort, darauf kommt es weniger an — in dieser Form so lange, bis eine eigenartige neue Erfahrung an das Kind herantritt, die des Kontrastes: Stoß ein Hottot! Stoß eine Pappes!... Im Kontrast zu zwei lernt das Kind die bestimmte Zahl eins, im Kontrast zu eins gewinnt wiederum zwei ganz erheblich an Klarheit.

Mit diesen Ausführungen soll nun freilich nicht der Satz vertreten werden, die Reihenfolge der Zahlbegriffe, die das Kind erwirbt, sei 2, 1, 3, 4. Das richtet sich vielmehr ganz nach den Verhältnissen, in denen das Kind aufwächst, besser: nach den gefühlbetonten Vorstellungen. Ein kleiner Knabe, der in der Zeit dieser Entwicklung mit dem Soldaten spielt, wird neben den unbestimmten Begriffen viel, wenig usw. zuerst den bestimmten Begriff der drei bilden. Zwei sind ihm zunächst nur wenig oder nicht viel, eins

nach; er macht dann und macht, bis er seine drei Soldaten hat. Von dieser Zahlvorstellung aus gewinnt er die anderen.

Es ist darum auch ein Irrtum, zu meinen, daß Kinder auf dieser Entwicklungsstufe zum Zählen veranlaßt würden, wenn man ihnen reiche Gelegenheiten dazu gäbe. Fast möchte man sagen, das Gegenteil sei richtig. Das Kind, das 20 Soldaten bekommt, stellt sie wohl auf, macht aber noch nicht, ob ihm an den 20 einer fehlt oder zwei⁷⁾. Es hat auch gar kein Interesse daran, das festzustellen, es hat ja „viele“. Will man die Entwicklung bestimmter Zahlvorstellungen fördern, so bleibt gar nichts übrig, als die Anzahl der für das Kind gefühlswerten Dinge auf vier oder gar auf zwei oder drei möglichst zu beschränken.

Höchstens beschränken wir zuerst die Stufe des reinen Vergleichs, die eine Anzahl unbestimmte Zahlbegriffe gewinnt, weiterhin jedoch einer selbständigen Entwicklung fähig ist. Aber das es dazu kommt, wird sie überlagert von einer zweiten Stufe, welche durch das Erwerben des Einwertes gekennzeichnet ist als Stufe des genaueren Vergleichs, wenn auch zunächst nur innerhalb des dem Kinde möglichen Aufmerksamkeitsumfangs. Gemeinsam ist beiden Stufen, daß die erworbenen Zahlbegriffe noch vollkommen an Sachvorstellungen geknüpft sind, welche für das Interesse des Kindes besondere Bedeutung haben.

§ 10. Die Erwerbung der Zahlbegriffe der Reihe.⁸⁾

Die folgende Stufe, die mittig allgemein erst in die Schuljahre fällt, umfaßt die Gewinnung der Zahlbegriffe von 5 an. Sie endet nicht mit 10 oder 12 oder 20, wie die kindliche Didaktik behauptet. Denn ob das Kind den Zahlbegriff 11 kennen lernt oder 12 oder 24, ist hinsichtlich der psychologischen Struktur dieser Erscheinung völlig gleich. Und wer Kinder beobachtet hat, der hat wohl auch jederzeit von ihnen gehört — wenigstens von denen der intelligenteren — die Frage abgelesen: Ich kann bis 144 zählen, warum darf ich nur bis 10 rechnen? Diese Entwicklungsstufe reicht sogar in den meisten Fällen noch über die 100 hinaus, nämlich dann, wenn das Kind derartige Zahlvorstellungen bildet,

⁷⁾ Die Entwicklungsstufe, daß das Kind eine Doppelpartung vornimmt, und daraufhin große und kleine bemerkt, liegt im allgemeinen später, als die hier in Betracht kommende Zeit.

⁸⁾ Wenn wir in diesem Abschnitte, der von den Grundlagen handelt, von „Erwerbung“ sprechen, so ist das nicht didaktisch gemeint, sondern psychologisch. Nicht um die Erwerbung von Vorstellungen zu unterrichten wird, willon wir hier schreiben, sondern wie sie sich tatsächlich abspielt, und zwar ohne Bezugnahme auf unterrichtliche Behandlung, je eher auch im Gegensatz zu ihr.

Zahlbegriffe erwirkt, dass schon ein Bewusstsein von der Art und Wirkungsweise des Dezimalsystems verlangt zu haben.

Diese Entwicklungsstufe ist es nun, welche die Masse der für das künftige Rechnen nötigen und geübtesten Zahlbegriffe herbeiführt, die heißt wegen der zunehmenden Schwierigkeit, sie zu überschauen, den Charakter von Bewusstseinsanstrengungen mit Hilfe der Zahlwörter. Ausser diesem sehr reichen Materialerwerb, der diese Stufe kennzeichnet, ist ihr schon am Anfang ihrer Ausbildung noch ein formaler Gewinn eigen. Er besteht darin, daß die Gefühlsbetonung der neuen Zahlbegriffe sich so gestaltet, daß das Kind sich nicht mehr mit dem Ausdruck „viele“ begnügt¹⁾. Das Bewußtsein vertieft sich vielmehr nach so weit, daß die Eins sich innerhalb jedes größeren Zahlenraums als wesentliche Differenz aufspalt: wird. Das Kind begreift z. B. die Notwendigkeit, daß einem Häuflein von 10 Zuckerkugeln noch eine hinzugefügt werden muß, wenn eine Gruppe von 11 Kindern sie unter sich verteilen will. Es ist das nicht dasselbe wie die ähnliche Erscheinung auf der vorigen Stufe. Denn während dort die Eins erscheidend gewonnen wird, wird sie hier als notwendig erfüllt und angewendet. Die Gedanktheit des Bewusstseins „viele“ weicht der Gewissheitlichkeit des Bewusstseins „wie viele“.

Der Gedanke der Erweiterung der Zahlbegriffe über den Aufmerksamkeitsumfang hinaus, ferner der Gedanke des wesentlichen Wertes der Einschiebung an jeder Stelle des Zahlenraums, endlich der Gedanke der Zahlwörter als Begriffsymbole führt zum **Zählen**²⁾.

Mag sich dies auf der vorigen Stufe, also innerhalb der Gewinnung der Zahlbegriffe 1 bis 4, noch nicht als nötig erwiesen haben, so dieser neuen Stufe muß dem Aufmerksamkeitsumfange dadurch nachgeholfen werden, daß eine immer wiederkehrende und dadurch völlig mechanisierte Wortreihe abläuft, die die besondere Eigenschaft hat, daß sich mit jedem Gliede ein Größengefühl verbindet, dessen Vorstellungswelt, in den Blickpunkt der Aufmerksamkeit gehoben, das Bewußtsein erregt, daß das betreffende Glied größer sei als alle die vorhergehenden, im besonderen um 1 größer als das unmittelbar vorhergehende.

Um das völlig zu begreifen, muß man sich andere Reihen vorstellen, etwa Gefühlsreihen, Ausdrucksreihen, Falschereihen, Torsionen,

¹⁾ Derselbe geistige Bildungsfortschritt, welcher sich in die Eins führt, am stärksten, daß es sich um eine Zahlvermehrung handelt, die über die Fünftel Herr Fagge bemerkt.

²⁾ Zählen ist im Urwort, wenn es glückt, „das Zählen ist ein Vorgang, der sich rein im Innern abspielt“ (Dietrichs Schule 1811, I, S. 103). Das Zählen im engeren ist das ganz so komplizierte Rechnen wie das Sprechen im engeren. Niemand wird aber das Sprechen als reinen Gedächtnisakt ansehen wollen, bei dem „die Anschauung nichts nützt“.

Notenreihen, Schmelzreihen usw. Auch hier verbindet sich mit jedem Gliede ein eigenartiges Gefühl, sei es dies, daß dem betreffenden Gliede bestimmte andere, die irgend welchen Akzent haben, vorgegangen sind, oder daß solche in nächster Nähe erwartet werden können, sei es dies, daß dem betreffenden Gliede selber innerhalb der Reihe eine hervorragende Bedeutung zukommt. Infolge dieser Gefühle ist man in der Lage, irgendeine Zeitreihe sich räumlich vorzustellen, sie gewissermaßen mit einem Blick zu überschauen und das betreffende Glied an der richtigen Stelle einzurufen.

Genauso ist es mit der Zahlenreihe, nur daß hier das betreffende Gefühl einen ganz ungesprochenen Charakter von einfacher Beschaffenheit hat und so völlig mit seinem Vorstellungsobjekt verschmilzt, daß nur eindringende psychologische Analysen die Elemente zu sondieren vermag. Dieser eigenartigen Gefühlscharakter der Zahlwörter selbst mag man auch aus folgender Erwägung. Gestellt den Fall, es prüfte jemand seinem Kinde die Reihe der Zahlwörter in umgekehrter Folge vor, also zehn, neun, acht usw., so würde das Kind das folgende Zahlbild $\overline{10}$ als sieben bezeichnen, und dies $\overline{10}$ mit fünf. Dem Ausdruck sieben würde eben dann dies charakteristisch sein, daß ihm 3 Glieder vorgegangen sind, und dem Ausdruck fünf, daß ihm tatsächlich 5 vorgegeben. Die umgekehrte Zahlenreihe würde also mit den gleichen Zahlwörtern andere Begriffe verbinden. Auch auf die kindlichen Ausdrücke sei nochmals hingewiesen. Auch das jüngste Kind, das über das Zählen verfügt: A, a, i, o, u, und man wagt das wohl, daß, wie a bekannt, in einem größeren Kreise niemals der erste oder zweite ist. Auch die Wörter a, e, i, o, u rufen also in dieser Zusammenstellung im Kinde ein Größengefühl hervor.

Die unterberraste Grundlage, aus welcher das Größengefühl hervorsticht, ist uns gegeben in der Aufeinanderfolge, in dem konkreten Akte des Aufzählens⁷⁾, ist also in der Hauptsache eine feste Reihe von Bewegungs- und Gefühlsfindungen, oder besser noch: eine Zeitvorstellung von verschiedener Dauer (je nach der Zahlgröße), welche einer Raumvorstellung — nämlich derjenigen der beim Zählen gewählten Objekte — assoziiert ist.

Mit Hilfe dieses Größengefühls des einzelnen Zahlwortes ist nun die Bewußtheit zustande, mehr Elemente in sich aufzunehmen als vier; wenn sie in der erwachsenen Zahlenreihe ablesen, eigentlich fast beliebig viel. Wenn jemand die Reihe bis 438 ablesen läßt, hat er gewissermaßen die sämtlichen vorgegangenen 438 Vorglieder im Bewußtsein, so wie bei der dritten Strophe eines Gedichtes die mit ihm stark verbundenen beiden ersten noch hier im Bewußtsein klingen.

⁷⁾ Vgl. Meumann, *Auff.* S. 373.

Aus alledem geht hervor, daß das Wesentliche an der ganzen Erscheinung nicht die Wertreihe an sich ist, selbst nicht in ihrer festen Aufeinanderfolge¹⁾, sondern das mit der Wertreihe verbundene, stufenartig veränderte Größengefühl, das sich zur bilden kann in Assoziation mit einer fortwährend um 1 wachsenden Größereihe, welche an den Dingen wohl wahrnehmbar, aber doch von ihnen zu abstrahieren ist. Damit ist erklärt, warum jenes „Zählen“ kleiner Kinder noch keinen „Sinn“ haben kann. Ihre ganze Entwicklung ist noch nicht so weit fortgeschritten, daß sie — wenn auch in bescheidenen Grenzen — zu einer solch komplizierten Assoziation einschließlich der nicht geringen Abstraktion fähig wären²⁾.

Diese Abstraktion — wenn sie überhaupt Abstraktion ist, nicht bloß nachgeahmter Wortgekläppel ohne Inhalt — knüpft sich auf und an den Sachvorstellungen. Darum sind die Zahlbegriffe dieser Stufe zunächst noch ganz und gar an die dinglich und ganz individuell ausgeprägten Sachvorstellung gebunden. Das Kind versteht 8 Pfannen, 8 Pfannkage, 8 Eier, 8 Broteine, aber nicht „acht“. Bei diesen Wörtern gibt es ihm wie nur bei reinen Zeitwörtern, als verlangen eine „Ergänzung“. Mit der Zählweise der Zahlwörter aber, worin wir freilich nicht nur die ersten 10 rechnen dürfen. Ändert sich das keine aber stetig. Oben auf die rechnerischen Beziehungen einzugehen, die uns noch beschäftigen werden, läßt sich folgendes feststellen. Das Kind, das mitten auf dieser dritten Stufe steht, stellt wohl auch noch 18 Pfannkuchen vor, es ist ein ganz großer Teller voll. Aber danach ist es schon zu der Herrschaft gelangt, daß diese 18 mehr seien als 10, auch mehr als 15, aber wiederum weniger als 20. Es kann dabei bei der Vorstellung der Pfannkuchen verharren, aber es hat nicht mehr nötig, sich vorzustellen, ob es weniger werden oder mehr bei in der Nähe liegenden

¹⁾ Das ist die Frage, in der die kleinen Kinder oft „hängen“.

²⁾ Man darf nicht behaupten, daß auch das kleine Kind schon fähig sei, Zahlen zu lernen. Wohl werden ihm Wortzeichen und andere abstrahiert. Was aber genau bedeutet, kann das kleine Kind, daß es diesen Zahlen tritt es der nötigen Zuverlässigkeit. Das persönliche Interesse an dem Kinde wie der Gedanke, daß seine kleinen Kinder doch „alles Mögliche“ leisten, läßt uns in der Regel über die geistige rechnerische Entwicklungsmöglichkeit solcher Leistungen hinwegsehen. Daß wir nur sehr langsam haben, verschwindet dann in unsere Erinnerung und wir lassen dem Kinde eine Leistung zu, deren es gar unfähig ist.

Ein Beispiel, das dem Erwachen der Zahlbegriffe ähnlich ist, hat schon früher in den Auseinandersetzungen, wie noch dies: Ein Kind stellt die Namen der Klaviernoten a, b, c vor. Lernen und dabei die einzelnen Töne beachten, — allerdings nicht mit Berücksichtigung der verschiedenen Höhen. Müht man diese Leistung einem einjährigen Kinde an? Und was es tun würde, ist es sicher in dem Bewußtsein, das höchsten Zeitpunkt erreicht zu haben. Aber diese Forderung ist wesentlich leichter als das Erwerben des Zahlbegriffs, weil sie ihrer gegenüber in jeder Hinsicht leichter ist, und weil keine Abstraktion dabei gefordert wird.

Zählensgaben, er arbeitet schon mit den Zahlwörtern allein. Das will sagen, daß neben der sachlichen Vertretungsvorstellung des Zahlbegriffs, die Zahlvorstellung, sich ganz unbewußt das Zahlwort als eine bald gleichwertige, später sogar vorwiegende Vertretungsvorstellung einschleibt. Ursprünglich ganz und gar der dinglichen Vorstellung entstammend und auf ihr aufbauend, hat es nach und nach symbolischen Charakter angenommen. Dadurch erlangte es vor der sachlichen Vertretungsvorstellung einen großen Vortag in der Regelmäßigkeit seines Gebrauchs und in der damit verbundenen Inspannung an geistiger Energie. 20 Kirchen sich vorzustellen, kostet eine große Summe von dieser Energie, aber niemandem fällt es ein, diese Summe aufzuwenden, wenn man so leichtfüßig sagt, jene Stadt habe 20 Kirchen. Es ist darum zu verstehen, wenn das Zahlwort das Bestreben zeigt, allmählich die sachliche Vertretungsvorstellung ganz beiseite zu schieben und sich an ihre Stelle zu setzen.

Dieser Wechsel der Stoffvertretungsvorstellung gilt zunächst für die einzelnen Zahlen, bei denen jedes abstrahiert-mathematische Wort-Miß mehr die Bedeutung des Verkehrsmittels überkommen hat, während das visuelle für die Plastizität der eigenen Vorstellung zur Festlegung bleibt. Bei der ganzen Zahlenreihe walten aber das umgekehrte Verhältnisse. Sie erscheint als Reihe von Klangbildern, mit welcher sich dann für das Kind, das diese dritte Stufe erklommen hat, die schwache Raumvorstellung einer Zahlenlinie assoziiert²⁾, selbstverständlich mit der Maßgabe, daß je nach dem Vorstellungstypus der einzelnen Person die eine Art der Vorstellung mehr oder weniger überwiegt, während die andere fast oder gänzlich unbekannt ist.

Die Erwerbungen dieser Stufe gehen — wie schon angedeutet — in den meisten Fällen noch über 100 hinaus. Eine Gliederung wird zwar von der logisch-didaktischen Stoffbetrachtung begehrt, gefordert und geübt, sie läßt sich aber psychologisch nicht nachweisen. Das Kind, das diese Stufe betreten hat, kann schon eine größere Menge abzählend bewältigen, Ipfel, Erbsen, Steine, Münzen usw., und ist nur zu gern bereit, seine Erwerbungen auszufragen, d. h. wirklich größere Dinge auszufüllen. Aber wenn es bei 20 angekommen ist, fragt es: Wie geht es weiter? Wenn man ihm antwortet: dreißig, dann sagt es: bedingt: Nun kann ich weiter, und zählt bis 32, worauf sich das Frage- und Antwort-

²⁾ Wie oben bereits ist, daß solche schülerorientierte didaktischer Forderungen und Forderungen viele Kinder wohl im Lichte erwarten, sie aber nicht mit einer Bequemlichkeit verlinken, daher auch nicht das Maßstäblich bei den abstrakten Zahlwörtern stehen. Solche Kinder sind dann aber keine Lehrlinge und tragen eine gewisse Fächerfertigkeit, die sie sich selbst aneignen haben, auch nicht auf der Ebene einer Rechenfertigkeit ausgeht, was der hier die Stufe ist.

spiel hier und bei 48, 58 uel. wiederholt, bis der ganze Haufe gezählt ist. Der gesamte Vorgang kann sich ein halbes oder ein ganzes Dutzend abspielen, ehe das Kind über diese Unterrichts- und eigener Kraft hinauswächst, d. h. sich auch die Zahlwörter zwölzig, vierzig, fünfzig usw. angeeignet hat. Demzufolge könnte man diese Stufe gliedern in eine erste Zeit, da die Zahlbegriffe bis 10 oder 18, und in eine zweite Zeit, da die Zahlbegriffe der reinen Zehner gewonnen werden. Aber nicht aber sofort, daß diese Gliederung ebenso wenig unsere Beachtung hat, als die Einschnitte nach 10 oder nach 20. Nicht die Zehnerbegriffe sind es eigentlich, die das Kind in jenem angenommenen zweiten Abschnitte erwirbt, sondern ganz gleichgültige, auch unter einander ganz gleich gültige (d. h. gleich wertvolle) Zahlwörter. Denn die 20, die es learnt nach der 18, hat für das kindliche Bewußtsein dieser Stufe gar keinen Akzent. Es weiß nur, daß nach der 19 ein Wort kommt, das ihm noch nicht geläufig ist. Vielfach muß man auch noch „auszwölzig“ hinzufügen, um die Reihe weiterzuleiten zu lassen. Auch hundert hat für diese Stufe keinen anderen Wert als den eines schon oft gehörten Zahlwortes, an dem es nunmehr learnt, daß es ihr viel dazu gehört, daß es so lange dauert, bis man zählend dahin gelangt. Die Über, die hier gemacht wird, ist nicht etwa in dieser Entwicklungsstufe begründet, sondern ist ein Ergebnis unserer mathematischen und didaktischen Überlegung. Bald werden einige und auch und auch auch die anderen Kinder, daß man auch darüber hinaus zählen kann, und sie lernen es auch, ohne daß damit ihre Zahlbegriffe auf eine höhere Stufe der Auffassung gelangten, als auf der sie sich schon befinden, die Auffassung der Zahlenreihe.

Blicken wir zurück auf die bisherigen drei Stufen der Entwicklung der Zahlbegriffe! Zweit erscheint die Stufe des reinen Vergleiches, der sich mit den wichtigsten unbestimmten Zahlbezeichnungen begnügt. Eine Summe von 38 ist dem Kinde dieser Stufe ein unerschöpflicher Reichtum, bei dem weder Verminderung noch Vermehrung bemerkt wird, auch gar nicht in Betracht kommt.

Darauf folgt die Stufe des gemessenen Vergleiches mit der Gewinnung der Zahlbegriffe 1—4. Das Wesen dieser Stufe besteht ebenfalls in der Erwerbung der Einschnitte, andererseits in der Zusammenfassung von 2, 3 oder 4 — d. h. den im Bereiche des Anzuehmenbegriffes Begreifen — Einschnitten zu einer Gesamtheit. Auch für diese Stufe ist 38 noch „viel“ und nicht zu unterscheiden von 25 oder 50. Aber die wirkliche Wahrnehmung der Vermehrung oder Verminderung — und sei es auch nur um 1 — wird kontroll- oder achtsam bemerkt, weil man auch schon die Eins Einswert erlangt hat.

Die dritte Stufe gewinnt die übrigen Zahlbegriffe, soweit das

ohne Erfassung des Dezimalsystems möglich ist. Dar sind 56 nicht mehr viele schlechthin, sondern nur noch eine größere — oder gar schon kleinere Zahl, je nach dem Fortschritt des Kindes — die sich aber mit mehr oder weniger Bemühung genau angeben läßt. Sie erwirbt als wichtigstes Hilfsmittel für alle weiteren Fortschritte des Zählens.

§ 11. Die Erwerbung des Zahlensystems.

Ein wesentlicher Fortschritt, eine neue Stufe in der Entwicklung des Zahlbegriffes ist damit gegeben, daß das Kind das Verständnis gewinnt für den decimalen Aufbau des ganzen Zahlensystems. Das ist etwas vollkommen anderes. Denn auf der vorigen Stufe hatte es völlig genug damit zu tun, die Zahlen als Zahlenreihe zu berechnen. Und diese Zahlenreihe hatte für seine Auffassung noch ein Ende²⁾. Auf der neuen Stufe aber wird die Summe der Zahlbegriffe ganz außerordentlich erhöht. Das Erfassen der Größe ist nicht mehr abhängig von der subjektiven Reichweite des eigenen Zählens oder von der zur Verfügung stehenden Zeit, der Umfang des Zahlenraumes dehnt sich vielmehr in die Unendlichkeit, jede beliebige Größe kann nunmehr gewissermaßen mit einem Schlage erfaßt werden, und — was besonders bedeutsam ist — es wächst von Tag zu Tag die Erkenntnis, daß jede beliebige Größe der Feststellung sich fügen lassen und der Festhaltung fähig sei.

Und diese Erweiterung des Bereichs der Zahlen gelingt infolge einer anderen höheren Artierung der Zahl. Während dem Kinde vorher die Zahlen als lange, und später als endlose Reihe erscheinen, eine neben der anderen und jede ohne Beziehung zur anderen, wie die Perlen im Fließband — eine Reihe, die nur dadurch erleichtert wird, daß zehn gewisse Wortklänge immer wiederkehren, wie auf dem Klavier immer wieder die gleichen Töne kommen, so bekommt jetzt der Zahlbegriff eine andere Struktur. Er tritt in Beziehung, nicht nur zu den Nachbarn, zum vorhergehenden und zum nachfolgenden, sondern zu der Mehrheit der übrigen seines Geschlechtes. Es ist

²⁾ Jeden Lehrer ist die Erfahrung bekannt, daß ein Kind behauptet, es könne bis 40 zählen, ein anderes bis 100, je sogar bis 150 und noch weiter. Und jeder Lehrer hat gewiß — ohne auch immer die psychische Konstruktion dieser Höchstgrenze zu verstehen — in der Absicht, das Kind zu helfen, überzupringen: 'Nichtsch! besser du noch ein weiter zählen!' In fast allen Fällen gerät diese Aufforderung, um die Zahlenreihe von dem betreffenden Kinde fortzusetzen zu lassen. Manchmal sagt auch ein Kind: Ich weiß die größte Zahl, die Mensch zählt. Auf den Gehalt für das Verständnis der Zahlenreihe da ist. Auf den Kinder behaupten begreift: O, nun kann ich bis 200 zählen, und wenn man ein weiteres verliert, noch ein hundertfüßiges, dann bekommen sie die Größe der Welt, die mit dem hundertfüßigen Ähnlichkeit hat, das aber noch mehr ist, und das heißt schon Ausbruch dazu haben. Das weiß ich nicht, wie weit ich zählen kann.

nicht mehr ein Punkt in einer unendlichen Reihe — ein Punkt neben anderen Punkten, sondern ein Baustein in einem gewaltigen Bau, ein notwendiges Glied eines gewaltigen Systems von über- und untergeordneten Einheiten verschiedener Grade, deren Zahl ständig wächst. Und mit Hilfe dieses Systems läßt sich der große wie der kleine Zahlbegriff mit einer Klarheit, Schärfe und Sicherheit zum Ausdruck bringen, die unser höchstes Entzücken erregen würde, wenn wir es nicht gewöhnt wären und als selbstverständlich anzusehen. Würden wir nicht als Kind, sondern erst in reifen Jahren vor die Entscheidung gestellt, daß es möglich ist, eine bestimmte größere Anzahl, die man in etwa fünf Stunden zählen könnte bei einiger Eile, daß man diese Anzahl in fünf ebensoviel Sekunden festlegen kann als 17 Tausend, 9 Hundert, 843 und 2 — dann würden wir jenes schreckliche Staunen erleben und diese Geistesleistung ganz anders bewerten als jetzt, da wir uns kaum der Tatsache ihres Vorhandenseins bewußt sind.

Langsam und unmerklich, wie wir sie einst erdornen haben, betritt auch heute das Kind diese Stufe. Wer da glaubt oder ahnt, daß diese Erreichung etwas Einfaches und Natürliches sei, etwas, was in unsern psychischen Anlagen seine Begründung finde, der hat in hohem Maße recht; denn das Mittel zu dieser Erweiterung, Mechanisierung und Höherführung des Zahlbegriffs ist der Rhythmus. „Unser Bewußtsein ist rhythmisch angelegt“, das ist der erste Satz, mit dem Wundt die Ergebnisse der psychologischen Forschung einem größeren Leserkreise darzulegen versucht¹⁾. Und nichts anderes als durchgeführte und feststehende Rhythmisierung ist es, wenn die Einheit der Zehnergruppe in immer neuen Intensitätsstufen auf Hunderte, Tausende usw. übertragen wird, als auf höhere Einheiten, die gleichwohl denselben Gesetzen gehorchen wie die Reihe der elementaren Zahlbegriffe 1 bis 10, außerdem aber noch zahllose überlappende und konstruierbare Beziehungen aufweisen.

Zur Rhythmisierung²⁾ gelangt das Kind freilich nicht erst, wenn es im Begriffe ist, die vierte Entwicklungsstufe zu betreten, als setzt

¹⁾ Wundt, Einführung in die Psychologie, Leipzig 1891.

²⁾ Gewöhnlich versteht man die Ausdruck Rhythmus, Rhythmisierung und rhythmisch, die Ausdruck Gruppe, Gruppierung und klassisch, Anordnung, wegen der völligen mathematischen Gleichheit der hier in Betracht kommenden Einheiten oder räumlichen Erscheinungen, so es geschieht, dass Ähnlichkeit in etwas verschiedener Bedeutung zu gebrauchen. Der Ausdruck Rhythmisierung soll gelten für die geordnete, in gleicher Form wiederholende Anordnung, Gruppierung würde dann die mehr freie, lebhaften natürlichen und anderen Erscheinungen entsprechende Anordnung sein (die Gruppierung einer Anordnungsreihel zum Zweck photographischer Aufnahme, Gruppierung einer Schiffsflotte nach Intervallgemeinsamkeiten usw.). Es sollte nicht unbekannt sein, daß der Ausdruck in dieser Bedeutung schon vielfach üblich ist; man spricht nicht nur von musikalischen Rhythmen, sondern auch von dem der Geometrie, mathematisch also von zeitlicher und räumlicher Rhythmisierung.

schon früher ein, im Gebiete der Zahl erscheint sie schon während der dritten Stufe. Hier hat sie zunächst eine ganz ähnliche Wirkung wie die Rechenmaschinen, nämlich die, den Bewußtseinsumfang beträchtlich zu erweitern. Schon an sehr qualifizierten Schülern drücken, wie sie durch die Schläge eines Metronoms dargestellt werden, läßt sich diese Erhöhung gewinnen. Können wir ohne Rhythmisierung (und selbstverständlich ohne Zahlen) mit Sicherheit nur 6 Elemente auffassen, so steigt bei einfacher Rhythmisierung (im $\frac{1}{2}$ Takt, wo also nur Hebung und Senkung wechselt) ihre Zahl sofort auf 16, bei differenzierterer Rhythmisierung (z. B. in den Akkorden des $\frac{4}{4}$ Taktes, die drei verschiedenen Hebungen aufweisen) gar auf 40. Selbst eine Apparate läßt sich das einigermaßen zeigen, wenn man eine Versuchsperson veranlaßt, mit einem Bleistift möglichst gleichmäßige rasche Schläge auf der Tischplatte auszuführen. Anfangs ist es dabei nicht ganz leicht, die Bedingung zu erfüllen, daß man die Versuchsperson nicht zählen darf. Wenn man dann einen solchen Takt in die Schläge hineinläßt, gelingt es, ihrer 36 z. B. von vor einer halben Minute gehörten 36 zu unterscheiden. Und es ähnlichen Ergebnissen ist die Forschung betreff der räumlichen Rhythmisierung gekommen.

Wenngleich von unser Bewußtsein eine starke rhythmische Anlage folgt¹⁾, die Entwicklung des rhythmischen Gefühls scheint dieser Anlage nicht zu entsprechen, scheint ein anderes Tempo einzuhalten, in anderer Kurve zu verlaufen als die Entwicklung anderer geistiger Fähigkeiten. Während die Wahrnehmung, die Stärke der Aufmerksamkeit, die Abstraktion u. a. eine steile Kurve der Entwicklung zeigen²⁾, so steigt die der Entwicklung des rhythmischen Gefühls viel langsamer, obgleich sie doch von vornherein höher einströmen scheint.

Zwar sind schon dreijährige Kinder fähig, eine einfache Teilung vorzunehmen, wie man an den Ausschneiden und Legenstücken der Kindergeräten, an den Beispielen vorerschulpflichtiger Kinder beobachten kann. Eine Rhythmisierung aber, eine Gliederung in gleiche

¹⁾ Die rhythmische Anlage und das entwickelte rhythmische Gefühl haben eine außerordentliche Bedeutung für fast alle Tätigkeiten des Lebens, eine viel größere, als man ihnen im allgemeinen beizulegen pflegt ist. Von den Tönen der Naturwerke bis zu den Tüpfeln unserer Infusorienkugeln, ja bis in die Schalen der geäderten Arden hinein verläuft die psychologische Wissenschaft (als Physiopsychologie, Wirtschaftspedagogie und Jugendkunde) durchs Leben. Das ist Art und Maß, Form und Wirkung eines menschlichen Handelns und Erlebens zu empfinden — diese Aufgaben — bedeuten auch das des Kindes. Nicht Töne und Melodie ist es, was dem Kinde (und dem Volke) in der Kindheit am Lieb gefallt — es trägt ohne Bewußtsein andere Töne — sondern der Rhythmus. Freilich ist diese Bedeutung weder von der Forschung noch von der pädagogischen Pädagogik bisher in vollem Maße gewürdigt worden.

²⁾ Bekannt ist Jean Pietsch Wort: Ein Kind lernt in den ersten drei Lebensjahren mehr als in drei akademischen.

Gruppen, tritt erst wesentlich später ein. Auch wenn man Kinder des ersten Schuljahres vorstellt, im Schritte zu gehen, im Takte zu marschieren, gemeinschaftlich ein Lied zu singen, macht man die Erfahrung, daß dies nur mit Aufbietung besonderer Aufmerksamkeit und nur kurze Zeit möglich ist¹⁾. Zwar wird mancher einwenden wollen, daß auch die Spielformen der kleinen Mädchen, wobei sie sich in gleichmäßigen Schritten im Kreise bewegen und Lieder singen und sprechen, durchaus vom Rhythmus getragen seien. Aber dieser Einwand ist nicht ganz stichhaltig. Zunächst wird in fast allen Fällen ein älteres Kind als Aufkührerin und Lehrerin der Kleineren zu entdecken sein. Außerdem ist zu bedenken, daß hier eine ganze Anzahl Reihen zusammenströmen — die Reihe der Selbstbewegungen, der Sprechbewegungen, die Lautreihen der Töne, der Worte, die visuellen Bewegungsbilder — die sich gegenseitig disziplinieren. Weiter kommt hinzu, daß das Ende der Verspalle immer wieder den Einschnitt bildet, der die rhythmisierte Gruppe in ihren Elementen zusammenfaßt und von der folgenden abhebt, so daß ein neuer Rhythmus sich hier wieder finden kann. Endlich kommt in Betracht, daß die Spielformen gar nicht oder selten über die niedrigsten Formen des Rhythmus hinauskommen, über die Einsenrhythmen, die eigentlich als bloße Reihung von Vorstufen der Rhythmisierung sind, und die Zweisentrhythmen²⁾.

Die Bedeutung des Rhythmus für das Rechnen darzulegen, die Eigenartigkeit seiner Entwicklung andrerseits veranlassen uns, mit einigen Worten noch auf weitere Beispiele hinzuweisen.

Wenn ein Kind von 8—10 Jahren Klavier zu spielen anfängt, dann „merkt“ es ja auch, daß nach acht Takten das Thema meist wiederholt wird. Aber es fehlt weder für die Achtzahl der Takte eine innere Nötigung, noch hat es ein Interesse daran, daß das Stück „wieder von vorn beginnt“, ja in vielen Fällen ist ihm diese Tatsache „langweilig“. Das Gefühl für strenge Gliederung, für Rhythmisierung ist eben noch nicht entwickelt. Der Erwachsene aber, der jenseit dieses Alters steht, ist leicht geneigt, dem „jedem musikalischen Gefühl-

¹⁾ Auch die Erfahrung dürfte nicht selten dastehen, daß Kinder, die mit selbst überlegtem Lied von guten Kameraden singen, nach der zweiten Verszeile nach $\frac{1}{2}$ Minuten nur $\frac{1}{4}$ gesungen.

²⁾ Unsere Beobachtungen der kindlichen Spielformen haben uns wohl die Tendenz nach Rhythmus erkennen, die durch alle kulturellen, aber gleichzeitig die Schwierigkeiten der Ausbildung, die bei den vorerwähnten Kindern verschärfte Grade zeigt. Dabei können wir uns ja sagen, je weniger das Kindreife erwacht, daß solche selbstbestimmte Motoren gleichzeitig vernachlässigbare Motoren sind. Diese Auslegung ist der Überzeugung über den Charakter der Kinderspielen überlegen. Psychologische Untersuchungen über den Zusammenhang dieser Erwerbsformen wären sehr wertvoll. Für die Deutlichkeit des mathematischen Überbegriffs können sie jedenfalls nicht ergreifend sein. Schwaninger ist auf die Perspektive hingewiesen, die mathematische Bildung durch Musizierungen zu fördern.

gang" anzusprechen. Er kann es noch gar nicht begreifen, wie man „ohne Takt“ spielen kann.

Und der Turnunterricht zeigt, daß selbst bei älteren Schülern das rhythmische Gefühl der Verfeinerung nach sehr nötig und bedürftig ist.

Es ist in der Tat ein weiter Weg von dem ganz schwachen Rhythmusgefühl des Kindes bis zu dem hochentwickelten, einen Hilfskapazitäts, das in aufeinanderfolgenden Takten, welche gleich genannt werden sollen, sich noch nicht einmal Abweichungen von 1 Hundertstel Sekunde gestattet. Und erst auf einer gewissen Stufe der körperlichen und geistigen Entwicklung wird das Kind für einen eigentlichen Rhythmus fähig. Diese Stufe ist aber mit dem vollendeten 7. Lebensjahre im allgemeinen noch nicht erreicht. Damit ist uns ein bedeutungsvoller Fingerzeig gegeben hinsichtlich des Unterschiedes zwischen natürlicher und künstlich geübter Entwicklung.

Auch diese letztere hat die besten Absichten — das ist ganz gegeben — und sie ist in ihren Ursachen verständlich. Denn wenn wir Erwachsenen im allgemeinen geneigt sind, unsere Entwicklungsstufe und unsere Fähigkeiten meistens meistens dem Kindes zuzuschreiben, so sind wir ganz besonders im Gebiete des Rhythmus intolerant, und dann im Gebiete des Taktes der mathematischen Bildung, welcher auf dem entwickelten Rhythmusgefühl aufbaut. Wer von uns zurückdenkt an seine Jugend, glaubt, er habe mit der Erwerbung der Zahlenreihe auch das dekadische System gewonnen. Wir verstehen es nicht und suchen nach einem Mangel der Erziehung und des gewonnenen Unterrichtes, wenn wir sehen, wie ein Kind auf einer gewissen Stufe zählen kann, verständig zählen, ohne sich gleichzeitig der dekadischen Gliederung bewußt zu werden. Und doch ist ihm die ganz natürliche Entwicklung. Wir schließen fälschlich: weil die Zahlenreihe sich wiederholt, müsse eine Rhythmisierung ganz von selbst eintreten. Das ist aber auch all dem Gelegenen nicht nötig, gerade auf dem Gebiete der Zahl ist es unmöglich, daß dem Kinde die Rhythmisierung in den Schoß fällt. Wohl bemerkt das Kind die Wiederkehr der Reihe, aber es ist ihm selbst nicht gefühlbetont, und selbst ihm die Rhythmen zu lang.

Ein Zusammenfallen der hier dargelegten dritten und vierten Stufe, wie es vielfach angenommen wird, und auf das vor allem unsere Unterrichtspläne fast störrisch noch eingestellt sind, entspricht also nicht den psychologischen Tatsachen. Vielmehr kann die vierte Stufe erst dann betreten werden, wenn zwei Bedingungen erfüllt sind: daß die dritte erreicht ist, und daß die Kräfte zum Bewältigen der vierten vorhanden sind. Das will sagen, daß die Erwerbung des Systems erst dann einsetzen kann, wenn die Erwerbung der Zahlen-

vertretungsvorstellung der Zahlbegriffe früher oder später. Und es dauert innerhalb einer gewissen Zeit, ehe die Association zwischen Sache, Begrifflichkeit, Wort und Ziffer so fest geworden ist, daß eine dieser Elemente die übrigen ohne weiteres reproduziert.

Mit dem Erreichen dieses Ziels ist aber die Entwicklung dieses Zweigs noch nicht abgeschlossen. Denn die Gewinnung der Ziffer ist gewissermaßen der erste größere Schritt auf dem Wege zu beharrlicher Darstellung der erwachsenen Zahlbegriffe. Der zweite, ebenso hochbedeutende, wenn nicht in unserer Zeit noch wichtigere, ist die Gewinnung der Erkenntnis des Stellenwertes der Ziffern, die Erwerbung des Positionssystems, in welchem jede Ziffer außer ihrem unveränderlichen Werte noch einen veränderlichen hat, der von ihrer jeweiligen Stellung abhängig ist.

Diese Erkenntnis ist durchaus nicht mit der Ziffer zugleich gegeben, auch nicht mit der zweistelligen oder dreistelligen. Kinder assoziieren zunächst das Zahlwort auch mit einer zweistelligen Ziffer ebenso mechanisch (d. h. ohne daß die Aufmerksamkeit sich der inneren Beziehungen zwischen beiden bewußt wird), wie sie irgendeine Formel mechanisch — und infolgedessen nicht selten verständnislos — auswendig lernen. Es waltet hier vielmehr das selbe Verhältnis ob, wie bei der Gewinnung des Zahlworts und des Dezimalsystems. Wie dort beides durchaus nicht dasselbe ist, ja wie der Erwerb dieser Erkenntnisse verschiedenen Stufen in der Entwicklung des Zahlbegriffs angehört, so auch hier: Die Gewinnung der Ziffer als eines Symbols für das Zahlwort entspricht einer niederen Stufe der Entwicklung, die Erkenntnis des Stellenwertes der Ziffer einer höheren¹⁾.

Wer diese Erachtungen in ihrer Gesamtheit zu überblicken weilt, dem wird sich von selbst der Gedanke aufdrängen, daß hier jedenfalls ein gleichzeitiger Parallelismus vorliegt. Eine nachfolgende Betrachtung führt dann, daß neben der Erwerbung der Zahlwörter die des Ziffern, und neben der Erwerbung des Dezimalsystems die des Positionssystems einhergehen müssen. Das ist aber ein nicht geringer Irrtum, der leider auch in die Didaktik des mathematischen Unterrichts hineingetragen ist und hier recht schlimme Folgen gestiftet hat²⁾.

Um dies zu erkennen, muß man sich zunächst vergegenwärtigen den ganz allgemeinen Gedanken aller Entwicklung, daß ein Ereignis für irgendeine Erscheinung einer wesentlich späteren Zeit angehört als die Erscheinung selbst³⁾. Man kann man sich nicht ge-

¹⁾ Man kann wohl sagen, daß diese beiden Stufen durchschnittlich 1—2 Jahre voneinander liegen.

²⁾ Näheres darüber unter der Überschrift „Unterricht der Ziffern“.

³⁾ Das zeigen alle Beispiele des vorgeschriebenen Lehrens Zahlen, Bsp., Holz und Papiergrill, „schön“ und „schlechter“ Mühl . . . f., die Bezeichnung der

riger Berechtigung die Ziffer als das Erstemittel des gesprochenen Zahlworts sehen, und das Positionssystem als ein gerades, aber gar nicht unbedingt notwendiges Erstemittel — nämlich als räumliches Darstellungsmittel des in den Zahlwörtern natürlich vorhandenem Dezimalsystems. So hatten Griechen und Römer wohl das Dezimalsystem, nicht aber das Positionssystem⁷⁾.

Die Annahme eines gleichzeitigen Parallelismus ist derselbe Irrtum, als wenn man behaupten wollte, man müsse sprechen und schreiben gleichzeitig lernen (nicht lesen und schreiben, das wäre nicht die hier entsprechenden Tätigkeiten). Die Sache ist doch so: Die Gesamtheit der Sachverstellungen und Erhebungen bewilligen wir, indem wir Begriffe bilden, die eine Sprachbezeichnung bekommen, gewissermaßen als Etikett, mittels dessen wir eine ganze Reihe von Sachverstellungen zusammenfassen. Die Sprachbezeichnungen aber machen wir dauerhaft, wir geben ihnen räumliche Gestalt, indem wir die Schrift hinstellen. Ganz gewiß ist der Ausspruch voll berechtigt, daß mit der Schrift erst eigentlich die Kultur begonnen habe; aber vor aller Schrift hat es Jahrtausende hindurch die Sprache gegeben als Mittel der Begriffsbezeichnung. Und wie aus langen Zeiträumen heraus erst langsam in der Menschheitsgeschichte der Schritt zur räumlichen Festlegung des flüchtigen Wortes erwacht, so gibt es auch im Jugendalter des einzelnen Menschen eine Zeit, da er sich — sogar verheerend — mit Zahlwörtern begnügt und gar nicht das Bedürfnis hat, seine Berechnungen schriftlich festzulegen.

Die Annahme eines solchen gleichzeitigen Parallelismus ist ja psychologisch begreiflich. Nämlich kommt es der ganzen Entwicklungsführung unseres Bewusstseins entgegen, die in der Zusammenfassung, in der Abstraktion, im System ihre Zielpunkte sieht. Und nun anders sehen wir aus unserer Altersperspektive heraus die kindliche Entwicklung viel zu sehr verkümmert und verkrüppelt als gleichzeitige Vorgänge an, was in Wahrheit wohl auseinander liegt.

Wenn somit die Annahme eines gleichzeitigen Parallelismus der Erwerbung von Zahlwort und Ziffern, von Zahlsystem und Positionswort abgelehnt werden muß, so darf doch nicht jeder Parallelismus abgewiesen werden. Wie ein solcher zwischen Sprechen- und Schreiblernen besteht, so auch zwischen dem Erwerb von Zahlwort und Ziffer. Nur ist es, wie man aus diesem Vor-

Sprache (Zahlwort — Parabel), der Erfahrung (eigene Erfahrung — Erfahrung des, eines), der Sinne (Gefühlswort, Anschauung), des Fortschritts (Gleichzeitigkeit) — Fortschrittsentwicklung, von.

⁷⁾ Und indem unsere Vorfahren, unsere elterlichen Zeitgenossen auf dem Lande, an der Herde und im Gehirge, auch unsere Kinder, stehen an Stelle der Ziffern, verwenden — man vergleiche übrigens auch die Aufzeichnungen beim Rückspiel — verdrängen sie auf das Positionssystem und seine Vorteile.

gleich oder wellenlos entstehen kann, nicht ein gleichzeitiges, sondern ein ungleichzeitiges. Es ist nicht — um das geometrische Bild des Parallelismus durchzuführen — der des rechtwinkligen, sondern der des schiefwinkligen Parallelogramms. Inner



Entwicklung der Ziffer und des Zahlensystems



würde andeuten, daß die einander entsprechenden Erscheinungen zu gleicher Zeit (synchron) eintreten, dieser, daß sie nacheinander auftreten.

Die Tatsache, daß während dieser ganzen Entwicklung sich langsam ein Wechsel der Stellvertretungsverstellungen vollzieht, kann nun auch noch von einer anderen Seite betrachtet werden. Es muß in dem Zweite nachzuvollziehen werden auf unsere Ausführungen über die Bedeutung der Sachbegriffe und ihre Stellvertretungsverstellungen (S. 87). Was dort von den Sachbegriffen gesagt wurde, gilt in vollem Umfange auch für die Zahlbegriffe, nämlich:

daß im Gebiet der Erkenntnis die Gesamtvorstellung grundlegende Bedeutung, der reine Begriff aber die Bedeutung der höchsten Entwicklungsform hat;

daß aber im Gebiet des Ausdrucks dem Begriffe (ganz abgesehen von dem Grade seiner Verdichtung) die grundlegende, der individuell ausgestatteten Gesamtvorstellung aber die Bedeutung der Zielform zukommt.

Das will sagen, daß die Entwicklung des mathematischen Wissens, insbesondere die Entwicklung der Zahlbegriffe, ausgeht von dem ganz individuell ausgestatteten Erkenntnis der Gleichartigkeit beobachteter Bewußtseinsinhalte, so daß sie immer mehr von dem Individuellen abstrahiert und im reinen Begriff ihre Krönung findet, der in einem möglichst kurzen, ihm allein eigentümlichen Symbol seine Stellvertretungsvorstellung hat. Daß aber die Entwicklung des mathematischen Wissens, speziell die Anbahnung der erweiterten Zahlbegriffe auf die transzendente Fülle des Lebens, den ungeschützten Weg geht, nämlich für den reinen Begriff im Augenblick diejenige Stellvertretungsvorstellung zu finden, deren Funktion dem jeweiligen Anforderungen der Lage entspricht. Dabei muß selbstverständlich das Begriffsgefühl sehr lebhaft sein. Mit seiner Hilfe haben wir das Bewußtsein, eine typische Stellvertretungsvorstellung oder eine

welche erfüllt zu haben, die nach rechts oder links hinzeigt, oder endlich eine, welche nach der einen oder anderen Seite hin als Grenzfall auszusprechen sein würde.

Außer diesem Gedanken der rechnerischen Anwendung führt auch der andere, das Behalten der Zahlen zu ermöglichen, zu ähnlichen Ergebnissen. Das akustische wie das visuelle Begriffssystem erhält nämlich eine wesentliche Stütze, wenn sich ihnen das Größengefühl zugesellt, dessen Bewußtwerden die dritte Stufe der Entwicklung der Zahlbegriffe kennzeichnet. Das geschieht aber mit besonderem Erfolge durch die Vorstellung der Rangreihe oder irgendeiner andern Vorstellung von räumlicher Größe.

Die Höhe der Entwicklung wird daraus nicht gekennzeichnet durch das Vorhandensein nur noch einer einzigen Vorstellungsvermittlung für den Zahlbegriff — etwa des Zahlwortes — sondern durch eine Mehrheit sachlicher und symbolischer Vorstellungsvermittlungen. Wer es darum zu höchster Entwicklung seiner mathematischen Fähigkeiten bringen will, der muß — abgesehen von später zu erörternden Bedingungen — einerseits nach immer größerer Reinheit des Begriffs, nach immer abstrakterer Gestaltung, nach immer primitiver Form seinen Symbols streben, andererseits aber ebenso sehr sich bemühen, für jeden Begriff fast atomistisch nicht nur symbolische, sondern auch teilweise ausgestaltete sachliche Stellvertretungsvermittlungen beschaffen.

Das Absterben der sachlichen Zahlvorstellung zugunsten der lediglich symbolischen Bezeichnung des Zahlbegriffs führt zu einer begrifflichen Verkürzung, der der Intellekt eng beschreibbar ist. Allein das ununterbrochene Band und Bandgelenk zwischen Individualvorstellung und Begriff sichern auch dem letzten Spröß dieser Entwicklung die Verbindung mit dem Leben, führt auch dem höchsten Zweige dieses Baumes die stützenden Wurzelsäfte zu. Mit auch dem letzten Erscheinen des denkenden Geistes aus dem Boden der Wirklichkeit steigende Kräfte entspringen. Das schöne Gleichnis von Antike ist verwirklicht auch auf psychologisch-mathematischem Boden erwachsen.

Es erfolgt noch, mit wenigen kurzen Strichen die weitere Entwicklung der Zahlbegriffe zu skizzieren. An die vierte Stufe, die Gewinnung des Zahlensystems, schließt sich als fünfte an die Gewinnung der Bruchzahlen und Dezimalzahlen. Diese letzteren setzen den Erwerb des Positionssystems voraus. Da sie aber zugleich als Bruchzahlen Bedeutung haben, so empfiehlt sich die angegebene Einteilung¹⁾.

¹⁾ Nicht ist nur die psychologische Entwicklung der Zahlbegriffe im Auge gefaßt, auch die didaktische Gestaltung dieser Entwicklung, die vielfach für

ist es nötig, daß eine Untersuchung, welche über ihr Wesen und ihren Aufbau zur Klarheit gelangen will, zunächst an die einfachsten Formen herantritt, die die Erfahrung auf diesem und benachbarten Gebieten findet. Solche einfachsten Formen sind im Bereiche des Denkens überhaupt — Gedanken, Urteile, Sätze. Sie haben aus einer Gesamtvorstellung irgendein Merkmal heraus, z. B. dieser Baum ist hoch, der Hase springt, Petrus ist ein Apostel uel.

Insofern diese Sätze aus dem Dingbegriff eines Qualitäts- oder Merkmals- oder einen anderen Dingbegriff hervorgehen, der im ersten bereits enthalten ist, haben sie analytischen Charakter, nicht — wie die alte Logik glaubte — synthetischen in dem Sinne, daß die beiden Begriffe gewissermaßen einander gegenüber, dabei miteinander verglichen und nach dieser Prüfung der Möglichkeit der Vereinigung miteinander verbunden würden oder nicht¹⁾. Sie sind vielmehr schon vorher verbunden und werden durch das „Ue-ist-in“ getrennt. Alle aber wie neue Aufklärung kommen darin hervor, daß zwischen zwei Begriffen im Urteil eine Beziehung hergestellt worden sei. Man kann nun behaupten, daß fast wichtiger als die Begriffe selbst dieses Feststellen ihrer gegenseitigen Beziehungen sei; denn aus solchem Feststellen von Beziehungen zwischen den Begriffen besteht eigentlich unser gesamtes Denken, besteht das, was wir oben Hantierung mit Begriffen nannten.

Das zeigt sich deutlich bei der Betrachtung beliebiger Urteile. Auch das einfachste und kürzeste enthält wenigstens drei Begriffen: außer den beiden, die in Beziehung gesetzt werden, wird noch die Art der Beziehung angegeben. Das ist noch dann der Fall, wenn der Einebige Augenchein dem zunächst widersprechen sollte. Es mag dies an ein paar Beispielen gezeigt werden. Daß ein Qualitätsbegriff an einem Dingbegriff erscheint, kennzeichnet man durch das Hilfswort: Das Pferd ist schwarz. Ist der Qualitätsbegriff nur vorübergehend mit dem Sachbegriff zu denken, so beschränkt man das Hilfs Verb: Die Sonne geht auf²⁾. Soll die Beziehung der systematischen Ober- und Unterordnung ausgedrückt werden, so geschieht dies wieder mit dem Hilfswort: Die Kohlen sind Brennstoffe. Werden kausale Beziehungen gedacht, so ist wieder das Hilfs Verb nötig: Der Blitz verursacht den Donner, Leid folgt dem Übermut.

Was es im allgemeinen von den Begriffen gilt, das trifft im

¹⁾ Die analytischen Urteile im Kantischen Sinne würden wir heute bezeichnen als Urteile, bei denen der Prädikatbegriff ein wesentliches Merkmal des Subjektbegriffs kennzeichnet hat.

²⁾ Wurde überhaupt nur zwei Begriffe genannt werden sollte, so würde die Induktion des Verbumes genügen. Im alten Form enthält das dritte Begriff, den Beziehungsbegriff, der da besagt, daß die beiden Begriffe Sonne und Aufgehen die Beziehung miteinander haben, im Anschlusse der Urteilsbildung als einer Vorstellung aufzufassen zu werden.

besonderen für die Zahlbegriffe an. Sie haben den Charakter des mathematischen Materials; aber das eigentliche Rechnen besteht in der Feststellung der zwischen ihnen vorhandenen Beziehungen. Welcher Art sind die?

Beginnen wir mit einem möglichst einfachen Beispiel. Ein Kind darf sich für 3 Pfennig einen Kringel kaufen. Wenn es einem Pfarrer hängt und einem Zweier vorüberwacht, so hat es Beziehungen zwischen den Zahlen 3 und 5 in mehr als einer Richtung schon erworben. Auf eine der verschiedenen mathematischen Formeln gebracht, könnte die erworbene Erkenntnis lauten: $5 - 3 = 2$. Dies Urteil enthält aber nicht drei, sondern fünf Begriffe, nämlich drei Zahlbegriffe, dazu den des „weniger“, d. h. in diesem Sinne, daß man vermindern muß, und den des „gleich“, offenbar zwei Beziehungsbegriffe. Da aber, wie wir sehen, jedes der angeführten Urteile in drei Begriffen vollständig ist, so läßt sich das Zahlenbeispiel nicht ohne weiteres mit den gewählten Sachbeispielen auf die gleiche Linie stellen.

Wir haben in dem Zahlenbeispiel nämlich ein zusammengeordnetes Urteil vor uns und müssen uns der übrigen zusammengeordneten Urteile erinnern, wenn wir hier einklinken wollen. Als eine verhältnismäßig wenig komplizierte Gruppe dieser zusammengeordneten Urteile sind bekannt die Bedingungsurteile. Alle Urteile, in denen kausale Beziehungen gedacht werden, lassen sich in diese Form bringen. So kann man das oben angeführte „Der Blitz verursacht den Donner“ auch so ausdrücken: Wenn der Blitz erscheint, folgt der Donner. Hier sind fünf Begriffe genannt: der Bedingungs-begriff „wenn“, die Erschelungsbegriffe Blitz und Donner, die Zustandsbegriffe erscheint und folgt. Es ist klar, daß das eigentlich zwei vollständige Urteile sind: Der Blitz erscheint, der Donner folgt — die durch die Beziehung wenn — so verbunden wurden.¹⁾ Damit ist zugleich gesagt, daß die vollständige Form eigentlich sieben Begriffe aufweisen müßte, nämlich drei Begriffe in jedem Urteile und außerdem den Bedingungs-begriff, der beide Urteile verbindet. Diese vollständige Form läßt sich herstellen:

Wenn	so	(Bedingungs-begriff)
der Blitz	der Donner	(Zustandsbegriff des ersten, des zweiten Urteils)
ist	ist	(Beziehungsbegriff des ersten, des zweiten Urteils)
da,	folgend	(Zustandsbegriff des ersten, des zweiten Urteils)

Zwischen dieser siebenstelligen und der kurzen dreistelligen Form sind alle Übergänge möglich, so daß dasselbe Urteil mit dem gleichen

¹⁾ „Wenn — so“ sind eigentlich nicht zwei Beziehungsbegriffe, sondern nur Teile des einen. Das geht auch daraus hervor, daß man wirklich das zweite Urteilsteil weglassen kann, ohne den Sinn des gesagten zu ändern.

Sinne nach mittels vierer, fünfer und sechser Begriffe ausgesprochen werden kann, ohne daß eine weitere Untergliederung (durch Attribute usw.) hierzuliege.

Betrachten wir nun nochmals jenes mathematische Urteil, so übersehen wir sofort, daß es ein solches Bedingungsurteil ist, das sich deutlicher so aussprechen läßt: Wenn ich von der Zahlgröße 8 die Zahlgröße 3 wegstreche, so bleibt die Zahlgröße 5 übrig; übersichtlicher:

Wenn	so	(Bedingungs-begriff).
8	3	(Zahl-größe),
vermindert	ist	(Beziehungs-begriff),
wird um		
3	verbleiben	(Zahl und Zustands-begriff),
ist	ein	Urteil.

Dasselbe zeigt sich bei allen anderen mathematischen Urteilen:

Bedingungs-begriff:		Zustands- u. Resultats-begriff:	
$3 + 4 = 7$	8 vermindert um	4 ergibt	7
$8 : 6 = 1\frac{2}{3}$	8 in Mal-Beziehung gesetzt zu 6	—	1 $\frac{2}{3}$
$15 : 5 = 3$	15 geteilt durch	5	3
$5^2 = 25$	5 potenzieren mit	2	25
$\sqrt[4]{16} = 2$	16 reduziert mit	4	2
$\log 100 = 2$	100 logarithmisiert auf Basis	10	2

Wenn der Winkel gegen in einem Dreieck, er ist gleich 180°.

Wenn zwei Kreise gleich das eine beiden, so sind gleich viereckig.

Die letzten Beispiele wollen zunächst zeigen, daß auch andere mathematische Sätze diesen Charakter der Bedingungsurteile tragen. Sie haben aber im Zusammenhang mit anderen noch einen weiteren Wert. Achten wir nämlich auf die verschiedenen Beziehungen, so sehen wir auf den ersten Blick, daß der zweite Beziehungs-begriff in allen mathematischen Sätzen derselbe ist, während der erste in der paarspezifischsten Weise wechselt. Dieser ebenfalls wiederkehrende Beziehungs-begriff ist der Begriff der Gleichheit¹⁾. Er ist freilich nicht zu verwechseln mit dem der logischen Gleichheit²⁾. Denn wir wollen in einem mathematischen Satze niemals sagen, daß etwa die Herstellung einer Beziehung identisch sei mit irgend welchem anderen Geschehen (nur von einer anderen Seite betrachtet) und

¹⁾ Die überrückte Form des Winkelsatzes läßt sich leicht in die statische übersetzen: Winkel (in) einem Dreieck (d. h. einem und demselben Dreieck) (betragen) 180°. Oder in eine drückliche: Dreieckswinkel betragen 180°.

²⁾ I. h. der Identität. Kurz ist unser Wunsch, eine der Subsumption, der Identität sei die Abgrenzung.

darum anders bezeichnet), oder daß sie unter einem bestimmten höheren Begriff gefaßt. Bei den mathematischen Sätzen handelt es sich vielmehr darum, daß eine Beziehung zwischen zwei bestimmten Größen einem gewissen Wert, einem Größenwert besitzt. Den gegenwärtigen Wert der verschiedenen Größen und aller der Beziehungen, die zwischen ihnen bestehen, anzugeben, darin liegt eigentlich das Wesen aller mathematischen Sätze. Der Beziehungsbegriff, der diese Wertangabe vermittelt, wird wiedergegeben durch die Wörter „ist gleich“¹⁾. Darum nehmen alle diese Sätze die Form der Gleichung an.

Dieser Vergleich nimmt nun bei den mathematischen Sätzen des elementaren Rechnensunterrichts eine besondere Bedeutung an. Während nämlich sonst irgend welche Beziehungen standes gleichgesetzt werden können (z. B. der Peripheriewinkel ist

gleich dem Scheitel-Tangentenwinkel, $a + b + c = d$, $\sqrt{\frac{a}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{a}$ uel.),

so werden hier, wie an obigen Beispielen gezeigt worden ist, sämtliche rechnerischen Beziehungen gleichgesetzt einem bestimmten Werte im Zahlensystem. Der Systemwert erscheint damit gewissermaßen als gemeinsamer Maßstab, der an jede Beziehung angelegt wird, und mittels dessen wir in der Lage sind, die verschiedenen Beziehungen miteinander zu vergleichen. Eine rasche Schätzung läßt die Beziehungen 7·8 und 8·9 als annähernd gleich erscheinen. Die den Systemwert niedrigsten mathematischen Sätze aber besagen, daß jene erste Beziehung um 2 größer ist als diese zweite. Ebenso ist die Beziehung 8·12 um 1 größer als 7·11. Weiter stellen wir mit Hilfe des Systemwertes die Gleichheit vieler Beziehungen fest. So bekommt die Multiplikationsbeziehung zwischen den Zahlgrößen 8 und 9 den Systemwert 72. Da nun dieser Systemwert auch erscheint bei der Multiplikationsbeziehung der Zahlgrößen 8 und 12, 4 und 18, 3 und 24, 2 und 36, so lassen sich alle diese Zahlbeziehungen einander gleich setzen²⁾. Ebenso lassen sich aber auch 2·12, 30·6, 10·14, 36·4 gleich setzen, nachdem von jeder dieser Zahlbeziehungen festgestellt worden ist, daß sie den Systemwert 72 hat. Im Bilde läßt sich die Sache auch so darstellen: Die ungetrübte Menge der verschiedenen Zahlbeziehungen zwischen

¹⁾ Von den hier aufgeführten Beziehungsbegriffen — größer, kleiner, gleich — wird in der weit überwiegenden Mehrzahl der Fälle derjenige bevorzugt, der die größte Genauigkeit zeigt.

²⁾ Es entspricht hier zunächst nur die Tatsache des gleichen Systemwertes verschiedenen Zahlbeziehungen. Die Begründung und der tiefere Inhalt in der Folgeentwicklung ist eine komplizierte Erscheinung und gehört nicht mehr zu mathematischen Existenzsätzen an, welche die Kenntnis jener Tatsache ersetzt.

den unzählig vielen Zahlgrößen müssen untereinander verglichen werden können. Dabei scheitern so viel Taktarien durcheinander, als es Zahlen gibt, der Einsachtheits der Zahlenreihe außerdem noch. Sie alle müssen auf einen gemeinsamen Rhythmus gebracht werden, das ist der des Zehnersystems.

Dabei darf nicht der Einwand erhoben werden: Man brauche doch nicht die Systemzahl 6, um zu wissen, daß $3 \cdot 2 = 4 + 2$ und daß $4 \cdot 4 = 2 \cdot 8$ sei. Innerhalb eines begrenzten Zahlenraumes, der bei den meisten nicht wesentlich über den ersten Zehner hinausgeht, bei einzelnen aber auch sehr viel weiter reichen kann, sind wir nämlich in der Lage, anschaulich vorstellend die Zahlen und ihre Beziehungen zu vergleichen. Ein mathematisch Gebildeter erkennt sofort, daß $10 + 14$ gleich ist $2 \cdot 12$, ohne erst jedes für sich auszurechnen, d. h. an den Systemwert zu denken. Er sieht nämlich gewissermaßen in der Vorstellung die eine Zwei von der 14 zur 10. Aber schon die Gleichung $11 + 15 = 3 \cdot 8$ wird auch von mathematisch gut Begabten leichter auf dem Umwege über den Systemwert 10 anerkannt werden. Der Einwand also, daß der Systemwert nicht überall zum Bewußtsein zu kommen braucht, berührt nicht die Tatsache, daß die elementaren Rechenaktive einfach Gleichungen sind, in denen der Wert einer bestimmten Beziehung zwischen zwei Zahlgrößen mittels eines gemeinsamen Maßen ausgedrückt wird, nämlich mit dem Systemwert.

Alle diese Rechenaktive lassen sich daher auf die allgemeine Formel bringen: Die Beziehung m zwischen den beiden Komponenten a und b erhält den Systemwert c . In dieser Formel ist bisher außer den Zahlgrößen a , b , c der Gleichheitsbegriff betrachtet worden, der hier durch den Ausdruck „erhält“ wiedergegeben ist.

Es ist nunmehr nötig, die Aufmerksamkeitskraft auch dem veränderlichen Beziehungsbegriff — in der obigen Formel m — zuzuwenden und damit die Frage zu beantworten: Welches sind die verschiedenen Beziehungen zwischen den Zahlgrößen, die für das Rechnen in Betracht kommen? oder: Welches sind die in Betracht kommenden Rechenoperationen?

Jahrhunderte alte Gewohnheit spricht in dieser Hinsicht von den „4 Species“ des Rechnens, dem Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren. Eine andere, höhere Auffassung stellt die Sachlage so dar: Die einfache aneinander rückende Verbindung von Zahlgrößen ergibt die Addition und den Begriff der Summanden: $4 + 3 + 2 = 9$; die Verbindung gleicher Summanden ergibt die Multiplikation und den Begriff der Faktoren: $3 + 3 + 3 + 3 = 4 \cdot 3 = 12$; die Verbindung gleicher Faktoren endlich ergibt das Potenzieren: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$. Zu diesen drei Operationen kommen noch ihre „Umkehrungen“, nämlich zur Addition die Subtraktion, zur Mul-

plikation die Division, zum Potenzieren aber gibt es zwei Umkehrungen, nämlich das Radizieren und das Logarithmieren, womit also die Summe der Operationen von 4 auf 7 anwächst.

Es ist nun nicht schwer einzusehen, daß auch diese Auffassung noch nicht als ausreichend betrachtet werden kann. Sie ist der praktischen Handhabung, nicht aber dem Wesen der Sache entgegen. Operationen aber, Verhältnisse zwischen den Zahlen, Beziehungen zwischen den Zahlgrößen können nur aus dem Wesen der Zahlen selbst erwachsen. Wer sich darüber klar ist, steht vor der Frage: Warum soll das Potenzieren zwei Umkehrungen haben? Entweder die anderen Grundoperationen, das Addieren und Multiplizieren, haben auch je zwei Umkehrungen, oder der Begriff der Umkehrung ist mehrfach in verschiedenem Sinne angewendet.

Um diese Frage zu beantworten, müssen wir uns zunächst darüber klar werden, welche Beziehungen zwischen den Zahlen möglich sind. Wenn wir die Zahlgrößen 8 und 5 ins Auge fassen, so kann ausgesprochen werden, daß sie als zu gleicher Zeit vorhanden und als zusammengehörig betrachtet werden sollen. Eine vollständige Auffassung würde genügt sein, hierfür die mathematische Formel zu verwenden $8+5=13$. Dem tiefer stehenden Blick aber entgeht nicht das Gefühl, daß das doch nicht recht angemessen ist. Er findet in der mathematischen Formel eigentlich etwas anderes verkörpert. Doch sehen wir uns zunächst nach weiteren Möglichkeiten um. Eine andere Art von Beziehungen läge vor, wenn wir uns die Aufgabe stellen, die beiden Zahlgrößen — welche ebenfalls als zu gleicher Zeit vorhanden zu betrachten wären — miteinander zu vergleichen. Auch hier stellt sich dem Schließenden eine mathematische Formel zur Verfügung: $8-5=3$. Doch erleben wir hier in noch stärkerem Maße das Gefühl des Widerspruchs, als bei der Anwendung jener ersten Formel. Dazu kommt, daß die zweite Beziehung doch unzulässig eine „Umkehrung“ der ersten sein kann. Es lassen sich vielmehr dahin erklären, daß beides eben „Beziehungen“ einfacher Art sind, die sich kaum mehr zerlegen, sondern eben nur mit diesem Ausdruck erfassen lassen, so daß man die erste von beiden bezeichnen kann als die Aufeinander-beziehen im engeren Sinne, das sich gleichgeordnet neben die zweite, wenn das Vergleichen stellt und mit ihm räumlich den weiteren Begriff der Beziehung ergibt.

Zusammenfassungen und Unterscheidungen, wie wir sie gesehen an diesen Begriffen ausgeübt haben, werden so noch besseren Ergebnissen führen, wenn wir erst noch weitere Möglichkeiten betrachtet haben.

Neben jener Auffassung, daß die beiden in Betracht kommenden Zahlgrößen als gleichzeitig vorhanden vorgestellt werden sollen, ist

die andere denken, daß zunächst nur der eine Zahlbegriff — 8 — gedacht werden solle, und daß ihm dann der andere, der 5, zu folgen hätte mit der Aufgabe, die vorher gegebene Menge zu vermehren. Das wäre freilich eine ganz andere Beziehung zwischen den beiden Zahlbegriffen 8 und 5 als die beiden ersten. Zunächst wäre die von größerer Komplikiertheit, dann aber auch von anderer Art, insbesondere würde das Moment der Bewegung jener Reihe gegenüber, die die ersten kennzeichnet, die andere Art des Charakters bestimmen. Wenn „ruhenden“ Beziehungen gegenüber könnten wir sie eine fortschreitende oder operative nennen. Denn das wesentliche Merkmal dieser Beziehung würde nicht die Auffassung zweier als gleichzeitig vorgestellten Zahlgrößen sein, sondern die aufsteigende Bewegung innerhalb der Zahlenreihe, wobei der Blick von der einen vorhandenen Zahlgröße hinweg und auf eine neu zu gewinnende gelenkt wird. Die vorhandene Zahlgröße ist gewissermaßen der bei jener aufsteigenden Bewegung bisher erreichte Punkt. Aber es ist kein Endpunkt, sondern nur eine Station, ein Stützpunkt, der den Blick nach vorwärts gleiten läßt. Die graphische Darstellung dieser Beziehung würde erfolgen können durch eine gerade Linie, auf der ein bestimmter Punkt die zuerst gedachte Zahlgröße kennzeichnet¹⁾. Dieser Punkt wird gleichzeitig angesehen als Nullpunkt der zweiten Zahlgröße, deren Endpunkt nunmehr auch den Endpunkt der ersten, der gesuchten Zahl bezeichnet.



Und ihre mathematische Form erfolgt widersprechendes so:
 $74 + 17 = 91$.

Von einer absteigenden Bewegung ist aber ohne weiteres eine Umkehrung denkbar, eine absteigende Bewegung. Sie hätte den Sinn, in der Zahlenreihe von einem bestimmten Punkte aus — der ersten Zahlgröße — um ein bestimmtes Stück — die zweite Zahlgröße — zurückzugehen, d. h. tatsächlich eine gewisse Größe hinzugraben, die erste Zahl zu vermindern. Ihre graphische Darstellung könnte folgende Form:



Hier hat die erste Zahlgröße die Bedeutung eines Endpunktes, der um ein bestimmtes Stück — die zweite Zahlgröße — weiter zurück

¹⁾ Man könnte auch, wie es bei höheren Zahlen tatsächlich geschieht, die ganze Strecke von Null bis zur betreffenden Zahlgröße ins Auge fassen.

verlegt werden soll. Die mathematische Form dieser Beziehung wäre: $50 = 14 \cdot 35$.

Nunmehr sind wir in der Lage, die verschiedenen Beziehungen zu übersehen und zu vergleichen. Es sind zwei ruhende und zwei fortschreitende. Jene ruhenden aber kennzeichnen sich noch deutlicher als die Beziehung der Gliederung und die des Vergleichs oder der Unterscheidung. Graphisch ließe sich das so darstellen:



Bisher haben wir nur die Zahlenbeziehungen der Additionsgruppe betrachtet. Es bedarf keiner Ausführung, daß auch bei den übrigen Beziehungsgruppen — sowohl bei der Multiplikation, als auch beim Potenzieren — von ruhenden und fortschreitenden Beziehungen gesprochen werden kann. Wenden wir uns zunächst der Multiplikation zu!

Die aufsteigende operative Beziehung besteht hier darin, daß eine gewisse Zahlgröße mehrfach gedacht werden soll: die 5 fünfmal genommen, ergibt den Systemwert 50. Es besteht dabei zunächst die Vorstellung, daß eine gewisse Zahlgröße — 5 — mehrfach — hier fünfmal — aneinandergelegt wird, wodurch eine wiederkehrende Vermehrung der genommenen Zahlgrößen eintritt. Infolgedessen gelangt man in der Zahlenreihe zu dem Punkt 50 (der zufällig auch im System eine hervorragende Stellung als ganzer Zehner einnimmt). Bei dieser Vorstellung kommt nun das Moment des Aufstiegs in gleichen Schritten zur vervollkommenen zur Darstellung. Zu klarem Ausdruck gelangt es, wenn wir die Zahlenreihen übereinander anordnen, so daß der Vergleich sich anbietet, also das obige Beispiel so darstellen:



Damit wird aber für die graphische Darstellung der Multiplikation die Fläche als geeignetster behouden. Sie nimmt noch zweckmäßiger die folgende Form an,



wobei wir uns die kleinen Quadrate jeder Sechserreihe völlig zusammengepackt denken können, um die hundertfältige Setzung zu verdeutlichen, wobei wir aber auch alle Quadrate auseinanderziehen können, um den Eindruck der Fläche zu erhöhen.

Die absteigende operative Beziehung besteht nun darin, die Zahlgröße 30 in derselben Weise wieder abzuhaken. War es vorher gewonnen worden durch hundertfältigen Aufbau einer gewissen Zahlgröße, so wollen wir beim Abhakn diese Zahlgröße erkennen, indem wir fragen: Welche Zahlgröße ist es, die bei hundertfältigen Abhakn der 30 erscheint? Es ist das die Operation des Dividierens, genauer des Verteilens. Denn dort, wo wir die Verhältnisse nicht gleich übersehen können (bei drei- und mehrstelligen Zahlen), begreifen wir damit, zunächst einen Teil der ganzen Zahlgröße in solcher Weise abzuhaken. Bei $470:3$ z. B. verteilen wir zunächst nur 45 Hunderte auf. Eine graphische Darstellung dieses Verteilens müßte aussehen von einer Darstellung der Zahlen im Zehnsystem, auf die später noch zurückzukommen ist.

Die ruhende Beziehung der Gliederung oder, wie wir auch sagen können, die Strukturaffassung des Zusammenhangs sieht das obige Bild der Hund Sechsen fertig vor sich. Sie wird sich der Teile bewußt, die zusammengepackt sind, um das Ganze zu bilden: $30 = 5 \cdot 6$. Sie bedeutet hier also das Zerlegen in Faktoren.

Die ruhende Beziehung des Vergleichs, die Strukturaffassung des Unterschieds, vergleicht die beiden Zahlgrößen der 6 und der 30 und fragt: Wie oft erscheint die eine in der anderen? Es ist die Operation des Enthaltenseins oder des Messens. Sie schreibt 6 in 30 geht 5 mal. —

Die Gruppe der Potenzoperationen läßt sich nunmehr noch rascher erledigen. Die aufsteigende operative Beziehung ist natürlich das Potenzieren selbst: $4^2 = 16$. Das heißt, es wird der Systemwert festgestellt, der jener Beziehung entspricht, da man die Zahlgröße 4 dreimal mit sich selbst multipliziert. Als graphisches oder entsprechendes Darstellungsmodell möchte man hier gern an den Körper denken, in obigem Beispiel an den Würfel. Dessen Darstellungsforn reicht aber nur bis zur 3. Potenz. Das ist eine Unzulänglichkeit. Wir wenden uns darum zur Linie und finden sie ganz geeignet zur Darstellung des Begriffs 4^2 .



Die ganze Strecke stellt das 4^2 .

Besser noch eignet sich die Fläche dazu. Die waagrecht angeordneten 4 Millimeterquadrate in der linken oberen Ecke bedeuten 4, das kleine Quadrat von 16 quad. Größe bedeutet 4^2 ; die

wagrecht nebeneinander liegen und 4 dreieckigen Quadrate d^2 ; die nebeneinander liegenden Rechte, also das Quadrat von $16 \cdot 16$ ganz ist d^4 ; endlich die ganze Fläche d^6 .



Man sieht, daß auch die 7., 3., überhaupt die ungradmäßigen Potenzen die Form des Rechtecks, die gradmäßigen die Form des Quadrats annehmen.

Die absteigende operative Beziehung fragt nun nach der Zahl, welche man eine bestimmte Anzahl mal mit sich selbst multiplizieren sollte, um zu der vorhandenen Gesamtzahl zu gelangen. Sie ist gegeben im Wurziehen: $\sqrt[4]{16} = 2$.

Die ruhende Beziehung der Gliederung besteht im Überblick über die Teile: $128 = 2^7$. Die ruhende Beziehung des Vergleichs endlich ist das Logarithmieren: $\log 343$ zur Basis $7 = 3$ oder mit der üblichen Bezeichnung der Briggs'schen Logarithmen: $\log 100 = 2$. Es ist ein Mensch mit der Frage: Wie oft muß ich — in obigen Beispiel — die 7 mit sich selbst multiplizieren, um 343 zu erhalten?

Nunmehr ist es möglich, den Überblick über die Zahlbeziehungen noch klarer zu gestalten. Die aufsteigende fortschreitende Beziehung ist in jeder Gruppe ein Hinzufügen, ein Vermehren. Die absteigende fortschreitende Beziehung ist überall ein Wegnehmen, ein Vermindern. Die ruhende Gliederungsbeziehung erscheint als ein Zerlegen in Summanden, in Faktoren, in Potenzen. Die ruhende Vergleichsbeziehung endlich ist ebenfalls ein Messen, ein messendes Messen, das sich für den Unterschied interessiert, wenn die 17 mit der 19 verglichen wird; ein multiplizierendes Messen, wenn die 6 mit der 72 verglichen wird; ein potenzialmessendes Messen, wenn man 6 mit 625 vergleicht. Übersichtlich gestalten sich demnach die Zahlbeziehungen so:

Fortschreitende Beziehung		Ruhende Beziehung	
Aufsteigend	Absteigend	Gliederung	Vergleich
addieren	subtrahieren	zerlegen in Summanden	add. Messen or Vergleich nach Rechenart
multiplizieren	teilen	zerlegen in Faktoren	multipl. Messen or Vergleich nach Potenz
potenzieren	radizieren	zerlegen in Potenzen	potenz. Messen or Logarithmieren

Nachdem so die verschiedenen Zahlbeziehungen durch alle Gruppen hindurch betrachtet worden sind, schließt sich, einen vergleichenden Blick den Gruppen selber zuzuwenden. $1+3$, $1\cdot 3$, 4^3 mögen als Beispiele dienen. In ähnlichen Fällen sind denselben Zahlgrößen vorhanden, und doch fühlt man bei flüchtigen Hinschen, daß beispielsweise die 4 jedesmal einen anderen Charakter hat. Wir können uns darüber klar werden, wenn wir statt der reinen Zahlgrößen, der Zahlbegriffe, Stellvertretungsverstellungen benutzen: $4\ \mathcal{A}$ und $3\ \mathcal{A}$, $4\ \mathcal{A}$ mal $3\ \mathcal{A}$, $4\ \mathcal{A}$ hoch $3\ \mathcal{A}$. Wir sehen: Sinn hat jetzt nur noch das erste Beispiel. Beim zweiten müssen wir unbedingt einmal die Bezeichnung weglassen, also 4 mal $3\ \mathcal{A}$ oder $4\ \mathcal{A}$ mal 3 ; beim Potenzbeispiel aber ist auch $4\ \mathcal{A}$ hoch 3 noch sinnvoll, was ja schon aus dem Multiplikationsbeispiel hervorgeht. Die Potenz trägt daher überhaupt keine Bemerkungen der in Beziehung zueinander stehenden Zahlgrößen⁷⁾.

In dem Multiplikationsbeispiel sehen wir also am deutlichsten, daß die beiden in Beziehung zueinander tretenden Zahlen einem verschiedenen Charakter haben: die eine läßt sich dinglich, stofflich, räumlich vorstellen, die andere nicht; dafür führt diese ein Dasein, das den Charakter der Erscheinung oder der Kraft hat und sich in der Zeit vorstellen läßt. Nennen wir daher die erste eine Substantialzahl, die andere eine Funktionalzahl, worfür auch die Ausdrücke passive Zahl und aktive Zahl zu brauchen wären.

Hiernach läßt sich der Unterschied in den Beziehungsgruppen auch so darstellen: In der Additionsgruppe erscheinen die Beziehungen zwischen zwei passiven Zahlen, in der Multiplikationsgruppe die zwischen einer passiven und einer aktiven Zahl, während die Potenzgruppe lediglich mit aktiven Zahlen arbeitet⁸⁾.

Freilich bedarf die oben ausgeführte Unterscheidung der drei Operationsgruppen noch einer leisen Abschwächung. Der uns typisch erscheinende Rechenfall ist der der Multiplikation, wo eine Substantialzahl mit einer Funktionalzahl zusammenfällt. Es ist dies vorzüglich an einem Punkte, wo die konkreteste Grundlage des Rechnens mit einer gewissen Entwicklungshöhe der Abstraktion gleichzeitig in Erscheinung tritt. Dieser Gedanke ist nun so stark wirksam, daß

⁷⁾ Diese völlig andere ist es natürlich, wenn man eine Potenz, nachdem sie abgeleitet ist, mit einer Bemerkung versehen, z. B. 4^3 dann, 10^3 Pfund. Das heißt aber, es sollen vierel das, vierel Pfundige gemeint werden, als die Potenz 4^3 , 10^3 angibt.

⁸⁾ Charakteristisch ist dies auch hervor in den wissenschaftlichen Ausdrücken, die die in Beziehung stehenden Zahlen haben: Quadrat, Kubus, Summe, Produkt, Durchschnitt und alle passive Bezeichnungen; dagegen treten bei Subtraktion, Multiplikation und Multiplikation, Division und Division, während der Charakter zweier aktiven Zahlen keine Formeln von der Umgebung inhaltlich auch nicht erfüllt werden konnte (z. B. Rest und Exponent).

auch bei der Additionsgruppe, die sinngemäß nur Substanzfaktoren der gleichen Art brauchen kann¹⁾, dennoch die eine Zahl einem reinen funktionalen Anstrich enthält: die erste Zahl wird vermehrt, die zweite vermindert die erste; die erste wird vermehrt, die zweite vermindert. Während also die erste Zahl deutlich passiv erscheint, zeigt die zweite eine Spur von Aktivität.

Anderswärts hat die Potenzgruppe in ihrer ersten Zahlgröße einen Rest von einer Substanzfaktormacht bewahrt. Schon im sprachlichen Ausdruck erscheint er: 5^3 bedeutet, die 5 solle dreimal mit sich selbst multipliziert werden. Der mehr passive Charakter der Basis, der mehr aktive des Exponenten ist deutlich zu erkennen. Graphisch läßt sich das so darstellen: Die völlig passive Zahl mag durch einen schiefen, aufwärts gehenden Strich angedeutet werden \diagup , die völlig aktive Zahl durch einen eben solchen abwärtsgehenden \diagdown . Statt daß nun die Bilder für die drei Operationsgruppen diese Form hätten:



bekanntes wie diese:



In der Gliederungsbeziehung tritt der Charakter der passiven und aktiven Zahl weniger hervor, und zwar sowohl bei jenen ($10=3+8$) als auch bei diesen ($100=10^2$). Beim Vergleich dagegen wird man sich des Unterschieds wieder stärker bewußt. Bei „17 verglichen mit 19“ erhält die 2 einen stark funktionalen Anstrich; bei 10 in $80=8$ zeigt sich der funktionale Charakter der 8 ganz deutlich; bei 4 ist, um zu 1024 zu gelangen, 4 mal mit sich selbst zu multiplizieren, ist ebenfalls die größere Aktivität der 4 unverkennbar. Das ist verständlich, wenn man erwägt, daß der Systemwert, der als Ergebnis der fortschreitenden Beziehung erscheint, jederzeit, auch in der Potenzgruppe, substanzfaktoralen Charakter hat. Das Ergebnis der Vergleichsbeziehung muß daher mehr oder weniger funktionalen Gepräge seligen.

Nunmehr sind wir auch in der Lage, die Beziehungsarten noch klarer zu überschauen als bisher. Wir haben die sogenannten reinen Beziehungen von den operativen unterschieden. In diesen letzteren erkennen wir die „Operationen“ des Rechensunterrichts

¹⁾ Man kann nicht damit läßt und einen zusammenfassen, wenn man nicht begründete Anforderungen stellen will.

wieder, deren Zahl wir nunmehr auf 6 festlegen: 3 aufsteigende und 3 absteigende.

Wenn wir beide Arten gegeneinander halten, so ergibt sich uns das Wesen der operativen darin, daß aus zwei vorhandenen Zahlgrößen eine neue gewonnen wird, die mehr oder weniger substantiellen Charakter hat. Die ruhenden aber sind anderer Natur. Bei ihnen handelt es sich nicht um das Gewinnen einer neuen Zahlgröße, sondern darum, die einzelne Zahlengröße immer genauer zu kennzeichnen, sei es, daß dies geschieht durch Angabe der Teile, der Gliederung, sei es durch Angabe der Differenz, der Unterscheidungen von einer anderen bekannten Größe¹⁾.

Aus dieser Kennzeichnung ihrer Eigenschaften ersahen wir, daß die ruhenden Beziehungen gewissermaßen eine Mittelstellung einnehmen zwischen den Zahlgrößen und den Operationen, ja, daß sie sogar als zeitliche Fortentwicklungen der Zahlgrößen²⁾, und zwar hier auf der 8. und den folgenden Stufen erworbenem, angesehen werden können. Eine solche zeitliche Fortentwicklung konnten wir schon bei den ersten unbestimmten Zahlbegriffen „mehr“ und „weniger“ nachweisen, indem ohne Feststellung der eigentlichen Anzahl auch bei größeren Mengen das Mehr oder Weniger mit ständiger Sicherheit angegeben wurde. In denselben Sinne entwickeln sich die bestimmten Zahlgrößen, indem als Begriffselement, als wesentlicher Merkmal die ruhenden Beziehungen in sie eingeht, ja fast mit dem Systemwert verschmilzt. Während das 10jährige Kind beispielsweise an der 578 kein größeres Interesse hat als an der 574, so kommt es, daß der mathematisch Interessierte jense 575 mit ganz anderen Augen ansieht, da er sich sofort ihrer Gliederung in 54:54 bewußt wird. Ebenso geht es ihm mit 111, 144, 169, 196, 225, 243, 256, 288, 324, 343, 361, 384, 412, 441, 484, 512, 529, 576, 675, 1021, 1084 und vielen anderen³⁾.

Fragen wir nun nach der Bedeutung der beiden Arten von Beziehungen, so dürfen wir geneigt sein, den Fortschreitenden die ungleich größere zuzuschreiben. Denn im Schachrechnen wie im Rechnen des praktischen Lebens nehmen sie eine demütig beherrschende Stellung ein, daß ihnen gegenüber die ruhenden Beziehungen kaum in Betracht zu kommen scheinen. In dem „Species“ sieht man über-

¹⁾ Es ist ähnlich, wie wenn wir eine Person bezeichnen: Sie hat diese Augen und diesen Haar, gute Zähne und ungutartige Haare (Färbung); sie ist etwas größer als die mit hat etwas andere Wangen, auch sind ihre Bewegungen nicht ganz so gewandt als die dieses und. (Vergleiche).

²⁾ Diese Weiterentwicklung der Zahlgrößen konnte naturgemäß erst klar beobachtet werden.

³⁾ Wir haben schon mehrfach die Erfahrung gemacht, daß solche Personen, u. B. auch die Beamten der Eisenbahnen sich sofort beim Entziffern in Faktoren zerlegen lassen.

hapt war „Operationen“, andere Zahlbeziehungen kennt man anscheinend nicht, und auch die mathematischen Formen sind so gut wie gänzlich auf die operativen Beziehungen eingestrichelt¹⁾.

Eine solche Bewertung würde aber den Tatsachen nicht ganz gerecht. Denn indem die ruhenden Beziehungen gestärkt sind, den einzelnen Zahlbegriff auf eine höhere Stufe der Entwicklung zu heben, erscheinen sie als eine bedeutungsvolle Erleichterung und Sicherung der Ergebnisse der fortschreitenden Beziehungen, der Operationen. Wer in dem oben angeführten Sinne die 384 und die 192 kennt, wird nicht nur ihre Differenz ohne Rechnen mit völliger Sicherheit als 192 berechnen, er wird sich auch dessen bewußt sein, daß diese Differenz in der einen Zahlgröße 2 mal, in der anderen 3 mal enthalten ist und selbst aus $8 \cdot 24$ besteht usw. Das Kind aber und der kleine Rechner, dessen Zahlbegriffe nicht die weitere Entwicklung mittels der ruhenden Beziehungen gefunden haben, wird langsam verrechnen und in nicht wenig Fällen 288 oder 182 herausbekommen; in dem anderen Fällen aber, da das richtige Ergebnis gewonnen wird, fehlt ihm das Bewußtsein der Sicherheit, was sich darin zeigt, daß er auf den Zuruf „falsch!“ auch neue zu rechnen anfängt.

Auf diese Erleichterung und Sicherung der Operationen mittels entwickelter Zahlbegriffe, der fortschreitenden Beziehungen mittels der ruhenden, wird selbst eine elementare mathematische Bildung nicht verzichten dürfen²⁾. Insbesondere ist es notwendig, daß wenigstens die Zahlbegriffe des ersten Hundertens Klassen weiter entwickelten Charakter angenommen haben. Daher ist es verständlich, wenn die ruhenden Beziehungen von einzelnen Fachlehrern als Grundlage für die Operationen aufgeführt und behandelt worden sind.

Rückblickend läßt sich die Bedeutung der ruhenden gegenüber den operativen Beziehungen weniger abwiegen, als vielmehr treffend kennzeichnen, wenn wir sagen: Diesen kommt die Gestaltungskraft zu, jenen die Beweiskraft.

¹⁾ Während die zutreffende operative Beziehung in der mathematischen Form $7+2=10$, und die zutreffende operative in der anderen: $10-2=7$ besteht, so läßt sich für die Beziehung der Gliederung ebenfalls die Sätze: $10=7+2$, während die Vergleichsbeziehung dieser Operationsgruppe durch keine der üblichen mathematischen Formen unverwundlich ausgedrückt wird. Am genauesten und strengsten wäre noch: 7 ist um 2 größer als 4.

²⁾ Unter Umständen ist die Stilleheit oder die Versenkung mehr wert als ein großes Kapitel. Dabei weist dem Bild ja nur auf die eine Seite der Beziehung der ruhenden Beziehungen hin.

§ 13. Die Entwicklung der Operationsbegriffe.

Manche Methodiker scheinen der Meinung zu sein, die Operationsbegriffe seien gewissermaßen angeboren; oder sie seien in einem solchen Grade selbstverständlich und voraussetzbar, daß ihre Bedeutung gegenüber der der Zahlbegriffe völlig in den Hintergrund tritt; oder sie würden zugleich mit den Zahlbegriffen erworben. So schreitet die Grubendorfs Rechenmethode von Zahlindividuum zu Zahlindividuum fort, von der 4 zur 5, zur 6, immer so, daß an jeder Zahl möglichst alle Operationen durchgeführt und gegenseitig in Verbindung gebracht wurden. Und dies geschah nicht nur in einem Zahlenreize, den auch mathematisch minder Entwickelte zu übersehen vermögen, sondern im ganzen ersten und zweiten Jahre. Ja, einzelne Schüler gingen weit darüber hinaus und erledigten auch die Zahlen des ersten Hundertens „nach der monographischen Methode“.

Der Irrtum, der dieser Methode zugrunde liegt, hat weitreichende Wirkungen. Darum müssen wir an die Spitze dieses Abschnittes den Gedanken stellen — der uns schon im vorigen Abschnitt vom Wesen der Operationsbegriffe selbstverständlich und gänzlich war — daß die Operationsbegriffe etwas von den Zahlbegriffen völlig verschiedenes sind. Das will zugleich sagen, daß sie auch nicht mit ihnen entstehen oder aus der intuitiven Meinungen mehr sind.

Mancher Lehrer, ja eigentlich jede beobachtende Mutter hat schon die Erfahrung gemacht, daß dem Teilen eine Unlust ist, die dem Kinde einer gewissen Alterstufe noch so gut wie fremd ist. Die Erziehung in dieser Richtung beginnt mit der Gewöhnung, einen Teil, d. h. ein kleineres Stück von dem eigenen Gut an andere abzugeben, an die Geschwister¹⁾ oder an Tiere usw. Und selbst wenn dies Teilen wirklich schon von der Kinderschwel gewozzen worden ist, so hat es noch sehr wenig zu tun mit dem Teilen im mathematischen Sinne. Es ist dann noch auf lange Zeit hinaus ein Abstreifen: Von einem Teiler Stuck bekommen die Geschwister jedes zwei, und wenn sich noch genügend darauf finden, und sie nicht aufgehoben werden sollen, noch eine oder zwei. Ein Rechnen tritt hier nicht ein, um obersten noch bei mathematisch besonders Entwickelten, und auch dann erst, wenn eine gewisse, nicht so niedrige Stufe dieser Entwicklung erreicht ist. Bei verschulspflichtigen Kindern konnten wir das noch niemals beobachten. Aber daß in jedem wohlhabenden Teile eine frühe Fortstufe des mathematischen Teilens gegeben ist, erscheint unweifelhaft.

¹⁾ Die ethische Bedeutung mehrerer Geschwister wird hier nur mathematisch-psychologischer Seite betrachtet.

Nicht anders ist es mit dem Hinzufügen. Das Hinzufügen immer neuer Spielzeugen zu dem alten — neuer Metallklötzen zu den alten auf. — sieht das Kind gern. Aber bestanden, wieviel es nun geworden sind, dafür hat das Kind nicht das Bedürfnis, dazu kann es höchstens der Wusch der Hände vernachlässigen. Das Mädchen gibt seinen Puppen Namen, der neuen sofort auch einen. Aber wenn man mit ihm rechnen wollte: Erst hattest du 4 Puppen, nun noch eine neue dazu; wieviel hast du nun? dann kommt in den meisten Fällen die Antwort: Nun noch die Bertha. — Ähnlich ist es mit dem Zählstrahlern. Im Fließbachschonpaket, das auf dem Wehrschlammsteck lag, werden es immer weniger. Aber wieviel noch drin sind, wenn zwei gegessen wurden, das zu wissen verlangt das Kind nicht. Dadurch werden es doch nicht wieder mehr.

Aus diesen Beispielen geht zweierlei hervor: 1. daß mit dem Gewinnen der Zahlbegriffe durchaus nicht Hand in Hand geht das Gewinnen der Operationsbegriffe; 2. daß das Kind die Operationsbegriffe zunächst in einem ganz anderen Sinne erwirbt, als er für die mathematische Behandlung in Betracht kommt.

Diesen zweiten Gehalten erläutern noch folgende Erfahrungen. Wenn das Kind noch mehr Hunger hat, bekommt es noch mehr Suppe. Zahlen kommen dabei gar nicht in den Bereich des Bewußtseins, etwa wieviel Löffel hinzugelegt wurden und wieviel es nun im ganzen sind. Das Vermindern irgendwelcher Güter geschieht ununterbrochen durch den Gebrauch: die Milch im Topf, die Kohlen im Kessel; selbst die Stärke der Schreie sinken vermindert sich, ohne daß Zahlen in Betracht kommen könnten. Das Mehrnehmen erfolgt auch täglich. Zweimal darf das Kind einen Apfel nehmen, dreimal hat es sich an die Tür geschoben, jedesmal hebt es dem Vater die Hausschabe, vielmals kann es den Ball fangen usw.

Angesichts dieser Beispiele könnte freilich der Einwand laut werden: Da sieht man ja, daß das Kind längst mit den Operationsbegriffen vertraut ist, sogar schon, ehe es eigentlich an Zahlen herankommt. Dieser Einwand ist im Wortlaut berechtigt, in seiner Forderung aber unberechtigt. Denn die Forderung, welche die betreffenden Methodiker ziehen zu dürfen glauben, lautet: Die Kinder können das, wenn sie die Zahlbegriffe erworben, verknüpfen mit den Zahlbegriffen operieren lernen. Der Irrtum, der darin liegt, liegt sich auf die allgemeine Formel bringen: Daß Kind, das an Dingen irgendwelche Tätigkeit ausgeübt hat, könne diese Tätigkeit verknüpfen auf Begriffe übertragen. So wenig schwer das vielen Erwachsenen auch erscheinen mag, so ist es doch für das Kind etwas völlig Ungewohntes und Neues, das erst zu erlernen wäre. Umgekehrt kann man nicht selten beobachten, wie ein fast 6-jähriges Kind wohl schon mit einer nicht geringen Menge von Zahlbegriffen umgehen kann. —

zum grunde sollte — ohne die Operationen zu benutzen. Es zählt alles, was ihm unter die Hand kommt; aber daß man beispielsweise eines, was man gezählt hat, mehrnehmen könne, dem bringt es nicht das geringste Verständnis entgegen.

Noch viel mehr gilt das vom Gleichheitsbegriff, von der Gleichheitsbeziehung. Wie die obigen Beispiele zeigen, vermehrt und vermindert und verleiht das Kind seine Schätze, ohne nach dem Ergebnis zu fragen. Es hat 12 Soldaten und bekommt noch 4 dazu. Man kann es eine ganz große Reihe aufstellen, so lautet sein Ergebnis. Und das Vermindern führt erst dann zur zahlmässigen Feststellung, wenn von den vielen Hölzerlecken noch 2 oder 3 übrig sind. Als es noch 11 waren, frag das Kind nicht nach dem Ergebnis der Verminderung. Beim Vorstellen der Nüsse fragt es wohl die Geschwister, wieviel jedes habe; dies geschieht aber nicht, um feststellen, wieviel jedem es geben möglich sei, sondern nur, wenn der Zweifel aufgewacht ist, die einzelnen könnten ungleich viel erhalten haben. Auch die Untersuchungen Meumanns haben wissenschaftlich festgelegt, was wir in obigen Ausführungen an eigenen Beispielen dargestellt haben. Er sagt (AbtS S. 879): „Nachdem die Zahlvorstellungen sich entwickelt haben, fehlt dem Kinde jede Fähigkeit, die einfachsten Operationen auszuführen.“

Ein Unterricht also, der mit Operationen beginnen wollte, während sich die Kinder noch auf der unteren Stufe der Zahlbegriffsentwicklung befinden, würde sich einer nicht geringen Verkenntnis der Kindennatur schuldig machen. Das dürfte nach nach unseren Erfahrungen noch von der Stufe gelten, auf der das Kind die Anfänge der Zahlenreihe erreicht. Ein solches Beginnen könnte auch keinen anderen Erfolg haben als den mechanischen Abklingung. Es ist dies hier einer der Punkte, von dem aus ein Licht fällt auf das Mißverhältnis der Ergebnisse unseres Fachunterrichts zur natürlichen Kleinarbeit der Methodiker, zu dem gescheiterten Rat nach Übung und zu der Treue der geleisteten psychischen Arbeit.

Eigentlich führt das Kind schon eine Operation aus — wenigstens eine vorbereitende Operation — indem es zählt. Durch hundertmaliges Zählen gewinnt es ein zunächst unvollkommenes, später klareres Bewusstsein dafür, daß man jedesmal eine Einheit hinzuzufügen müsse, nicht mehr, aber auch nicht weniger, wenn man die nächste Zahl erreichen will¹⁾. In diesem Sinne sind in dem Zählen

¹⁾ Noch bei 5-jährigen Kindern ist es nie angekommen, daß sie beim Zählen zu Gegenständen zweimal denselben Gegenstand zählen, in der Zahlenreihe aber aufwärtssteigen. Es ist selbstverständlich nicht die Absicht bei ihnen vorzuliegen gewesen, das zu tun, denn selbst ein kleiner Knabe darauf würde bei

starke additive Zahlbeziehungen enthalten oder mindestens vorgelagert. Das Hinzuflügen im Vorwärtsschritt, das Wegnehmen im Rückwärtsschritt, die Gliederung in dem Bewußtsein, daß man vor 9 erst 8, 7 und 6 gezählt habe, der Vergleich in dem vorwärtenden Blick auf die eben erreichte Zahl, der sich verbindet mit dem Rückblick auf die beobachtete vergangene und dem Vorblick auf die beobachtete kommende. Trotzdem ist das Zählen nicht eigentlich aus den Operationen zu suchen, sondern bildet nur eine Vorstufe zu ihnen, und zwar — der Hinweis ist bedeutsam — lediglich für die vier additiven Operationen¹⁾.

Die Gewinnung der aktiven Operationen bildet nun die eigentliche erste Stufe. Ihr Durchschreiten läßt sich verfolgen in eine Reihe von Schwierigkeiten, die nicht auf einmal, sondern nur nacheinander überwunden werden können. Zunächst sind es vier voneinander gänzlich verschiedene Operationen, deren innere Bedeutung zunächst nur einzeln und dann in Kontrastwirkung schärfte werden kann. Dann kommen die Zusammenhänge und die gegenseitigen Beziehungen zwischen den vier Operationen, die nicht vernachlässigt werden dürfen. Endlich sind zwei besondere Schwierigkeiten der Erwerb der Gleichheitsbeziehung und der der mathematischen Form.

Mit dieser Darlegung der in Betracht kommenden Schwierigkeiten soll keineswegs die Reihenfolge ihrer Bewältigung angedeutet sein. Eine solche Reihe läßt sich bisher weder von der praktischen Erfahrung, noch von der psychologischen Wissenschaft anstellen, weil ja die bisherigen Ergebnisse nicht bloß als Ergebnisse der jeweils in Betracht kommenden Reihenfolge, sondern in noch viel höherem Maße der sonstigen scholastischen Behandlung erscheinen. Der Verfasser der monographischen Rechenmethode behauptet: Meine Kinder haben ausgezeichnet rechnen gelernt. Wie wurden hinzuflügen: Warum nicht? Auch das psychologisch verheißteste Verfahren kann ausgeglichen werden durch eine begeisterte und eifrige Lehrpersonlichkeit einwirken, durch das — trotz topographischen Eingreifens glücklicherweise weiter stattfindende — Wachstum des kindlichen Geistes andererseits, mittels

bezeichnend. Aber die Tatsache, daß es auch Kindern dieses Alters manchmal Schwierigkeiten bereitet, ist doch ein Hinweis darauf, daß das Zählen, und selbst das gegliederte Zählen von der Schule nicht einfach vorausgesetzt werden darf.

¹⁾ Es möchte gestattet sein, das Wort Operation der Eltern wegen in diesem unexakten Sinne zu gebrauchen. Die Schüler zu veranlassen, soll aber immer von vier additiven, oder vier multiplikativen gesprochen werden (bzw. von der zwei operativen und die zwei reduzierenden Beziehungen gesagt sein). Die Freiheit, diesen Ausdruck zu verwenden, gleicht wir uns deswegen annehmen zu dürfen, weil dies Kind sich die reduzierenden Beziehungen in der Form des spezifischen Problems eingeprengelt werden.

daß das Kind nicht selbst der Erkenntnis den Reichtum beschließt, die ein solches schätzbare Verfahren ihm zunächst nur vorläufig einträgt. Ebenso wenig freilich ist die gegenseitige Behauptung bewiesensfähig, z. B.: „Ich bin von der monographischen Methode abgegangen, aus innerer Überzeugung, aber die Not ist nicht geringer geworden.“ Reihenfolgen sind eben keine Alkoholtitel. Aber wie bei allen Krankheiten eine angemessene Dosis in gewissem Sinne ein Alkoholtitel ist, so bei den Stufen des Unterrichts die Herrschaft des Geistes, nicht des Geistes der spekulativen Theorien des Erwachsenen, sondern des Geistes der praktischen Untersuchung und ständigen Beobachtung des Kindes. Daraus können hier nur grundsätzliche Erwähnungen einiger Hauptpunkte auf psychologischer Grundlage gegeben werden.

Der wichtigste dieser Punkte ist der, daß nicht Klarheit, sondern Verwirrung in den kindlichen Köpfen erzeugt wird, wenn die verschiedenen Operationen durcheinander geworfen werden, ohne das Kind die Möglichkeit gehabt hat, sich in den Sinn der einzelnen einzurichten. Der Einwand, daß die Operationen im Gebrauch des täglichen Lebens durchgeführt und vergrößert seien, ist nicht stichhältig. Diese Vorbereitung ist wohl unumkehrlich, aber eine Vorbereitung ist wie überall nicht die Sache selbst. Die Operationen in ihrer Anwendung auf Zahlen sind etwas für den kindlichen Geist so völlig Neues, daß ein einfaches Auftreten der Operationen psychologische Forderung ist. Entscheidend ist auch nicht zweckmäßig, das Kind in mehrere Operationen zugleich einzuführen, so wäre es wiederum das andere Extrem, wenn die Operationen lediglich jede für sich allein auftreten wollten, ohne Beziehungen zu den anderen zu suchen. Erst die Erfahrung des Zusammenhanges und der wechselseitigen Beziehungen zwischen ihnen läßt das Kind zur Herrschaft über sie gelangen. Nur ist es klar, daß man mindestens zwei Operationen kennen lernen muß, ehe man sie vergleichen kann. Damit ist die Voraussetzung der einzelnen Operationen, ein späteres Einsetzen der Zusammenhänge angedeutet.

Was weiter die Gleichheitsbeziehung anbelangt, so läßt sich das Fehlen, da sie zugleich mit einer Operation erlangt wird, immer noch die Erfahrung gegenüberstellen, daß der Elementarlehre die Gewißheit hatte, daß das Kind wohl für die Gewinnung der Operationsbegriffe reif war, der Gleichheitsbeziehung aber noch kein Verständnis entgegenbrachte. Auch für ihr Eintreten läßt sich also kein psychologisch bestimmter Zeitpunkt angeben, nur der innerlich bedingte Grad der Reife. Nicht zu spät!

Die mathematische Form endlich kann das Kind erst dann erwerben, wenn ihm auch die Gleichheitsbeziehung geläufig ist. Es ist für das Kind etwas anderes und Neues, wenn es gesagt hat: End habe ich 6 Mäuse, dann bekomme ich noch 2 dazu, nun habe ich 8 — und dann dasselbe Ergebnis in die Worte kleiden soll: 6 und 2 ist 8, ganz abgesehen von der Zurechnung, dieses einen Satz als auf alle entsprechenden Vorgänge anwendbar anzusehen. Was der Verstand des Erwachsenen noch überblickt und verallgemeinert, das ist für das Kind noch eine unerwartete Erschöpfung, die ihm je nachdem Betrüben oder Bewunderung oder Freude einflößt. Daß ein solches Erlebnis aber gegebenenfalls mit 5 Wörtern ausgedrückt werden kann, ist eigentlich ein neues elementares Erlebnis mit denselben Wirkungen.

Selbstverständlich ist möglich, Gleichheitsbeziehung und mathematische Form schon im Anschluß an die erste Operationserwerbung darzustellen. Dies scheint heute sogar in sehr vielen Schulen üblich zu sein. Nach den oben dargelegten psychologischen Erkenntnissen müssen wir freilich gegen diese Reihenfolge wichtige Bedenken erheben¹⁾.

Der Entwicklung der ruhenden Beziehungen ist noch mit einigen Worten besondere zu gedenken. Es ist wahrscheinlich, daß die meisten von uns sich nicht erinnern werden, wann und wie sie diese Zahlbeziehungen erworben haben; der Rückblick in die eigene Jugend betont ebenso wie die herrschende Unterrichtspraxis die Erwerbung der operativen Beziehungen des Hinzuftügens und Wegnehmens. Und doch ist kein Zweifel, daß wir auch über jene anderen Beziehungen der Gliederung und des Vergleichs verfügen, und unsere Schulkinder ebenfalls, wenn auch in sehr verschiedenem Grade. Auf zwei Wegen kann diese Gewinnung erfolgt sein, die in der Mehrzahl der Fälle beide betreten werden. Zunächst so, daß sich die ruhenden Beziehungen gebildet haben als Folge der Beherrschung der beiden operativen. In solchem Sinne ist tatsächlich die Addition und noch mehr die Subtraktion wirksam. Es ist das ein Zeichen für den engen Zusammenhang der Zahlbeziehungen untereinander und besonders stark für die Beherrschung dieser Zusammenhänge, daß einerseits die Assoziationen der Operationsurteile so völlig fest werden, und andererseits doch so beweglich sind, daß sie sich ohne viel Mühe in die Form einer anderen Operation bringen lassen. Eine solche Wirkung der operativen Beziehungen wird vor allem dort eintreten, wo auf sinnliche Vorstellung der Zahlgrößen — und sei es auch nur in der Zahlreihe — besonders Wert gelegt worden ist. Der

¹⁾ Führen darüber im folgenden Teil meine Überzeugungen.

andere Weg, die Gliederungs- und die Vergleichsbeziehung zu erwerben, ist der, daß sie tatsächlich für sich getätigt werden sind, wenn auch manchmal unter anderen Namen. Zerlegungs- und Ergänzungsübungen, ganz besonders im Anschluß an Zählbilder, wie vor allem auch am Zehner und Hunderter, sind die Formen, die hier üblich sind. Es ist erquicklich, daß auf diesem zweiten Wege, der die in Betracht kommenden Übungen bewußt zum Gegenstand unterrichtlicher Behandlung macht, die größten Wirkungen erzielt werden.

Bestätigt der Entwicklung der Operationsbegriffe und Operationserfolge im allgemeinen aber stützen diese Darlegungen zeigen, wie ausreichend der gewonnene Unterricht auf jene Entwicklung gewesen ist.

Als eine neue, besonders, zweite Stufe dieser Entwicklung muß es angesehen werden, wenn wir die multiplikativen Zahlbeziehungen gewinnen. Das bestätigt die Erfahrung unzweifelhaft. Wenn ein Kind 2 Nüsse erhalten hat und noch 2, und noch 2, und noch 2, so kann es das auf einer gewissen Stufe wohl vorstellen, auf einer kaum höheren auch verstehen. Wer aber behaupten wollte, es sei auf dieser Stufe zu der Erkenntnis gelangt, daß es 4 mal 2 Nüsse bekommen habe, der befindet sich in einem psychologischen Irrtum¹⁾. Das geht ja auch aus dem Wesen der multiplikativen Zahlbeziehungen hervor: das Erscheinen der Funktionalität zeigt deutlich den ausgesprochen abstrakteren Charakter dieser Beziehungen. Abstraktionen auf irgendeinem Gebiet entsprechen aber einer höheren Entwicklungsstufe, als die ist, welche in dies Gebiet ohne Abstraktionen eindringen kann.

¹⁾ Dieser Irrtum kann verursacht sein durch ungenügende Beobachtung, durch unrichtigen Ratsch von Lehrenden des Kindes der sein Vermögen; oder dadurch, daß man dem Kinde logische Gedankengänge antreibt, wo es nur einfache „vergebliche“ Fragen des Mitwissenden beantwortet hat. Hierbei hätte der Erwachsene den streng logischen Gang, aber der Kind weiß nicht darauf. Diese würde vollkommenheit ist von einer selbstverständlichen Art: Wozu Frage hat es jetzt erhalten? 2. Wieviel davon? 2. Dann? 2. Dann? Wieder 2. Man stellt hier schon, daß das Kind auch „2“ antworten würde, wenn der Lehrer mit seiner Begeisterung nach einem 2. Punkt frage? Wieviel hat es jetzt erhalten? 2. Wieviel hat es 2 Nüsse erhalten? (Schweigen. Falsch die Maß Sage: einmal 2 Nüsse . . . Zweimal, nochmal, dreimal, nochmal. Wieviel hat es also 2 Nüsse erhalten? Viermal. Wieviel Nüsse hat es im ganzen? Das Kind zählt hier von vorne: 1, 2, 3 . . . 5. Wieviel sind also 2 mal 2? 4. Glaubt wirklich jemand, er habe durch den Kinde eine Multiplikationsbeziehung hergestellt? Es würde kaum eine größere Selbsttäuschung geben als diese. — Der vorliegende Hinweis auf den üblichen Lehrerfehler hilft eigentlich zu späteren Stellen stellen können. Wie glauben also, es würde hier noch besser nicht hingehen. Diese sollen darin bestehen, die Aufmerksamkeitskraft des Lehrenden auf die Beobachtung des Kindes und auf die vorzuziehenden Beobachtung der Schritte selbst eigenen methodischen Verfahren zu richten.

Es war daher ein nicht geringer Fehltritt, wenn man in „mensographischer Zahlbeziehung“ zugleich mit der Einführung in die Zahlbegriffe des ersten Zehners auch die multiplikativen Zahlbeziehungen an die Kinder heranbrachte. Wir werden das bei späterer Gelegenheit noch näher auszuführen haben.

Bei den multiplikativen Beziehungen gilt es nun in der Hauptsache denselben Teilziele zu erreichen wie bei der additiven. Es müssen also 4 verschiedene Operationen innerlich erfüllt werden: Malnehmen, Vertausen, Zerlegen in Faktoren und Messen oder Entlosgewinn⁴⁾. Dazu müssen dann die Beziehungen gewonnen werden, welche zwischen den 4 Operationen bestehen. Das Messen muß z. B. verglichen werden mit dem Teilen, mit dem Zerlegen in Faktoren usw. Endlich ist die mathematische Form zu gewinnen, und zwar sowohl nach ihrer sprachlichen wie schriftlichen Seite. Eine strenge Reihenfolge ist damit abensowenig ausgesprochen als bei den additiven Beziehungen. Grundsätzlich unterscheiden sich beide Gebiete eigentlich nur darin, daß die mathematische Form, welche früher als besonders ins Auge zu fallende Teilstufe erschien, jetzt überall leichter auszubilden ist, weil alle Voraussetzungen für sie schon vorliegen. Der Fortschritt innerhalb dieser Stufe kann daher bestimmt werden von der Operation allein. Dabei mag auch die Frage offen bleiben, ob als 2. Operation zweckmäßig das Vertausen oder das Messen gewählt wird. Nach unseren Erfahrungen scheint letzteres dem kindlichen Verständnis näher zu liegen.

Die 3. Stufe der Entwicklung der Operationsbegriffe und Operationsurteile erstreckt sich auf die Potenzialbeziehungen und geht im allgemeinen über den Rahmen des Volksschulrechnens hinaus; in nicht zu seltenen Fällen wird eine erste Einführung versucht, die sich freilich meist mit dem Potenz- und Wurzelbegriff und Anwendungen allereinfachster Art begnügt. Die übrigen allgemeinen Bildungsanstrengungen haben im Bewußtsein der Bedeutung dieses Gebiets eine mehr oder minder eingehende Behandlung in ihren Plänen aufgenommen.

Als Unterstufen erscheinen auch hier die betreffenden Operationen selbst und ihre Zusammenhänge, kaum noch ihre mathematische Form. In viel entschiedenerer Weise, als es auf den vorhergegangenen Gebieten der Zahlbeziehung möglich ist, wird hier die einzelne Operation abstrahiert. Das geht so weit, daß nicht selten die verschiedenen Operationen den Lernaufgaben verschiedener

⁴⁾ Es ist deutlich ersichtlich, wie die Anwendung des Ausdruckes Operationen auch auf die anderen Beziehungen hin schon einen höheren Grad von Bezeichnung setzt. Die Ursache dafür liegt im Aufbau der Prozeduralität.

Jahrestage zugewiesen werden. Dem darf vom psychologischen Standpunkte aus keineswegs die Berechtigung verweigert werden. Denn infolge des Auftretens zweier Funktionszahlen bildet jede Operation eine ihr eigentümliche Technik aus, das Ergebnis zu gewinnen. Dadurch unterscheiden sich aber die Operationen dieser Gruppe in viel höherem Maße voneinander als die Operationen der übrigen Gruppen. Dagegen tritt so gut wie völlig zurück als Sonderaufgabe die Gewinnung der mathematischen Form. In der ersten Gruppe war sie eine hochbedeutende Kreuzzug, hier ist sie nicht nur Symbol, sondern fast ausschließlichen Vorstellungsbild der immer abstrakter gewordenen mathematischen Beziehungen und ihr selbstverständliches und geistiges Darstellungsmedium. Wichtig bleibt aber noch auf dieser Stufe die Gewinnung der Zusammenhänge. Das Eindringen in sie bildet erst eigentlich die Gewähr für die Beherrschung der Operationsgruppe. In der Tat wird ein nicht unwesentlicher Teil der Behandlung gerade diesem Gedanken gewidmet.

Überblieben wir die Entwicklung einerseits der Zahlbegriffe, andererseits der Zahlbeziehungen, so liegt es außerordentlich nahe, den Versuch zu machen, beide Entwicklungsreihen nebeneinander zu stellen und die einzelnen Stufen zeitlich zu begrenzen. Dies ist aber viel schwerer, als man zunächst denkt. Auf die Verantwortlichkeit der Anlagen braucht nur hingewiesen zu werden. Sie behindert nicht einen solchen Versuch, nicht wenig. Dazu kommen aber noch zwei andere Faktoren, die — wirklich wie Faktoren im mathematischen Sinne multiphásierend und diversifizierend — einen derartig starken Einfluß ausüben, daß eine gute Begabung nur höchsten Eklis entwickelt, aber auch ganz zurückgedrängt werden, eine mittlere zu unerwarteter Entfaltung gebracht werden, aber auch völlig verkümmern kann. Diese Faktoren sind zu suchen einmal in den Einflüssen des häuslichen Lebens, wobei das verschnepflichste Alter besonders Bedeutung hat. Und sodann in den Einflüssen eines guten, mittleren oder schlechten Unterrichts¹⁾. Wenn trotzdem der Versuch einer solchen Aufstellung gewagt wird, so soll er hingestellt werden als das Ergebnis jahrelanger psychologischer Beobachtung, die sich sowohl auf mathematische wie auf allgemeine Fähigkeiten bezieht, als ein Ergebnis aber, das der Nachprüfung durch die wissenschaftlich interessierte Lehrerschaft und der weiteren Feststellung auch mittels experimenteller und statistischer Methoden noch bedarf.

¹⁾ Wir werden auch an anderer Stelle das mathem. Hier mag der Hinweis genügen, daß unentwickelte Fähigkeiten des Rechenvermögens von einem guten Rechenunterricht abhänge und. Was die letzten Abschnitte betreffen, kann allein schon der auf wissenschaftlicher Grundlage aufgebauete Rechenunterricht abhängen.



Es ist noch die Frage zu beantworten, wie jede einzelne dieser Beziehungen erworben und Eigentum unseres Geistes wird. Da ist zunächst die Meinung abzuwehren, die hier und da in methodischen Schriften noch anstreifen ist, als sei die Gewinnung der Beziehung nichts anderes als eine komplizierte oder intensive, klarere Art des Zahlverständnisses¹⁾. Diese Meinung rührt her von der Betrachtung und eingehenden Behandlung der ruhenden Beziehungen. So wichtig diese nun sind, so haben sie in der Entwicklung doch nicht primäre Geltung, sondern sekundäre: sie stellen sich erst ein, nachdem Beziehungen operativen Charakters erworben und ausgebildet worden sind.

¹⁾ Vom 12. Jahre an verleiht die Volksschule und die Erweiterung des Zahlbegriffs und teilt in der Hauptsache Anordnungsrechnen.

²⁾ Vorstufe des Zahlbegriffsverstandes heißen dann.

Damit ist auch der Weg angedeutet, auf dem allein die Operationen gewonnen werden, nämlich durch ihre tatsächliche Ausführung, nicht durch Betrachten der Möglichkeit. Das Kind lernt nur addieren, wenn es wirklich vielfach hinzurechnet, lernt nur subtrahieren, wenn es oft genug vorgezogen hat, lernt malnehmen lediglich durch wirkliches mal-Nehmen, lernt teilen nur im Teilen.

Dafß die Entwicklung tatsächlich diesen Verlauf nimmt, werden jene beweisen, die sich nicht bekümmern können, in der Schule wirklich Nüsse oder Zucker oder sonst etwas „geteilt“ zu haben. Sie glauben dann gern, sie hätten eine andere Entwicklung zurückgelegt. Das ist aber ein Irrtum, und zugleich ein Mangel jenes Unterrichts. Dieser beruht nur auf den blühlichen Voraussetzungen, die das Kind mitbrachte. Bei geistig reifen Kindern, die im Vorwissen schon ziemlich gewiß sind, genügt diese blühliche Grundlage. Das ist aber nicht der Fall bei der großen Zahl der mittleren Begabungen, und erst recht nicht bei den später Reifenden und den Schwachen. Der Hinweis auf die blühliche Grundlage mag vielleicht manchen, der einen guten Rechenunterricht zu erteilen glaubt, nachdenklich stimmen: Nicht also das Zahlvorstellen, auch nicht das Vorstellen der Operationen soll der eigentliche Weg sein zur Gewinnung dieser Beziehungen. Und er kommt mit einem dritten Einwand: Das Wichtigste bei der Gewinnung der Zahlbeziehung, der Operationen ist die Übung. Dabei versteht er unter Übung sogenannte „mögliche Rechenübungen“, vor allem das in jeder Stunde erfolgende Auftragen des Kinnaleins und Ähnliche. Er behauptet von ihnen, daß diese Beziehungen zuverlässig gelernt werden müssen, daß sie in Fleisch und Blut übergehen müssen. So richtig es nun an sich ist, daß ein Rechnen nur möglich ist, praktisch möglich ist, wenn diese Beziehungen zu vollster Beherrschung im Bewußtsein gelangt sind¹⁾, so falsch wäre es anzunehmen, die Übung als eine Bedingung oder als eine Form des Erwerbs anzusprechen. Sie bedeutet Befestigung, Sicherung, aber nicht Erwerb.

Der Entwicklungsengang jedes Operationsfallens ist vielmehr der, daß er handeind erworben werden muß; daß er durch das wiederholte Ausführen immer mehr an Klarheit gewinnt und schließlichen immer rascher und richtiger erkannt wird; die wiederholte Erkennung aber erst führt zur mechanisierten Herrschaft. Mit anderen Worten: Jeder Operationsfall, wie jede Operation als Zusammenfassung vieler Fälle entwickelt sich in den drei Stufen

¹⁾ „Mechanische Fertigkeit oder Beherrschung der Technik ist für jede Kunst wichtig und für das Schicksal eine Quelle wirklicher Macht.“ Machet, *Erwachtungen über mechanische Erziehung*, S. 202.

des gefühlbetonten Erwerkes, der adäquaten Assimilation und der mechanisierten Reproduktion.

Vollige Bereitschaft der wichtigsten Operationsstile ist der Höhepunkt der Entwicklung auf diesem Gebiet. Er muß angestrebt werden überall da, wo ein gewisser Abschluß der mathematischen Bildung — und sei es auch nur ein elementarer — in Frage kommen soll. Er muß aber auch angestrebt werden, weil mit ihm die Grundlage gewonnen wird, auf welcher der Oberbau, der eigentliche Zweckbau der mathematischen Bildung aller Grade zu errichten ist, die mathematische Anwendung. Zu ihr wenden wir uns im folgenden Abschnitt.

§ 14. Die Anwendung der Operationen auf die Fälle des Lebens.

Die Mathematik hat von jeher gegolten als diejenige Wissenschaft, deren Ergebnissen man uneingeschränkte Gewißheit und Sicherheit verspürt. Keine von allen anderen Wissenschaften kommt ihr in dieser Hinsicht gleich. Denn bei allen anderen ist menschliche Beobachtung und Beobachtungsfähigkeit irgendwie beteiligt und beeinflußt die Ergebnisse. Dies schied bei der Mathematik überhaupt nicht möglich, weil sie das Gebiet der reinen Abstraktionen nie verläßt. So wurde sie die elemente, die heilige, die wirkliche Wissenschaft, die Wissenschaft der reinen Theorie.

Und doch ist keine Wissenschaft noch so anstehend so praktisch wie sie, keine greift so in alle Gebiete des Lebens ein, keine ist so grundlegend nötig für das Leben, für das Kulturlieben allerdings. Durch sie wird die Autonomie von Wissenschaft und gewinnt die Herrschaft über Zeit und Weltanschauung. Durch sie wird die Psychologie zur Wissenschaft und stellt neben die Kamalität des Universums die Kamalität des Geistes. Und zwischen diesen beiden Polen, zwischen Astronomie und Psychologie, liegen die Wissensgebiete der Geographie und Geschichte, die durch die Mathematik den Charakter deskriptiver Angelegenheiten verlieren, die Gebiete der gesamten Naturwissenschaften, die durch sie erst „zuerst“ wurden. Daneben begründen Sprüche und Religionen darüber die Unterwürfung, die sie in Maß und Zahl finden. Unsere Kunst — Theater und Bankrott voran — ist ganz mathematisch durchdrungen, und unsere Technik ist der Mathematik eigenes Kind. Die Lebensgebiete der Verwaltung und des Rechts, der Volkswirtschaft und Politik, des Handels und des Verkehrs, der Verteidigung und Verwaltung der Völker, unser Schaffen und Fortschreiten, unsere gesamte Organisation des Lebens, ja unsere gesamte Kultur steht ganz und gar unter

den praktischen Einfluß der theoretischsten Wissenschaft, der Mathematik.

Faktisch ist sie auch noch in einer anderen Hinsicht, in ihrer Wirkung nämlich auf die sittliche Entwicklung. Denn der mathematisch Gebildete hat zwei Tugenden erworben, die von hervorragender Bedeutung sind: Ökonomie des Handelns, d. h. er läßt keinen Wert ungenutzt, auch keinen Zeiterwart, und Maßhalten in allen Dingen, d. h. Selbstbeherrschung.

Angesichts dieser praktischen Bedeutung der Mathematik erhebt sich die Frage: Entspricht dieser Bedeutung irgendein Teil unseres mathematischen, insbesondere unseres Rechenunterrichts? Und die Antwort weist hin auf physikalische und chemische, geometrische und astronomische, kommerzielle und volkswirtschaftliche Berechnungen in den Lehrbüchern der Mathematik; auf die bürgerlichen Rechenarten des elementaren Rechenunterrichts; endlich auf allertagss nötige „angewandte Aufgaben“, welche ja den gesamten Rechenunterricht von der Unterstufe bis zur Oberstufe begleiten.

Was aber setzt auch jene Klage ein: Was der Unterricht Outen gewirkt hat, läßt nicht von. Kaum sind die Jungen, die Mädchen ein paar Jahre der Schule erwachsen, dann sind die meisten von ihnen nicht mehr lustlos, auch nur einfachere Rechenaufgaben zu lösen. Sie haben verstanden, wie man irgendeine Aufgabe angreift, die „Lösungsverfahren“ ist ihnen abhandeln geblieben. Uns aber kommt Kerschensolners treffendes Bild von dem markgeprägten Kapitulanten in den Sinn.

Angesichts dieser Spannung zwischen der praktischen Bedeutung des Faches und der praktischen Wirkung des Unterrichts muß die Frage nun so gestellt werden: Ist mit dem Erwerb der Zahlbegriffe und der Zahlbeziehungen die mathematische Bildung gegeben? oder auch: Ist der Besitz der Zahlbegriffe und Zahlbeziehungen ausreichend, um den mathematischen Anforderungen des Lebens zu genügen? Bei vielen lautet die Antwort nicht unbedingt ja. Sie sagen: Wenn Zahlbegriffe und Zahlbeziehungen völlig beherrscht werden, dann heißt es einfach weiter nichts als üben und immer wieder üben; und sie stellen die Gegenfrage: Was soll denn dann noch nötig sein? Andere aber antworten mit nein, Zahlbegriffe und Zahlbeziehungen genügen nicht. Und sie wenden — mathematisch gesprochen — zunächst den indirekten Beweis an: Genügen sie, dann müßten Kinder und Schüler in dem Alter, da sie noch völlig über beides verfügen, auf der höchsten Stufe ihrer mathematischen Bildung stehen, später aber wieder herabsinken. Darf man das annehmen? Doch wohl nicht. Denn das würde doch den Bildungsbegriff identisch machen mit Gedächtnis. Allgemein ist da-

gegen die Ansicht, daß man zu Bildung — auch zu mathematischer Bildung — im Laufe der Jahre überhaupt nicht abnehmen, sondern nur zunehmen könne, und daß selbst auf Gebieten, wo alle Übung ruht, die vorhandene Bildung durch Wechselwirkung mit andern partierter neuer sich vertieft.

Dem schließt sich der direkte Beweis an. Er läßt sich auf zweifache Art führen, als Induktions- und als Analogiebeweis.

Wenn wir den Erwerb der Zahlbegriffe und Zahlbeziehungen vorzeichnen, wird wir von hier aus vordrängen können, um auf das zu sehen, was noch nötig ist, so erscheinen uns Zahlbegriffe und Zahlbeziehungen als assoziatives Material, das appetzeptiv zu verwenden ist. Das heißt, jenes Material steht uns zur Verfügung, und unsere jeweilige Aufmerksamkeitsrichtung bestimmt, welches von dem Materiale zur gegenwärtigen Verwendung zu kommen hat. Diese Verwertung meint gewiß mancher mit seinem Ausdruck „Übung“. Aber diese Bezeichnung ist hier nicht am Platze; denn auch die Überführung der zunächst appetzeptiv gewonnenen Zahlvorstellungen und Beziehungs Vorstellungen in Zahlbegriffe und Beziehungs begriffe und ihre Mechanisierung zu assoziativem Material kann auch nur auf dem Wege der Übung erfolgen. Dagegen beachtet unmittelbar ein, daß man es bei der praktischen Anwendung mit einer Ausübung, einer Auswahl, einer Wahlhandlung zu tun hat. Das ist aber eine andere partierte, höhere, weil kompliziertere geistige Tätigkeit.

Ein Beispiel mag das andeuten. Es soll angerechnet werden, mit welcher täglichen Menge von Substanten und Quark (Magerfleisch) ein erwachsener Mann bestehen könnte — von Nebenbestandteilen abgesehen. Dazu sind zunächst folgende Zahlenangaben notwendig:

Sein möglicher Bedarf an

	Korn,	Fett u.	Kohlhydraten,
bei	118	88	800 g ¹⁾ ;
Quark enthält	28,8	11,1	6,1 %
Fleischbrat	4,7	0,6	47,9 %, wovon betr. Nitrostoff
Kartoffel bei	8	3	1 das Verhältnis der Nähr-

werte bei gegenseitiger Vertretung (nach Tabellen, wie sie in den meisten Rechenbüchern sich finden).

Nun werden folgende Erwägungen und Rechnungen angestellt: Von vornherein stellt fest, daß die Lösung der Aufgabe auf verschiedene Art möglich ist, da sich ein Nahrungsmittel mit einem

¹⁾ Wir können uns angesichts der Klageführung nicht des Einwands erwehren, da wenn bei diesen Angaben starke hypothetische Leistungen vorausgesetzt werden.

anderen innerhalb gewisser Grenzen anzuwenden läßt, ohne daß das Ergebnis erheblich geändert wird. Aber die möglichen Lösungen müssen die Wirklichkeit berücksichtigen. Fragen wir also, so läßt sich, daß ein erwachsener Mann täglich 3 Pfund = 1 kg Schwarzbrot verbrauchen kann. Darin würden nach jenen Angaben 47 g Eiweiß, 8 g Fett und 479 g Kohlehydrate enthalten sein. Rechnerisch setzt diese Feststellung voraus, daß verstanden wird der Begriff der Gewichtsprocente, und daß der Prozentbegriff selbst auf die Zahl 1000 mechanisch verkehrt übertragen werden kann. Vergleicht man nun das Ergebnis mit dem Bedarf:

1 kg Roggenbrot:	47 g Eiweiß	8 g Fett	479 g Kohlehydrate,
Bedarf:	118 g	"	400 g

so ergibt sich: — 61 g Eiweiß — 80 g Fett + 79 g Kohlehydrate, also ein Restbedarf bei Eiweiß und Fett, ein Überschuß bei Kohlehydraten. Von sei zunächst zu wissen nötig, daß der Überschuß zunächst für den Fettbedarf in Betracht kommen kann; er deckt etwa (hier ist der Nährwert von 79 g Kohlehydraten umzu setzen in den von $\frac{79}{3}$ g Fett) 26 g.

Es bleibt als weiterer Restbedarf — 61 g Eiweiß, 54 g Fett, die zunächst durch eine gewisse Menge Quark gedeckt werden könnten. Da in 100 g die angegebenen Mengen 58,9 g Eiweiß, 11,1 g Fett und 4,1 g Kohlehydrate enthalten sind, so

in 100 g Quark +	58,9 g Eiweiß	11,1 g Fett	4,1 g Kohlehydrate,
das ergibt +	5,6 g Eiweiß	— 33,3 g Fett	+ 8,3 g Kohlehydrate,
		+ 2,7	
		+ 11	
		— 20 g	

also einen Überschuß an Eiweiß und Kohlehydraten, einen Bedarf an Fett. Der Ausgleich erfolgt wieder durch Umrechnung dergestalt, daß 8,3 g Kohlehydrate dem Nährwert von $\frac{8,3}{3}$ = etwa 2,7 g Fett entsprechen, während die 5,6 g Eiweiß dem Nährwert von $\frac{5,6 \cdot 6}{3}$ = 11 g Fett gleichkommen. Daraus ergibt sich, daß der angenommenen Nahrungsmenge von 1 kg Schwarzbrot und 100 g Quark noch 20 g Fett zugegeben werden müssen, um den angegebenen labelarischen Wert zu erreichen.

Die Rechnung würde aber hinstellen: Sollte die fehlende Nährwertmenge (von 60 Einheiten) durch Quark aufgebracht werden,

es würden dazu — da in 100 g entsprechend $83,8 \cdot 5 + 11,1 \cdot 3 + 4,1 = 504,4$ Fahrverordnungen enthalten sind — etwas weniger als der 2. Teil von 100 g. genauer $\frac{100 \cdot 60}{305} = 39$ g. erforderlich sein.

Das Gesamtargentein könnte daher lauten: 2 Pfund Grot und $\frac{1}{2}$ Pfund Quat würden den gestellten Anforderungen reichlich entsprechen. —

Aus diesem Beispiel ersieht auch der Reizler, daß die rechnerische Bearbeitung eines praktischen Stoffes etwas ganz anderes ist, als das Rechnen mit Zahlbegriffen und Zahlbeziehungen einschließlich Potenzen und Wurzeln. Namentlich wie es vorhin eine höhere Geistestätigkeit, so gilt es nun, diese an der Hand des dargelegten Beispiels kurz zu analysieren. Da ergibt sich folgendes:

1. Nachdem unser Bewußtsein den Werth der Aufgabe nach und nach (d. h. wie die einzelnen Wörter erscheinen) aufgefassen und ihren Sinn festgehalten hat, unterstellen wir uns der Wirkung der Zielvorstellung; wir stellen uns zu diesem Zwecke nochmals den Sachverhalt genau vor und richten die Aufmerksamkeit auf die auszuführende Leere.

2. Wir gestalten uns einen Plan der Rechnung, theils intuitiv das Ganze erfassend, theils apperzeptiv die Einzelheiten verfolgend, die Wirkungen unseres Tuns überlegend, mögliche Ergebnisse einzelner Rechungsstadien abschätzend.

3. Wir verlangen eine Reihe Zahlangaben entweder vom Aufgabesteller oder aus objektiven Quellen. Dabei wissen wir genau, zu welchem Zwecke wir die einzelnen Angaben brauchen, und in welcher Form (z. B. in Procenten) sie nöthig sind.

4. Wir beurtheilen, ob die geforderten Zahlangaben genügen. Wir arbeiten dabei mit der Bewußtheit, daß eine bestimmte Menge von Zahlangaben nöthig ist, um die Rechnung eindeutig zu gestalten; daß eine Uebersicht der Zahlangaben die Rechnung erschweren durch die Nothwendigkeit, zu prüfen, ob die Uebersichten mit den anderen in Einklang stehen usw.; daß aber beim Fehlen von Zahlangaben die Rechnung mehrdeutig wird, und daß dann in irgend-einer Weise zur Selbsthilfe gegriffen werden muß, für die wir die Verantwortung tragen.

5. Wir legen die erhaltenen Zahlangaben — ohne aber diese selbst vorzustellen — an die vorgestellte sachliche Wirklichkeit an, wählen auf Grund dieser Prüfung die rechnerischen Operationen aus, und veranschaulichend das Ergebnis zu überblicken.

6. Wir führen die Operationen einzeln aus und prüfen nach — entweder durch Ausföhrung der ursprünglichsten Operation oder durch überblickendes Schätzen — daß kein Rechenfehler unterlaufen ist.

7. Wir wiederholen die Vorgänge bei 5 und 6, so oft es nötig ist, orientieren uns dabei jedesmal an 1 und 2, an Zielvorstellung und Rechenungsplan, verbinden jedesmal Vorgang wie Ergebnis im Bewußtsein mit allen vorgegangenen entsprechenden Vorgängen, und werten seine Bedeutung für das zu erreichende Ziel.

8. Wir setzen die Nachprüfung auf die Gesamtheit der Rechnung aus, vergleichen das Ergebnis mit der Zielvorstellung und sehen uns der Bedingungen bewußt zu werden, unter denen die durchgeführte Rechnung Gültigkeit hat.

Diese Analyse zeigt, daß beim wirklichen Rechnen die Zahlbegriffe und Zahlbeziehungen wohl das selbstverständliche und in keiner Weise zu erstrebende Material bilden, daß aber die zu Wert setzende überwiegende Hauptsache etwas anderes ist. Dieses andere besteht — um es zusammenfassend auszudrücken — in der unter der Wirkung der Zielvorstellung vor sich gehenden Auswahl und Verbindung des assoziativen Materials.

Es ist nicht unwahrscheinlich, daß hier der Einwand entsteht, man könne doch nicht bei jeder allereinfachsten Rechenaufgabe diese 8 langen inhaltreichen Abschnitte geistiger Tätigkeit durchlaufen, wenn angestrebt sein würde, daß man der obigen Analyse nur für das steigende folgende komplizierte Beispiel Anwendung stellen wolle. Es ist daher nötig, sie noch an einem einfacheren Beispiele nachzuprüfen.

Eine Mutter will ihr Kind zum Fleischer schicken und fragt sich: Wieviel kostet $\frac{1}{2}$ Pfund Wildfleisch?

Punkt 1 der Analyse ist ungeändert vorhanden. Punkt 2 erledigt sich, weil es sich hier nur um eine einzige Rechenaufgabe handelt. Punkt 3 ist vollständig da; die Frau sagt sich vielleicht: Das Pfund wird 60 \mathcal{A} kosten. Punkt 4 ist im Sinne der Bewußtheit vorhanden, daß die in 1 erwähnte Zahlungsbetrag völlig ausreichend ist zur Lösung des gestellten Problems. Punkt 5 erfüllt im Geiste dieser Rechnung eine besonders aufmerksame Behandlung, indem sie — in diesem Falle gleich in Verbindung mit Punkt 6 — $\frac{1}{2}$ Pfund und dann $\frac{1}{4}$ Pfund zu rechnen unternimmt und zugleich ausrechnet: 45 und 22 \mathcal{A} . Nach Punkt 7 stellt sie beides zusammen: 68 \mathcal{A} und erlebt — Punkt 8 — ein Wahrheitsgefühl der Richtigkeit ihrer Rechnung, oder — wenn sie oben 38 \mathcal{A} als Ergebnis gewonnen haben sollte — ein Gefühl des Mißtragens; das kann doch nicht sein! Und die die umgekehrte Operation verwendende Nachprüfung sagt hierzu: Dann müßte ja das Pfund über 1 \mathcal{A} kosten. Und die Rechnung wird an der entsprechenden Stelle — Punkt 5 — nochmals aufgenommen.

Man sieht, die Analyse kann nicht wesentlich gekürzt werden.

Nur gehen die Knochenvergänge, je nachdem sie mechanisiert sind, außerordentlich rasch voran. Wenn man auf diese Schnelligkeit achtet, wird man eher sagen dürfen, daß unsere Analyse eigentlich nur die Hauptpunkte heraushebt, und wird insunde sein, noch viel eingehendere Analysen anzustellen.

Und nun die Analogie!

Eine Nähmaschine oder ein Fahrrad besteht aus mehreren hundert einzelner Bestandteile. Man genügt nicht der Besitz dieser Bestandteile, um aus ihnen etwa ein Fahrrad herzustellen, noch nicht einmal die Einsicht in die Elementarverbindungen (z. B. das Schraube und Mutter zusammenstecken) und ihre Beziehungen. Sondern der Geist ist dazu nötig, der die Wirkungsweise der Verbindungen und ihren wechselseitigen Einfluß nebeneinander erkennt und versteht. Die hochentwickelte Tastempfindlichkeit der Hände kommt hier außerdem dazu. Man wird einwenden können: Solchen Zusammenbau kann auch ein weniger intelligenter Kopf lernen. Darauf ist zu erwidern: Aber ein Mindestmaß von Intelligenz muß doch vorhanden sein. Die Maschine wird niemals den Rechner ersetzen können, so wie Automatismen nie die geistige Durchsicht. Außerdem wird je nach dem Grade der verfügbaren und aufgewendeten Intelligenz die Güte des Werkes geringer oder größer sein. Überdies: der Zusammenbau einer Maschine, wie wir ihn im Auge hatten, ist ein Fall, der sich meist mit nur geringen Abänderungen wiederholt; das Rechnen des Lebens stellt uns vor immer neue Fälle. Zahlbegriffe und Zahlenbeziehungen sind die Bestandteile — manches Kind beherrscht sie vollkommen, nicht bloß dem Wert nach, und doch kommt es vor, daß es nicht rechnen kann.

Auch die andere Analogie ist lehrreich. Das Rechnen ist in vielen Beziehungen der Sprache ähnlich¹⁾. Das Material sind dort die Zahlbegriffe, hier die Wortbegriffe im allgemeinen. Den Zahlenbeziehungen entsprechen die Wortbeziehungen, die durch Biegung und Abwandlung, durch Verhältnisse und Bindewörter ausgedrückt werden. Ist nun derjenige, der die Wörter der Umgangssprache mit ihren Beziehungen beherrscht, damit schon befähigt, einen sinnvollen Vortrag zu halten? Oder ist etwa ein Gedicht nicht weiter als eine Kombination von Wörtern mit ihren gegenseitigen Elementarbeziehungen? Es ist in der Tat nicht wenig behauptet: Wo sich ein Gedicht zu einem Wörterbuch verhält, so verhält sich die rechnerische Anweisung zu dem vorher zu gewöhnlichen rechnerischen Operationsstrom. Was unsere Wörter und Sätze zu Gedanken und Abwandlungen macht, was unsere Zahlbegriffe und Rechenstriche zu Problemstellungen einleuchtender wie komplizierterer Art gestaltet, ist

¹⁾ Abgesehen davon, daß die Sprache nur ein Ausdruck des Gedankens überhaupt, und daher Rechnen sowohl von Sprache als von Rechnen als Teilgebiet ist.

hier wie da dasselbe: der planmäßige Zusammenhang unter einer leitenden Idee.

Aus jener Analyse und aus diesen Analogien ergibt sich nun die das Wesen der rechnerischen „Anwendung“ dar: Die Fähigkeit, unter der Herrschaft einer Zielvorstellung aus dem assoziierte vor Verfügung stehenden Zahlbegriffen und Operationen diejenigen auszuwählen, in Verbindung zu bringen und zu betätigen, durch die das gesteckte Ziel richtig, schnell und elegant¹⁾ erreicht wird. Im Lichte der Psychologie betrachtet, stellt sich aber jeder dieser Vorgänge dar als ein Willensvorgang von sehr zusammengesetzter Art, wozu gleichzeitig ein Hinweis gegeben ist auf die Entwicklung dieser Fähigkeit. Dieser Entwicklung wollen wir nun zuwenden.

Nichtleidend aber lassen wir zusammen, daß die geistige Leistung, welche wir mit Rechnen bezeichnen und die der Rechunterricht auszubilden die Aufgabe hat, aus drei Stücken besteht: aus dem Erwerb der Zahlbegriffe, dem Erwerb der Zahlbeziehungen und der Entwicklung der Fähigkeit, beides in selbstverständlicher Weise anzuwenden.

§ 15. Die Entwicklung der rechnerischen Anwendungsfähigkeit.

Wenn die Entwicklung einer gewissen Art von Willensvorgängen in kurzen Strichen dargestellt werden soll, so läßt sich das tun, indem man einerseits die Entwicklung ihrer intellektuellen und emotionalen Komponenten zeigt, anderseits aufzeigt, in welchem Einflusse die langje Verknüpfung beider in immer wiederholtem Versuch steht.

Zwei intellektuelle Komponenten sind es, welche sich an der Ausbildung der Fähigkeit rechnerischer Anwendung betheiligen: Zunächst Kenntnisse und Verständnis der wirklichen oder angenommenen Maßverhältnisse der in Betracht kommenden Dinge und Erscheinungen — und sodann: Herrschaft über die Zahlbegriffe und Zahlbeziehungen, Vertrautheit mit ihrem Wesen und ihren Wirkungen. Jenes ist mehr konkretes, dieses mehr abstraktes, jenes mehr materielles, dieses mehr formales Erfordernis.

Die Notwendigkeit der Beherrschung von Zahl und Operation braucht hier nicht nochmals begründet zu werden. Aber auch das geforderte Maßverständnis ist von grundlegender Bedeutung insofern, als von ihm die mehr oder minder große Klarheit und Richtigkeit der Zahlvorstellung, des Sachverhalts und der Zielvorstellung abhängt. Beide Komponenten erstrecken darum in gleichem Maße notwendig.

¹⁾ D. h. mit geringstem Energieaufwande bei größtmög. Form.

Aber man braucht nur die Wirklichkeit anschauen, um zu finden, daß der Grad ihres Vorhandenseins manchmal bedenklich gering ist. Und zwar gilt dies Detail nicht nur von der abstrakten Komponente, von dem Vertrauen mit Wissen und Wirkung von Zahl und Operation — z. B. der Multiplikation im Gebiete der Dezimalfraktion — es gilt in höherem Maße noch von der konkreten. Wie viele von den Gelehrten sind instande — selbst mit Bestätigung 15. oder gar 10prozentiger Abweichung — anzugeben, wie lang 1 m oder 1 km ist, oder ein Ding der Umgebung zu beschreiben, das etwa 1 kg wiegt. Oder umgekehrt zu sagen, wie hoch ein Blatt Papier ist, das man in der Hand hält, eine Straße, auf die man hinschaut, ein Fluß, den man überschreitet. Oder wie hoch ein Zimmer, ein Baum, ein Turm ist, wie hoch ein Flieger schwebt. Oder wieviel ein Eisenbahnwagen laden kann (obwohl es an jedem steht), wie schwer ein Seck Kuchen oder ein Seck Wurst ist, das vor uns auf dem Teller liegt, oder ein Buch, das wir in der Hand haben. Es ist höchst interessant, mit sich selbst unvoreingenommene Prüfungen in dieser Richtung zu veranstalten¹⁾. Handwerker sind uns in solchen Schätzungen meist überlegen, in solchen, auf die sie ihr Beruf blawieselt, ganz vorzüglich. Kinder dagegen zeigen oft eine geradezu rührende Unkenntnis, und zwar, obwohl sie schon jahrelang mit Meter und Zentimeter, mit Liter und Kilogramm geschult haben. Dabei wissen sie sich sogar zu erinnern, daß sie es in der Schule „glaubt haben“. Die Militärbehörden haben anerkennend mit am ersten die Notwendigkeit des Vertrauens in die Maßrechnerei des Lebens erkannt und an ihrem Teile zur Erziehung unserer Völker tatkräftig beigetragen. Besonders verpflichtet die Pfadfinderbewegung auf diesem Gebiete unser zu lehren.

Wenn man sich diese tatsächlichen Zustände vergegenwärtigt, so liegt nicht nur die Frage nahe, welches denn die Ursachen dieser Entwicklung sein mögen, sondern auch die Antwort. Sie kann nicht anders lauten als so: Eine Vermittlung, des Könnens ist keine angeborene Fähigkeit, sondern eine gar nicht einmal so sehr schwierige Erwerbung, die erstands kommt durch stete Anregung und Übung im ansehnlicher Betrachung der Dinge und Errechnungen.

¹⁾ Bei Gewichtsschätzungen mußte z. B. eine zwölfstündige Besetzung mit Hilfe des speziellen Gewichtes anstellen. Das wurde eine intelligente Bewertung war, nicht aber ein Kennen der Maßverhältnisse erwies. Auch Längungsverhältnisse sind interessant, weshalb auch hier die Anweisung ist, daß man leicht schwingen können, nicht besonders wichtig. Vor lauten liegen wir in dieser Zusammenhangs Hinsicht die Frage ein, wie hoch ein Fuß im Winkel ist. Dabei sollen sie möglichst an die bekannten Beispiele denken, bei dem es eine Fuß in unmittelbarer Nähe gesehen hätten. Die Angaben, die nicht in Zentimetern, sondern mit der richtig geschulten Hand gemacht wurden, waren meistlich so hoch, wie Teil von 50%.

die allerdings schon in der Jugend einsetzen muß, aber selbst noch in höheren Jahren Erbfolge verleiht.

Diese Anregung ist an uns verfaßelt worden, vielleicht auch noch uns¹⁵⁾.

Die Entwicklungslinie der kognitiven Komponente beginnt schon vor der Schulpflicht und setzt sich fort bis ins hohe Alter; die der abstrakten setzt erst nach dem Beginn der Schulpflicht ein und endet gewöhnlich mit ihr. —

Auch an emotionalen Komponenten der Fähigkeit zu intellektueller Anwendung kommen zwei in Betracht: einmal müssen die höheren intellektuellen Gefühle einen gewissen Grad der Ausbildung erreicht haben, und schon muß auch die Entwicklung der Aufmerksamkeit, die die Zielvorstellung festhalten und die Wirkungen der verschiedenen Beziehungen mit ihr zu vergleichen hat, schon ziemlich gefördert sein. Ihre Seite erscheint mehr passiv, diese mehr aktiv.

Es ist dabei darauf hinzuweisen, daß die pädagogische Welt — und erst recht die nichtpädagogische — bisher in einer nicht geringen Täuschung gelebt hat in ihren Ansichten über die Gefühlsentwicklung in der Jugend. Wir haben den Kindern allgemein die Gefühle angedichtet, die wir selbst erleben; und wir haben uns bemüht, unsere Erziehungsmaßnahmen darnach auszurichten. Dem gegenüber hat die unsere psychologische Forschung weitgehende und teilweise ganz unerwartete Unterschiede der verschiedenen Lebensalter festgestellt¹⁶⁾. Und zwar gilt dies nicht nur von den

¹⁵⁾ Daß unser höherer Unterricht in diesen Punkten viel verfaßelt hat, ist gar nicht zu bezweifeln. Ist nicht der gesamte Schulunterricht, den wir gerade von 8 bis zum 20. Jahre und zum Teil darüber hinaus, fast rein geistlos? Wie ein Ding ist, und vor allem, welche es ist, ist, und schließlich, wie das und jenes zusammenhängt, darin zweifelt er sich fast immer. Wird ja die Größe eines Dinges so im Auge gefaßt, daß sie neben den Qualitäten eine charakteristische Stellung einnimmt? Man wird hinweisen auf die Quantitätsmerkmale und Mitbewusstsein in Geographie. Aber sind nicht gerade dies Zahlen, welche fast nur verfaßt vorgelesen sind? Und dabei soll immer noch ganz deutlich werden, daß das Geistes noch am ehesten den Versuch macht, ihr Geistes, was es interessiert. Wenn man sich aber z. B. Psychisches versteht, so kann man ganz genau lernen, wie ein Flötenzug wirkt, selbst die Differenzialrechnung, wie eine hydraulische Presse oder ein Dynamometer. Auch wie ein schwach Ding ausbleibt oder zwischen blüht, ist nicht durch Bildungen erläutert. Wo aber Geistes man, ihr welche Linsen der gewöhnliche oder der Differenzialrechnung gekannt wird, während die Anzahl und die Leistungsfähigkeit einer kleinen hydraulischen Presse in einer Metallindustrie und einer großen Kruppenscheide, wie groß in Verbindung eine Dynamometer ist, und was diese Größe ist, z. B. in Linsen oder in einer sonstigen mechanischen oder reinen Anlage? Es ist in der Tat nicht einleuchtend, warum im Unterricht die Quantitätsrechnung so stark verteidigt wird ohne Qualität und Charakter, obwohl sie im Leben — der Krieg ist einer Leistungsfrage folgt die Fertigkeit — wenigstens eine ähnlich große Bedeutung hat.

¹⁶⁾ Zwischen dem Gefühlsleben z. B. eines kleinen geistlichen Karm oder eines kleinen Karmers und dem der Jugend besteht in dem meisten Fällen ein

übrigen sogenannten höheren Gefühlen, dem ethischen, religiösen und ästhetischen, sondern auch von dem intellektuellen, dem Wahrheitsgefühl, dem Tatsachengefühl, dem Gefühl der Übereinstimmung, den intellektuellen Erlebensgefühlen usw.

Dass die Aufmerksamkeit erst nach und nach aus der mehr passiven zu einer mehr aktiven sich entwickelt, ist eine psychologische Tatsache, die sich weiteren Erweisen bekundet hat.

Eine bemerkenswerte Gesamtwirkung dieser vier Teilkräfte kann freilich erst dann eintreten, wenn jede einzelne ein gewisses Maß der Ausbildung erreicht hat. Das ist nur in seltenen Ausnahmen vor dem 10. bis 12. Jahre der Fall, sehr oft noch später. Aber einer Vorbereitung bedürfen diese Kräfte schon vor dieser Zeit. Wie dies zweckmäßig zu geschehen hat, davon wird in späteren Abschnitten die Rede sein. Nur ein allgemeiner Hinweis sei hier angefügt. Das Wachstum der einzelnen Kräfte wie auch recht ihrer Verbindung wird wesentlich gefördert durch zweierlei Anregung, eine mehr äußere und eine mehr innere. Diese besteht im Beispiel; sie verursacht die Nachahmung, die in Ziel und Mitteln immer bewusster sich gestaltet soll. Diese besteht in der Gewährung der Gelegenheit zu wirklich eigenem Tun und Versuchen. Während nun in den jüngsten Jahren des Kindes noch das Beispiel die größte Wirkung hat, geht dieser Erfolg langsam über auf die Gelegenheit zu wirklichem Handeln, so daß in späteren Jahren diese das bedeutungsvollere Erziehungsmittel darstellt — auch zu mathematischer Bildung. —

Zu welcher psychischen Konstitution eine derartige Entwicklung führt, sei mit einigen wenigen Strichen angedeutet. Ein so mathematisch Gebildeter wünscht in Geographie u. B. Flurrechnungen und Bergflächen zu wissen, nicht um sie mechanisch einzuprägen, sondern weil ihm dadurch das Bild, das seiner Vorstellung vorschwebt — ein Stadtbild aus der Vogelperspektive etwa — klarer wird. Er breucht Geschichtszahlen und hat sie eben in Gedanken vorlag, den Ereignissen gewissermaßen ein Gerüst gegeben, das ihm die Entfernung und zugleich die zeitliche Verbindung der Einzelheiten zeigt. In den Naturwissenschaften wünscht er Mittelwerte und Grenz-

stärkender Grenzen, den die Mehrzahl von uns gar nicht für möglich gehalten hätte. Wir müssen in dieser Beziehung tatsächlich ziemlich verschieden sein. Auch jene kleinen Herren können sich dieser Exposition bewußt werden, wenn sie bemerken, daß sich diese beiden die Frage zu beantworten: Was habe ich in meiner Jugend ganz gehabt, was hat mich — nicht als aufwendendsten Ereignis — sondern im geistlichen Leben der Jugend am meisten gelehrt? Wenn wir dann noch hinzunehmen, daß durch den Wandel der Jahre — die heutige Jugend im Vergleich zu unserer — nicht etwa eine größere Festigkeit heute zu finden ist, daß vielmehr der innerlich tiefere Kulturbegriff ungemein verfallen ist, so können wir einem gewissen Eindruck von dieser Gefühlsbildung gewissermaßen.

werte kennen zu lernen, für technische Tatsachen verlangt er zahlenmäßige Angaben über Ausdehnung und Wirkung. Er beruhigt sich nicht mit reinfindlicher Kasualität, sondern ist gewöhnt, den Dingen zahlenmäßig auf den Grund zu gehen. Sprachlosien, Liederwahnern und Seitenwahnern haften in seinem Gedächtnis, weil er darin eine Unterstützung seiner Kenntnisse findet. Als Schüler nimmt er sich vor, die aufgegebenen Menge von Vokabeln oder von anderen Lernstoff in bestimmten Teilen und in entsprechenden Zeiten zu bewältigen. Er legt überhaupt Wert auf Zeitbeurteilung und Anweisung. In der Kunst sieht er das Extremum, er betont dagegen die Harmonie, er hat ein hochentwickeltes rhythmisches Gefühl. Er ist praktischer Tätigkeit stark zugewandt und interessiert sich für den Preis von allerlei Gütern. Er zeigt einen starken „Wirklichkeitsglaube“ und ist sehr bewußt in Bezug auf Recht und Billigkeit²⁾. Es ist ein eigenartiges inneres Gerichtswesen, das alle Erhebungen des Lebens mit Ansicht unter dem Gesichtspunkt des Maßes — keineswegs ausschließlich, das wäre eine nicht wünschenswerte einseitige Entwicklung³⁾.

Diesen Anschauungen gegenüber wird sich nun zweifellos der Einwand erheben: Das sind doch alles Merkmale mathematischer Beanlage, weniger mathematischer Bildung. Dies müßte ohne weiteres angegeben werden, wenn wir die Mathematik ein besonderes Organ hätten, wie es der Musiker im Ohr, der Maler im Auge sein eigen nennt. Da dies aber nicht der Fall ist, so sind wir genötigt, den Begriff der mathematischen Beanlage zu analysieren. Da ergibt sich folgendes: Gehen wir die oben besprochenen Komponenten mathematischer Anwendungsfähigkeit durch, in deren Verbindung mathematische Bildung wie mathematische Anlagen an Herlichkeiten in die Erscheinung treten, so fällt uns allerdings auf, daß hier in gewissem Maße beschränkt sein können der visuelle und der motorische Auffassungstypen, die ja beide das räumliche Vorstellen mit besonderem Erfolg anwenden. Denn obwohl die direkte Zellerscheinung betraute als Voraussetzung der Zahl und damit der Mathematik gelten kann, so ist doch Fortschritt wie Darstellung der Mathematik viel mehr räumlich orientiert.

Damit würde allerdings erklärt sein, daß der rein akustische Typus, wie er uns in manchen Musikern, Sprachkünstlern, Dichtern, vielleicht auch Sprachgelehrten begegnet, mathematisch weniger begabt erscheint. Dem gegenüber ist jedoch darauf hinzu-

²⁾ Im Sinne der Herakleitenischen Ideen.

³⁾ Eine solche einseitige und gelehrte Betätigung scheint in gewissen Kreisen der englischen und amerikanischen Gesellschaftslehre ebenfalls eingetreten zu sein. Darin wird ein geistiges Gericht unter Volk heftiglich bewahrt, nicht in dem die guten Seiten haben Gesichtspunkte, sehen den volkswirtschaftlichen Mangelhaft der Individualitäten, die ethischen und intellektuellen vor Hilfe gelangen lassen.

weisen, daß der reine ästhetische Typus äußerst selten ist und daß die große Mehrzahl der Menschen dem visuellen und dem gemischten Typen angehört, dem visuell-mathematischen und dem ästhetisch-mathematischen⁷⁾.

Außerdem wäre noch möglich, in einem vorhandenen ausgeprägten fiktionalisierender Aufmerksamkeit (die in Mäntern und ähnlichen Erscheinungen ihren Grund haben kann) einen Mangel an mathematischer Begabung zu erkennen. Sie kommt gern zusammen mit passiver Phantasietätigkeit, die in hohen Konzentrationen sich gefällt, scharf festgehaltenen Zielvorstellungen aber aus dem Wege geht.

Die Frage nach der mathematischen Basislage dürfte sich aber zunächst nur in der Negation ausdrücken lassen, daß der rein ästhetische Typus und die fiktionalisierende Aufmerksamkeit wenigstens mathematisch begabt verbleibt.

Viel mehr Gewicht als der körperlichen Anlage dürfte bei der Entwicklung der mathematischen Bildung der Wirkung von Umgebung und Erziehung beigemessen werden. Es ist dies schon gelegentlich der Darlegungen über die Altersfolge der Entwicklung der Zahlbegriffe und Operationsbegriffe berührt worden. Das Mädchen der höheren Klasse, dessen Geschlechtscharakter schon an sich zu größerer Rezipienten neigt, lebt oft noch mit 10 und mehr Jahren ein Märchenleben, lebt in Spiel und Schmelz und Erfüllung aller Wünsche, dem tritt weder die Wirklichkeit des Lebens noch das Maß der Dinge und Erscheinungen mit zwingender Gefühlsbetontheit gegenüber. Es lernt in der Schule fleißig — mehr passiv — seine Operationenstücke, und verlangt, wenn es sich um mathematische Anwendung, d. h. hier mathematische Bildung, handelt. Wer nicht alle die verschiedenen Einflüsse sieht, in ihrer Wirkung kennt und nachprüft, der spricht dann gern von einer geringeren mathematischen Befähigung des weiblichen Geschlechts, wo er doch lieber von einer andern gestörten Erziehung sprechen sollte.

Es kommt ja hier noch ein anderes hinzu. Bei unverheirateten oder kinderlosen Frauen scheint die Zeit lange nicht den Wert zu haben wie bei Männern in gleicher Lage. Handarbeiten von großem Fleiß, großer Geduld und in großer Menge sind das oft Zeugnis, von andern Beweisen abgesehen. Weiter wird allgemein der Gedanke der „Versorgung“ des Mädchens als selbstverständlich angesehen. Es sucht diese rein persönliche Versorgung entweder in der Ehe, oder in einem Beruf, dessen Ertrag für die Erhaltung eben nur der eigenen Person bestimmt ist, oder es „wird versorgt“. Dieser ge-

⁷⁾ Gerade die hervorragendsten unter den vielen genannten Persönlichkeiten haben sich selbst ihre hochentwickelten mathematischen Geistes in dem ästhetisch-mathematischen Typus zu erkennen.

samste soziale Zustand bringt es mit sich, daß bei einem großen, besonders dem Plagium Teil unseres weiblichen Geschlechts der Lebensstiel, durch eigene Arbeit sich und die Seinen vorwärts zu bringen, nicht in der starken Ausprägung vorhanden ist als beim gleichaltrigen Mann. Für eine geringere mathematische Interessiertheit des weiblichen Geschlechts lassen sich also so viel Einflüsse der sozialen Lage, der Umgebung und der Erziehung nachweisen, daß für die Behauptung einer geringeren Befähigung der Nachweis noch nicht als erbracht anzusehen ist.

Man braucht sich ja auch nur Gegenbilder vorzustellen, um den außerordentlichen Einfluß der sozialen Lage und der Erziehung zu erkennen. Der Knabe aus ärmeren Verhältnissen, der früh seine Geschwister zu versorgen hat, während der Vater seiner Arbeit nachgeht und die Mutter Zeitungen trägt, der da spannt, wie er sich einen Förder verdienen oder den Eltern etwas erhalten kann, der vielleicht gar schon regelmäßigen Erwerbspflichten neben seinen Schularbeiten nachgeben hat, der würde selbst bei ähnlicher Anlage ein reges mathematisches Interesse betreiben. In demselben Maße aber kann es zu finden sein bei dem Sohne des wohlhabenden Kaufmanns, wenn er zu rechter Zeit dem Vater im Geschäft „helfen darf“.

Neben diese gewaltigen Einflüsse der häuslichen Umgebung und Erziehung auf die Entstehung mathematischer Bildung stellt sich nun als gleich bedeutsamer Faktor die Wirkung des Schulunterrichts. Was ist denn zu sagen? Durch unser ganzes Buch zieht eine leise Anklage dieses Unterrichts, nicht der Personen — das ist schon mehrfach betont worden —, sondern der Verhältnisse, die den nötigen Fortschritt verhindern haben. Wir sind der Überzeugung, daß wir 5 mal soviel mathematisch „gut Besinigte“ finden würden, wenn unsere Schulerziehung, selbstverständlich voran der Rechenunterricht, ein gut Teil psychologischer und pädagogischer (d. h. zielbewußter, nicht etwa lehrplanvoller) wäre. Wie diese Überzeugung zustande gekommen ist, das bitten wir dem zweiten Teil dieses Buches zu entnehmen.

Zur Frage der Anlage, der häuslichen und Schulerziehung noch eine Analogie! Ganze Schulgepfungen beruhen sich auf dem Grundsatze der vorliegenden Sprachbildung auf. Obwohl es nun keinem Zweifel unterliegt, daß der ausgesprochen skandinavische Typus verhältnismäßig selten ist, so haben doch diese Schulen Übergangskinder und Neupädagogen, d. h. solche, die ihre Lebensarbeit diesem Gebiete zu widmen gedenken. Auch hier zeigt sich, daß Umgang und Erziehung, besonders aber Gewöhnung und Übung den Mangel einer ausgesprochenen Begabung ersetzen und zu normaler, ja sogar übernormaler Reife führen können.

Des Aufbaus II. Teil:

§ 16. Ein neues Ziel.

Die Faccia des heutigen Rechenunterrichts gleicht sich vor zwei Aufgaben gestellt zu sehen: 1. mögliche Rechenfertigkeit zu erlangen, 2. für alle wichtigeren Rechensfälle des Lebens Lösungsverfahren zu entwickeln und einzuüben. Zwar aus den amtlichen Lehrplänen ist dies dem Wortlaut nach nicht zu entnehmen. Sie beschäftigen sich einer höchst nachlässigenartigen Voricht, wenn sie fast übereinstimmend das Ziel des Rechenunterrichts zu aussprechen: Befähigung zu selbständiger, sicherer und schneller Lösung der Aufgaben des gewöhnlichen Lebens.

Aber die Methoden, welche das Bedürfnis haben, die Zweckbestimmungen weiter auszuführen und zu begründen, lassen jene zweifelhafte Aufgabe deutlich erkennen.

Maertens und Schreiber¹⁾ nennen als materialen Zweck: eine für das Rechnen des praktischen Lebens ausreichende Sicherheit im Gebrauche der Zahlen mitzugeben — was sie weiter unten ausdrücken als Rechenfertigkeit —, und als formalen Zweck: durch Förderung der Deckungsfähigkeit die geistige Kraft des Kindes anzureichen — dies geschieht durch verständiges, auf Veranschaulichung und Entwicklung des Verfahrens beruhendes Deckrechnen.

In ähnlicher Weise erläutert den Zweck des Rechenunterrichts auch Rude²⁾.

Schumann und Voigt³⁾ fügen dem materialen und formalen noch das sittliche Ziel hinzu; ebenso Hellmann⁴⁾, während Rogener⁵⁾ und Hohmann⁶⁾ eine sittliche Aufgabe des Rechenunterrichts verneinen.

Viele erwähnen das Wort Tüchtlichkeit: „Der Schüler soll deckend rechnen und rechnend denken lernen, das ist das eine; er soll neben der Einsicht auch dazugehörige Fertigkeit gewinnen, welche das Leben verlangt, das ist das andere.“

Auch Haschner⁷⁾ zeigt in seiner Durcharbeitung des Stoffes, daß die Entwicklung und Übung des Lösungsverfahrens ihm als

¹⁾ *Praxis*, Anleitung, III. Aufl. 1913, S. 2.

²⁾ *Rechnen*, II. Bd. 1. Aufl. 1913, S. 374.

³⁾ *Lehrbuch der Pädagogik*, III. Teil, 11. Aufl. 1904, S. 377.

⁴⁾ *Lehrbuch der Pädagogik*, II. Bd. 9. Aufl. 1911, S. 135.

⁵⁾ *Besondere Unterrichtsfächer*, 3. Aufl. 1906, S. 206.

⁶⁾ *Rechnen*, 1. Aufl. 1904, S. 305.

⁷⁾ *Unterrichtsfächer*, III. Bd. 1910, S. 17 ff.

der normale Weg und darum die Übermittlung des Lösungsverfahrens als ein dem Fachunterricht gestecktes Ziel erscheint.

Wie nun schon in unserer kurzen Besprechung der angeführten Lehrpläne und Lehrpläne angedeutet wurde, ist dieses Zielstellung nicht haltbar. Zunächst wird der Begriff des materialen Ziels anders als sonst aufgefaßt, wenn man darunter Fachfertigkeit versteht. Fachfertigkeit ist eine Fertigkeit im Ablauf assoziativer gewordener Abstraktionen, und zwar von ziemlich komplexer Art, nämlich Belegungs- und Vergleichsbeziehungen, wie oben gezeigt wurde. Das ist aber kein Material im üblichen Sinne der Didaktik. Hier wird der Ausdruck Material mehr bezogen auf das Wissen, auf die Kenntnis der Wirklichkeit, der Tatsachen. So wird in der 2. Formstufe das „Material“ dargestellt. Auf der 3. wird das dargestellte Material mit dem sonst vorhandenen Material verglichen. Das auf der 4. Stufe herabgedeckte Abstraktion schwebt gewissermaßen über dem Material, sie wird mit Hilfe des Materials gewonnen, wird aber nicht als mit dem Material identisch aufgefaßt. Ein ausstrahlender Ablauf solcher wirklich als Material zu bezeichnender Vorstellungswelten läßt die Vermutung entstehen, daß sie rein äußerlich eingepreßt sein möchten, so wie wir Laut und Buchstaben rein äußerlich assoziieren und durch wiederholte Wiederholung diese Assoziationen befestigen müssen. Vom „Material“ aber schreiben wir, daß es verarbeitet, assimiliert, also innerlich verarbeitet worden sei. Wir verstehen es dabei völlig, daß vom psychologischen Standpunkte aus auch mechanisierte Assoziationen als „Material“ für komplexere Vorgänge, für die höheren Geistesprodukte erscheinen und angesehen werden. Wir haben uns selbst dieses Ausdrucks bedient. Hier aber handelt es sich um etwas anderes. Von der gesamten pädagogischen Theorie werden neben die Reihe der Sachbücher als Formlicher Sprache und Mathematik gestellt. Das will sagen, diese Bücher machen das Kind eigentlich nicht mit neuen Vorstellungsgut bekannt, sondern zeigen ihm an den ihm geläufigen Vorstellungen nur eine gewisse Seite, die wir Form, Ausdruck, Abgrenzung, Darstellung nennen könnten. Selbstverständlich kann dieser Charakter des Buches nicht zum Ausdruck kommen, ihr ganzes Bestehen ist nicht denkbar ohne Material, auch nicht ohne ihnen eigene begrifflichen Material. Das ist ebenso selbstverständlich wie, daß man im Zeichnen gerade und krumme Linien, beim Sprechen Laute und beim Schreiben Buchstaben braucht, ihnen Beizug erwarten soll muß. Es geht aber nicht an, das, was selbstverständliche Voraussetzung ist, zur Zielaufgabe zu gestalten, wenn anders wir nicht den ganzen Charakter des Buches verwischen wollen. Wie wir den Realien im Unterricht zunächst die Aufgabe stellen, die Augen mit den Dingen bekannt zu machen, und hoffen, daß dabei oder daneben

auch ein formaler Zweck erreicht wurde — der an sich von höchsten Werte sein kann — so ist im Gebiet der Formeller der Formalismus in die Spätes zu rücken. Eine materielle Aufgabe im Sinne des Ausdauererwerbs ist selbstverständliche Voraussetzung, im Sinne der Rechenen würde über den Rahmen des Unterrichtsfaches hinausgehen.

Auch der Begriff des formalen Ziels wird in eigenartiger Weise ausgelegt, wenn man diesem Ausdruck beilegt auf die Anwendung eines oder auch vieler Schemata, wie sie die Anwendung der verschiedenen entwickelten und eingeübten Lösungsverfahren darstellt. Denn unter dem Hinschreiben auf ein formales Ziel versteht die Pädagogik in erster Linie die Entwicklung intellektueller Fähigkeiten, insbesondere die des logischen Vergleichens und Unterscheidens und der darauf aufgebauten Urteile, Begriffe und Schlüsse. Die materielle Anwendung eines Schemas hat damit wenig zu tun. Sie muß ja beinahe auf das Zeigepensivste hinaus, nämlich geistige Energien zu sparen und höhere Leistungen auch einer geringeren Intelligenz zu ermöglichen. Der Ausdruck formales Ziel wird weiter auch in dem Sinne aufgestellt, daß man behauptet, die Rechenfertigkeit bedere die gesamte Einsicht des Kindes. Freilich läßt sich für diese Behauptung auch nicht der Schein eines Beweises erbringen.

Man wolle uns in diesen Ausführungen nicht falsch verstehen. Wir denken nicht daran, zu behaupten, daß im Rechenunterricht nicht ein gewisser materieller wie formaler Bildungserwerb bestände. Sondern wir sind der Überzeugung, daß diese beiden Ausdrücke: materielles und formales Ziel — weder in ihrer Gegenüberstellung noch in ihrer üblichen Auffassung geeignet sind, Klarheit über die Ziele des Rechenunterrichts zu schaffen.

Fast noch weniger können wir uns befrieden mit der Formulierung dieser Ziele als Rechenfertigkeit und Anwendung der Lösungsverfahren. In dieser Formulierung erscheint die materielle Fertigkeit als erste und grundlegende Aufgabe all unseers Rechenunterrichts, während doch eine solche „Fertigkeit“ aller psychischen Entwicklung gemäß einem gewissen Höhepunkt darstellen müßte. Diese Formulierung liegt also die große Gefahr in sich, daß die wirklich erste und zugleich wichtigste Aufgabe übersehen wird: die mathematische Erkennung der Wirklichkeit. Dieser Gefahr sind ebenfalls alle diejenigen nicht entronnen, die unter irgendwelcher Begründung so zeitig wie möglich vom Anschauungsmittel loskommen möchten.

Sodann erscheint in der obigen Formulierung die Anwendung des Lösungsverfahrens als höchste Leistung, während doch allgemein gerade die Freiheit vom Schema als höhere geistige Lösung be-

trachtet wird. Der Rechenunterricht kann sich aber keine Ausnahme von diesem allgemeinen Satze gestatten. Nicht der ist mathematisch am besten gebildet, der sich beispielsweise die Formeln für die Berechnung der Vierecke gemerkt hat, sondern der, welcher inwunde ist — wenn er sie vergessen hat — sie sich in kürzester Zeit zu entwickeln.

Mit der in diesen beiden Ausdrücken niedergelegten Zielbestimmung steht also unser Rechenunterricht tatsächlich in Gefahr, herabgewürdigt zu werden zu kleiner Abzählerei, zur Dreesen, zur reinen Fertigkeit. Sein ihm eigenes Gebiet wäre dann lediglich die Technik. Aber wir wollen doch nicht Rechen-Techniker erziehen, die jederzeit wissen, „wie es gemacht wird“, d. h. die eine Routine sich angeeignet haben, die in launend Fäden nach zum Ziel führt, in launend anderen Fäden aber verirrt; wir wollen die Köpfe nicht zu Rechenmaschinen entwickeln, an denen man nur die Zahlen zu decken braucht und den richtigen Kopf dazu, um das Ergebnis zu erhalten — den richtigen Operationsknopf, das soll eben das Kind selbst bestimmen, das soll sich nicht maschinell, d. h. automatisch erreichen. Wir wollen endlich auch keine Erziehung treiben in der Art der chinesischen Wissenschaft und Technik, die nach dem Grundsatze verfährt: So hat es sich bewährt — ohne nach den Gründen zu forschen, sondern wir wollen eine Erziehung erziehen, die täglich sich neuern muß, die sich immer der inneren Gründe bewußt sein muß, aus denen sich die jeweilige Form der Handlung ergibt.

Selbstverständlich ist, daß eine solche Beschränkung des Rechenunterrichts auf technische Ziele weder in der Absicht der Lehrpläne noch in der der Methodiker liegt. Aber bei der großen Zahl derjenigen Lehrer, welche unter allerlei Benennungen des Berufs leiden, ist es begreiflich, daß viele von ihnen in der Praxis des Unterrichts nicht die Kraft und das Wissen, aber auch nicht die Voraussetzungen in sich finden, vorgesehene Zielangaben philosophisch und psychologisch zu durchdenken und sowohl ihren inneren Gehalten wie der Möglichkeit irrtümlicher Auffassung sich bewußt zu werden.

Ihre wir uns nun einer neuen Formulierung des Ziels wenden, möge erst noch vermerkt werden, die Sache an einigen Beispielen zu klären. Dabei wollen wir uns freilich immer der in Betracht kommenden Unterschiede bewußt bleiben, die Ähnlichkeit wird dann um so deutlicher hervortreten.

Im Sprachunterricht handelt es sich um Sprachverständnis und Sprachfertigkeit. Würden wir wohl unsere Aufgabe erfüllen, wenn wir das Kind lehren, bei vielleicht 60 häufiger vorkommender

den Fäden des Lebens (Begrüßung auf der Straße, Abschied nehmen, Aufzug besorgen, zu Tische setzen usw.) eine nette oder geschickliche Redeweise zu gebrauchen? Schade, würde das vielleicht nicht gerade verlernen — obwohl auch die gegenteilige Meinung Anhänger finden könnte — aber Sprachbildung wäre es nicht. Ein Star könnte damit ausgerüstet werden, reflektierend sein Sprichwort loszulassen, bei den Kindern aber wäre das eben Stören- oder Papageientum, von dem man nicht einmal erwarten könnte, daß es sich später in Sprachbildung umwandelt. Denn die verständige Anschauung und die Gefühlswerte des Erwachsenen sind nicht die des Kindes, seine geistliche Struktur ist andere; und wenn es erwachsen ist, wird es die Anschauungsform der vorigen Generation wohl verstehen können, aber zu ihrem Gebrauche nur mit gewissen leichten Änderungen geneigt sein. Sprachbildung treiben wir vielmehr, wenn wir unsere Kinder anleiten, das, was in ihnen wohnt an Vorstellungen und Gefühlen, so in Worte zu kleiden, daß der andere dasselbe versteht und fühlt, so daß die Rede eine getreue Spiegelung des wahren, des Inhalts der Seele ist. Dazu muß freilich der Seeleninhalt Leben und Gefühl haben, er darf nicht aus fadenscheinigen und weichen Worten bestehen⁷⁾.

Wir lehren das Lesen. Wir werden auf einer gewissen unteren Stufe uns die Übung der Lesefähigkeit besonders angelegen sein lassen und sie auch hoch auf den folgenden Stufen zu erhalten trachten. Wenn wir aber unsere Lesestunden bis zuletzt ausfüllen wollen damit, das Verfahren der Lautverknüpfung bei den verschiedenen Buchstabenverbindungen, das Verfahren der Hebung und Senkung bei den verschiedenen Interpunktionszeichen und andere hierher gehörige Verfahren einzüben, so können wir nicht zu Betrachtung des Inhalts, können nicht zur Literatur. Das ist uns aber die Hauptsache.

Der Zeichenunterricht ging in unserer Schulzeit auch noch die Seiten des Rechenunterrichts. Auf die associative Fertigkeit in der technischen Beherrschung der Elemente wurde der größte, ja der ausschließliche Wert gelegt. Quadrate wurden gerichtet mit keiner neuen Verfahrenen, Kreise, die von dem mit dem Zirkel hergestellten sich nicht unterscheiden, und Gipse bildeten die hauptsächlichste Leistung. Heute hat man erkannt, daß die Aufgaben des Zeichenunterrichts wohl ohne eine gewisse Technik, Fertigkeit nicht gelöst werden können, daß aber die Technik nicht Selbst-

⁷⁾ Man darf nicht meinen, daß dabei die Tradition oder die literarische Zusammenhang bilden könnte. Gerade auf sprachlichem Gebiete sind wir fast vollkommen von der Tradition abhängig. Selbst wenn der Entwicklung von manchem heute der größte Widerspruch gebildet würde, so werden die Änderungen selbst im Laufe von Jahrhunderten gescheitert sein.

zweck sein dürfe, sondern Mittel zum Zwecke einerseits der geist-
vermitteten Erkennung des Lebens, andererseits des geistbetonten
Ausdrucks des Innenlebens.

Es ist ja viel Lesen und Sprachunterricht noch so. Da das
Lesen auch von der heutigen Unterrichtspraxis als Mittel zum Zwecke
angesehen und sein Betrich entsprechend gehandhabt wird, so sind
auch die Ergebnisse in diesem Fache wesentlich erfreulicher als im
Rechenunterricht. Und das gleiche gilt vom Sprachunterricht überall
dort, wo er nicht als Selbstzweck betrachtet und behandelt wird, son-
dern als Mittel zum Zwecke der Erkennung der Außenwelt und des Aus-
drucks der Innenwelt. Wo aber Sprachunterricht, Lesen und Schreiben
Selbstzweck sind, wie wir älteren es vor 30 und 40 Jahren erlebten und
es selbst später noch widerwillig tunßen mußten, da hatte und da
hat dieser Unterricht einen sicheren Erfolg, den nämlich, den allen
den Schülern gründlich zu verleißen. Ursprüngliche Kraft ließ
sich glücklicherweise damit nicht abtöten, sie entwickelte sich dann
mehr auf Nebenwegen.

Mit dem Rechnen ist es nicht anders. Solange Rechenfertigkeit
und Einübung der verschiedenen Lösungsverfahren praktisch das
Ziel des Unterrichts bleiben, können die Ergebnisse nur betrüblich
sein. Daß sie nicht noch viel schlimmer sind, liegt eben daran, daß
die natürlichen Fähigkeiten sich gewissermaßen neben dem Unter-
richt entwickeln und auswirken. Wir Lehrer sehen es daran, daß
zu gewissen Zeiten bei weniger begabten Naturen anscheinend glän-
zende Leistungen auftreten. Meist zeigt sich der psychologischen
Analyse freilich das schmerzliche Ergebnis, daß eine solche Leis-
tung von der Schule wohl veranlaßt ist, aber nur mittelbar durch
Anregungen, Aufgaben und Ähnliches, nicht unmittelbar durch An-
fordern der Lichigkeite.

So gelangen wir auf Grund der Untersuchungen über die bis-
herigen Forderungen des Zwecks, auf Grund der Unterrichts-
praxis und endlich durch den Vergleich mit anderen gleichartigen
Gebieten zunächst zu der formalen Forderung:

Das Rechnen darf nicht mehr Selbstzweck bleiben, sondern
soll Mittel zur Verfolgung höherer Zwecke werden.

Diese höheren Zwecke aber können keine anderen sein, als
die adäquate Erkennung der Wirklichkeit, welche uns in Geist
und Natur entgegentritt, und die Förderung der Kultur, die
in den ethischen Zielen der eigenen Vollkommenheit und
fremder Glückseligkeit — nach Kant — gipfelt.

Einige Sätze mögen dies noch erläutern. Die Erkennung der
Wirklichkeit — man stelle sich den alten und den modernen
Anschauungsunterricht und den Naturgeschichtsunterricht der Mittel-
klassen vor — haben wir bis jetzt vorgenommen in der Hauptsache

qualitäts, indem wir die Eigenschaften und die Teile der Dinge beschreiben. Auf Grund dieser Betrachtung — früher geschah es oft auch ohne sie — entwickeln wir den Oberbegriff, und manchmal treten bereits Beschreibungen hinzu. Die Wirklichkeit unter dem Gesichtspunkt der Größe zu erkennen, haben wir an ständlich erlernbaren oder an mindestens als unbedeutenden an letzte Stelle gestellt. Daß die Kuh 3 Hüften, 2 Ohren und 2 Augen, 1 Kopf, 1 Schwanz und 4 Beine habe, das war die ganze unbedeutende Erfassung dieses Naturobjektes nicht nur im Unter-, sondern auch in Mittelklassen. Die Präparationswerke sind das Zeug. Sollte es aber statt solcher aus dem Inneren Rinde oder aus dem Ringel vorhandenen Oberbegriff zu entwickelnden Angaben nicht besser sein, wenn selbst unsere Geschichtslehrer mitgeteilt würde, wieviel Liter Milch man im Durchschnitt (und in besonderen Fällen) von einer Kuh erwarten kann, oder wieviel Schlachtgewicht ein solches Tier hat, oder wieviel es kostet, oder wieviel Futter es braucht — selbstverständlich all solche Darlegungen auf passender Stufe! — In der Geographiestunde müssen unsere Kinder vielfach oft lernen, daß man da oder dort Viehzucht treibt. Was das aber bedeutet, wenn man die Wirklichkeit erkennen und sich nicht mit bloßen Wortfädelungen begnügen will, das läßt sich klarlegen nur unter dem mathematischen Gesichtspunkte, wie es schon angeführt wurde. Und es sollte es überall sein: Kein Objekt dürfe den Kindern nahe gebracht werden, ohne daß es nicht auch zahlenmäßig erfüllt würde. Selbstverständlich nicht in dem Sinne, daß die Kinder nun noch mehr mit „Material“ beschwert würden, sondern in dem anderen, daß die Zahlen die Vorstellung klären und verdeutlichen und die Bedeutung des Dinges ins rechte Licht setzen. Einen vielverheißenden Anfang in dieser Richtung hat der Geographienunterricht schon seit längerer Zeit gemacht. In der letzten Zeit ihn auch erweitert durch Betonung der graphischen Darstellung (von in Betracht kommenden Zahlenproben). Andere Fächer folgen. Man sieht, der Gedanke hat längst Wurzel geschlagen. Er gilt aber nicht nur für Naturgeschichte und Geographie, sondern auch für Geschichte, Physik, Menschenkunde und Biologie — wobei wir Bürgerkunde als der Geographie und der Geschichte zugerechnet betrachten. Es gilt nicht nur für die Oberstufe, sondern in entsprechendem Maße auch für die Unterstufe; er gilt nicht nur für die Frage des Lebens, sondern auch für seine Erklärungen, rund die unter dem Gesichtspunkte des Eigentums, des Rechts, der Verwaltung und der Entwicklung stehenden. Es genügt nicht, all das qualitativ zu durchleuchten und zu verstehen, wir müssen auch die quantitative Betrachtung überall beibringen, d. h. wir müssen in allen Sachunterrichtsstunden rechnen — genau so, wie jede Stunde eine Rechenstunde sein soll. Denn Rechnen heißt eben nicht,

das Einzelne können oder Brüche durcheinander driften, sondern Rechnen heißt, die Dinge und Erscheinungen des Lebens nach ihren Maßbeziehungen richtig beurteilen können. Bezogen auf den Einzelfall ergibt sich daraus der Begriff des mathematischen Problems, bezogen auf die Gesamtheit dieser Erscheinungen der Begriff der mathematischen Bildung. Denn indem wir in unserem Sachunterricht außer den qualitativen auch quantitative, d. h. mathematische Probleme sehen und diese Probleme durch die stetig wiederkehrende mathematische Erkennung der Dinge und Erscheinungen lösen lernen, führen wir zu der wahren mathematischen Bildung, die — wie schon gezeigt wurde — sogar höhere ethische und ästhetische Werte erhält. Die Technik, die Rechenfertigkeit ergibt sich dabei als Nebengewinn ganz von selbst. Man könnte ihren Erwerb beinahe abhängig sein lassen von dem aufstrebenden Bedürfnis.

So bleibt nichts übrig, als in unsere Zielbestimmung den Begriff der mathematischen Bildung mit hinzunehmen. Es mögen nur ihre Grundlagen sein, die wir vermitteln wollen, die allerersten; darüber besteht keine Illusion. Aber es soll mit allem Nachdruck ausgesprochen werden, daß unbedingt über das rein Mechanische hinausgegangen werden muß, auch in den einfachsten Verhältnissen; und zwar sowohl in bezug auf Vorbereitung und Grundlegung des Mechanischen, als auch, und erst recht, in bezug auf seine Verwendung. Sachliche Zahlenfassung ist der Sinn der einen Seite, zahlenmäßige Sachauffassung der Sinn der anderen der beiden Seiten, welche den heutigen Rechenunterricht zu ergötzen beufen sind.

Ansichte solcher Forderungen dürfte wohl der Einwand erheben werden: Mathematik gehört in die höheren Lehranstalten, die Volksschule hat es lediglich mit dem Rechnen zu tun. Wer aber so spricht, zeigt nur, daß entweder sein Begriff der mathematischen Bildung korrekturbedürftig oder seine Ansicht von den Aufgaben der Volksschule nicht mehr zeitgemäß ist. Er verengt meist den Begriff der Mathematik, indem er sie — wie es vielfach geschieht — begrenzt hält mit Algebra, mit einer Abstraktion höheren Grades. Das ist aber ein Irrtum. Mathematische Bildung beginnt vielmehr schon dort, wo die Größenbeziehungen des Mehr und Weniger gewonnen werden. In diesem Sinne kann man sogar sagen, es kann einer Algebra treiben, ohne dabei mathematische Bildung zu erwerben — wie wir es selbst eine Zeitlang in unserem Lehrwesen erleben mußten —, wenn nämlich die Algebra betrieben wird als Anwendung einer Anzahl einander anderer Rechenregeln. Von hier aus gesehen, könnte auch die Behauptung aufgestellt werden: „Mathematik und Rechnen sind zwei verschiedene Dinge, die inhaltlich ge-

legendisch konstatiert auftreten können“).“ Der Besitz der Mathematik ist tatsächlich etwas Geistiges, Apperzeptives, Potenzielles, der Besitz des Rechnens etwas Mechanisches, Associatives, Materielles. Mathematik und Rechnen verhalten sich wie Fähigkeit und Fertigkeit, beinahe auch wie Denken und Sprechen, wie Dichtung und Lesen, wie Kunst und Handführung.

Dass die Schule aber sich häufig nicht wird der Aufgabe widmen können, die Grundlagen mathematischer Bildung zu vermitteln, das braucht im Jahre des Kriege nicht mehr begründet zu werden.

Ausdrucks dieser unabweisend reformatorischen Forderungen, an Stelle des bisherigen Rechnens Maßematik — oder richtiger: mathematische Bildung in den Erziehungs- und Unterrichtspläne der Volksschule aufzunehmen, ist es gewiß für viele eine Beruhigung, wenn darauf hingewiesen wird, daß dieser Gedanke durchaus nicht neu ist, ja daß er eigentlich geahnt und gefühlt wurde von jeher, daß man aber in Eilefort vor der „höheren Bildung“ und bei dem Mangel an ausreichenden psychologischen Kenntnissen nicht wagte, den Ausdruck mathematische Bildung in den Erziehungspläne der Volksschule einzusetzen. Wir wollen aber des Gedankens gern darin angedeutet finden, daß die „Allgemeinen Bestimmungen“ wie der Bismarcksche Lehrplan und viele andere von „Befähigung zu selbstständiger . . . Lösung der Aufgaben“ sprechen, sowie davon, daß das Rechnen als „Übung im klaren Denken“ zu betreiben sei. Klarer ist es schon ausgesprochen im Leipziger Lehrplan: „Klaren Verständnis der bei zahlenschätziger Auffassung der Dinge und Verhältnisse sich ergebenden Rechnungsvorgänge, . . . das Urteil zu schärfen und zur Selbstständigkeit zu führen.“ Am weitesten geht der neue Berliner Lehrplan, wenn er als Aufgabe des Rechnenunterrichts hinstellt: „Die Verhältnisse des Lebens zahlenschätzig zu erfassen.“ Die Heftblätter, hat ohne Ausnahme, stellen den Gedanken der mathematischen Bildung in die Worte: „Förderung der geistigen Kraft“ — wobei freilich das „rechnende Denken“ Tüchtel oft offert, aber um so schöner durchdacht und ausgeführt werden ist. Unter ihnen ruft Walzmann⁵⁾ hervor durch die Formelsetzung: „Numerische Auffassung, Anschauung und Denkfähigkeit.“

Für Erziehungs- und Unterrichtspläne dürfte sich außer der kurzen Formel „mathematische Bildung“ noch die ausführlichere eignen: Der Rechnenunterricht hat die Aufgabe, die Grundlage zu vermitteln für eine mathematische Er-

⁵⁾ Paul Hoffa, *Phil. Bildung* 1911 No. 10.

⁶⁾ Heftblatt. I. Bd. 1912. S. 81.

fassung der Dinge und Erscheinungen des Natur- und Menschenlebens.

Dafß in dieser Fassung auch das Technische, das Können im besondern Sinne mit enthalten ist, braucht nicht hervorgehoben zu werden. Es ist ebenso selbstverständlich, wie daß im Sprachunterricht Sprachübungen vorgenommen werden müssen, daß das Lernen durch Übung es weit mechanisierter werden muß, daß es sein sollte, man möchte bald sagen: unbewußt, was sich geht. Es ist ebenso selbstverständlich, wie daß jemand, der handwerklich tätig sein will, Fertigkeit in der Handhabung irgendwelcher Werkzeugelemente sich erwerben hat; ebenso selbstverständlich, wie daß wer malen will, die Kelle, Kreide, Bleistift, Feder- und Pinseltechnik beherrscht. Aber diese Fertigkeiten sind nichts als auxiliäve Behelfe, welche die Entwicklung der Fähigkeiten je nach ihrer Ausübung unterstützen können und für die entwickelten Fähigkeiten ein Werkzeug der Ausübung bilden, aber niemals mit den Fähigkeiten selbst verwechselt werden dürfen¹⁾. Wenn demnach dem geklärten pädagogischen Blick der Gegenwart die Fertigkeit als ein zwar notwendiges und daher selbstverständlich zu erwerbendes Hilfsmittel erscheint, aber doch eben als Hilfsmittel, das an Bedeutung zurücksteht hinter dem eigentlichen Ziel, so ist es die Aufgabe der künftigen Zeit, die Bildung bewußt an Stelle der Technik zu setzen. Und dies nicht nur in den Zielbestimmungen der höheren Schulen, sondern auch in denen der Volksschule.

¹⁾ Unschärf ist wohl die Auffassung, als könnten aus Fertigkeiten Fähigkeiten werden.

Der Aufbau III. Teil: Das Lehrverfahren.

§ 17. Vorbemerkungen.

In den folgenden Abschnitten sollen nicht die Fragen nach dem *Tatsachen* und dem *Entwicklungsprozess* mathematischer Bildung erörtert werden, diese Abschnitte sollen vielmehr praktischen Ratschlägen gewidmet sein, die dem Unterrichte unmittelbar ansetzbar kommen können. Wenn diese Ratschläge freilich nicht in der Luft hängen sollen, so muß ihr Aufbau auf der wissenschaftlichen Grundlage der psychologischen Forschung nachgewiesen, ihr Hinzuwirken aus dieser Grundlage klargelegt werden.

Die Hauptfrage, die für die gesamten folgenden Ausführungen maß- und richtungsgebend sein soll, mag demnach ihren Ausdruck finden in der Form:

Welches ist das wissenschaftlich und praktisch begründete Lehrverfahren, mittels dessen wir die Entwicklung des Schülers in der gewünschten Weise fördern?

Diese Formulierung läßt ohne weiteres den Einfluß der neuen Zielbestimmung erkennen. Nicht um ein Lehrverfahren handelt es sich, mittels dessen wir dem Schüler auf möglichst leichte, auf möglichst leichte oder lustvolle Weise etwas beibringen, seien es Kenntnisse, seien es Fertigkeiten. Beibringen, darbieten, übermitteln sind vielmehr Begriffe der Unterrichtskunst vergangener Tage und haben für die Gegenwart geringeren Wert; denn der pädagogische Blick unserer Zeit ist nicht mehr stofflich eingestellt. Wohl soll der Schüler auch künftig Kenntnisse und Fertigkeiten gewinnen — wir hoffen sogar: noch mehr als früher — aber wir wollen es ihm nicht beibringen, sondern er soll sie sich erwerben. Auch das Richterstück vom Erfolg der Täter, das zu erwerben sei, ist in der Pädagogik viel mehr stiller als durchschaut und befolgt worden. Wir wollen seine Mahnung Wirklichkeit werden lassen, indem wir das „Erwerben“ künftig nur dort gestatten wollen, wo die Fähigkeit des Erwerbs genügend ausgebildet ist.

Damit wechselt auch das Lehrens Aufgabe auf allen Gebieten. Statt Stoff darbieten, wird er künftig die Fähigkeiten des Schülers zu entwickeln haben. Das ist etwas völlig anderes, besonders für die Gestaltung des Rechenunterrichts. Denn durch die andere ge-

erste Formulierung der Frage nach dem Lehrverfahren werden dem Lehrer zwei Hilfsmittel aus der Hand genommen, die den meisten bisher als unentbehrlich angesehen und als kennzeichnende Merkmale höherer Lehrkunst: Das Darbieten und das Entwickeln. Es gibt ihm aber dafür zwei andere in die Hand, die zunächst unscheinbar, in ihrer Wirkung jedoch ungleich mächtiger sind: die Veranlassung der Gelassenheit und die Anregung zu eigener Entwicklung.

Und das Tun des Schülers ist nicht mehr auf Empfangen eingestellt, sondern auf Erarbeiten. Nicht Leitung und Beispiel, sondern Organisation und Aktivität ist es, was das Lehrverfahren der Zukunft kennzeichnet.

Diese grundsätzlichen Forderungen, die sich aus der neuen Zielstellung ergeben, müssen nun noch übertragen werden auf den Zentralbegriff des gesamten mathematischen Unterrichts, auf den der Abstraktion. Wir formulieren: Welche Anforderungen an das auf Eigenattività gegründete Lehrverfahren stellt die Tatsache, daß der mathematische Unterricht in seinem ganzen Wesen Abstraktion ist?

I. Abschnitt des Lehrverfahrens:

§ 18. Die Abstraktion.

Allgemein ist man der Ansicht, daß die Grundlage aller Abstraktion die Anschauung sei. Will man also die Abstraktion recht verstehen, so gilt es, zuvor diese Grundlage kennen zu lernen. Nun gehen freilich die Meinungen darüber, was unter Anschauung zu verstehen sei, auseinander. Wie wir an anderem Orte gezeigt haben¹⁾, kann man allein von der pädagogischen Bedeutung des Wortes drei verschiedene Auffassungen nebeneinander stellen. Diese Verschiedenheit der Auffassung hat dazu geführt, daß die neuere Psychologie sich diesem Wortes eigentlich gar nicht mehr bedient, sondern es streicht. Hölting ist dies in folgender Weise: „Aus solchen Einzelvorstellungen werden durch Assoziationsgesetze zusammengeordnete Vorstellungen gebildet, welche den zusammengeordneten Perzeptionen entsprechen; sie betreffen Gegenstände, Personen, Verhältnisse und Eigenschaften und können Individualvorstellungen genannt werden. Die Einzelvorstellungen sind in diesen zu Totalitäten verbunden“²⁾. Wenn wir nun gleichwohl diesen Ausdruck brauchen, so ist es nötig, genau festzustellen, welchen Inhalt wir ihm beilegen wollen.

¹⁾ Cassirer und der Anschauungsgrundsatz, Leipzig 1903.

²⁾ Hölting, Psychologie in Unterricht. 2. deutscher Abt., Leipzig 1908.

Ein Beispiel soll das verdeutlichen. Aller zwei Jahre, in jetziger Zeit noch öfter, kommen wir in eine Klasse mit uns unbekannten Schülern. 20 bis 40 neue Gesichter treten uns entgegen. Einige Köpfe haben etwas an sich, das uns interessiert (rotes oder stierpiggiges Haar, absonderliche Stirn- oder Nasenform, ein besonders lebhaftes Auge usw.), die kennen wir vom ersten Anblick. Andere müssen wir ein paarimal recht genau ansehen, und einige, die „zum Verwechseln ähnlich“ sind, kennen wir vielleicht erst nach Wochen sicher unterscheiden. Dann kommen die 20 bis 40 neuen Namen; sie zu lernen und außerdem noch den richtigen Gesicht zuzuordnen, macht manchem von uns große Schwierigkeiten. Wiederholtes Betrachten des Gesichts mit gleichzeitigen Namen des Namens überwindet sie endlich. Haben wir uns von dem einzelnen Schüler eine Anschauung? Manche werden diese Frage zu bejahen geneigt sein, andere werden sie verneinen mit der Begründung, daß es eine „Anschauung“ noch mehr gibt. Sie hätten eine Anschauung nur von einzelnen Teilen gewinnen können. Von diesen einzelnen hätten sie jeden gesehen „nahe“, und sie malen ihn mit Worten und Gesten¹⁾. Von den übrigen hätten sie nur eine „nahezu Anschauung“, das sei aber eigentlich ein Widerspruch in sich selbst. Demen, die es sprechen, wollen wir uns anschließen.

An diesem Beispiel zeigt sich, daß wir noch nicht dort von einer Anschauung im pädagogischen Sinne reden, wo wir ein äußeres sinnliches Bild eines Individuums gewonnen haben, sondern erst dort, wo das äußere sinnliche Bild durch die Kenntnis der inneren Beziehungen vervollständigt worden ist, ja wo die Einzelheiten des äußeren Bildes zu Trägern der inneren Beziehungen geworden sind. „Kennen Sie das neue Seminar in D.?" fragt uns ein Bekannter. „Bedauere, nein, ich bin erst einmal daran vorbeigegangen." Eine Anschauung eines solchen Gebäudes haben wir erst dann gewonnen, wenn wir es durchwandert haben, und zwar durchwandert mit der Gewandtheit der Erfahrungen, die wir in Bezug auf diesen Gegenstand schon gemacht haben. Bei einem Durchgangsblitz, einer Fabrik, einem Höfnerwerk gewonnen wir (d. h. wir Pädagogen) auch von einem einmaligen Durchwandern noch keine Anschauung, sondern nur einen „Eindruck", ein oberflächliches Bild. Der jeweilige Fachmann kann sie gewinnen. Der sinnlichste Beobachter hat zu einer Oper mit einmaligem Hören kommen, der Mittelbegabte braucht sie dreimal und öfter, ehe er eine Anschauung von ihr gewonnen zu haben glaubt, ehe er sie kennt. Diese Beispiele zeigen uns, daß

1) D. h.: Da, ist eine, insbesondere, jaguen, weiß, von selbst Gehen, manchmal auch bei der Nacht, aber man kann ihn nicht sehen wie, man nicht in sehen. Augen das Sehenen darüber und schon mit einem Mann und Worten die gute Arbeit, Funktionen unterscheiden . . .

nach weitere Anforderungen an die Anschauung zu stellen sind. Wir können sie demnach erklären als eine Assimilationsform, die in wiederholter, planmäßiger und allseitiger Auffassung der Merkmale und Beziehungen eines Einzelwesens besteht. Was diese Forderung von der Höflingschen unterscheidet, sind die Forderungen: wiederholt, planmäßig, allseitig, sowie die Betonung der Beziehungen als der inneren Merkmale des Einzelwesens.

Diese einzelnen Punkte haben nicht geringe Bedeutung für die Gewinnung der Abstraktion und für die Gestaltung des Lehrverfahrens. Nur in wiederholter Auffassung kommt eine Anschauung zustande. Mancher aber glaubte bisher, er habe alle Vorbedingungen für die Entwicklung einer Anschauung erfüllt, wenn er einmal eine halbe Stunde lang der Klasse das Objekt der Anschauung vorführte. Auch der Tadel jüngerer Lehrer an vorweisende Kinder: „Aber das habt ihr doch gehabt“ entspringt diesem Irrtum. Bei Kindern darf im allgemeinen unter „wiederholter Auffassung“, „sehr oft wiederholte Auffassung“ verstanden werden¹⁾.

Dass die Anschauung ein planmäßiges Auffassen ist, bezieht sich nicht auf das Lehren, sondern auf den, der die Anschauung gewinnt, den Schüler. Bisher war unsere Meinung die, daß die Auffassung immer der Lehrer zu leiten habe, daß das „planmäßig“ also nur von ihm gelten könne. Aber wenn einer noch so oft denselben Weg geht, so lernt er wohl diesen Weg kennen, nicht aber die Art, wie man in anderen Fällen seinen Weg sich sucht. Die Auffassung des Schülers muß planmäßig werden, das heißt, es muß die in ihm wohnende Fähigkeit der Auffassung entwickelt werden, wir müssen ihn eine Methode der Anschauung sich erwerben lassen. Zu dem Zwecke werden wir ihm zeigen, wie man seine Aufmerksamkeit richtet auf qualitative und quantitative Beschaffenheit, auf Teile, Reihenfolge, Bedeutung, Zweck usw.

Weiter muß die Auffassung allseitig sein, wenn sie zu Anschauungen führen soll. Das bedeutet zunächst die Auffassung mit allen Sinnen, nicht bloß das Wortes mit dem Ohr, auch nicht bloß des räumlichen Vorstellungsbildes mit dem Auge, sondern auch die Auffassung mit Geruch und Geschmack, wenn dies in Betracht

¹⁾ Ein Kind des 3. Schuljahres fragte in der Kindergartenzeit, als ein Beispiel des vorgezeichneten Sachverhalts dazu Verwendung gab: „Was heißt denn ‚wiederholt‘?“. Das war zwar im Laufe des letzten Kindergartenjahres drei- oder viermal ausdrücklich anknüpfend erörtert worden; viele Kinder gaben auch ihrem Erklären über diese Frage Ausdruck und drängten sich, das Finger zu heben, die Assimilation zu erklären. Wort und Begriff saßen noch festzustellen. Aber die Frage war um wertvoll als Beispiel dafür, daß Kinderfragen, welche nicht sogleich verstanden, und nach Klagen aufreizen die Klarheit der Anschauung abzurufen. Die Zweckmäßigkeit des Fragens wurde ausdrücklich anerkannt.

kennt, hauptsächlich aber auch die mit den so arg vernachlässigten Bewegungsempfindungen, die Auffassung mittels des Tastsinns, Geruchsinns, Geschmacksinns. Einen Menschen lernt man nicht kennen, wenn man ihn auch zweimal im Konzert an demselben Platz hätte sitzen sehen; einen Pflanzschalter nicht, den man zweimal im Schaufenster erblickt hat. Mit beiden muß man umgehen, d. h. mit dem Menschen sprechen, ihn berühren lassen, von ihm Gefühlsbeobachtungen, seine Stellungnahme zu den Angelegenheiten des einzelnen wie der Gesamtheit kennen lernen usw. Und den Pflanzschalter muß man berühren, ihn fühlen, mit ihm schreiben, ihn verkehrt haben usw. Damit erwirbt man zugleich die Kenntnis der inneren Beziehungen einer Person oder eines Gegenstandes, die demnach eigentlich schon in der bisherigen Auslegung der Forderung „allseitig“ enthalten sind, aber um ihre besonderen Werte willen neben den äußeren Merkmalen besonders hervorzuheben verdienen sollen.

Was dieser Gedanke der allseitigen Auffassung innerhalb der Anschauung (also der Merkmale, noch der Größenmerkmale trotz der Beziehungen) für das Lehrverfahren bedeutet, läßt sich heute noch nicht einmal völlig klären, geschweige denn in wenigen Sätzen an dieser Stelle aussprechen. Einige Andeutungen müssen genügen: Von den Stoffen, die in den Lehrplänen stehen, bietet unsere heutige Schule nur in wenigen Fällen wirkliche Anschauungen (z. B. in Naturkunde). Sehr oft bietet sie durch Worte hervorgerufene Phantasiebilder¹⁾, oft auch einen bildlichen Ersatz, an dem stattdesamt nur Form und Farbe aufzufassen ist, alles andere fällt weg. Selten erscheint die Wirklichkeit des Lebens und noch seltener das Vertrautwerden mit den Dingen, wie dem eigentlichen Sinn der Anschauung entspricht²⁾. In diesem Sinne müßten unsere Anschauungsmittel „für die Hand der Kinder“ eingerichtet sein, nicht nur für das Auge der Vormalserben. Das bedeutet insbesondere für das Rechnen, daß jedes Kind seinen eigenen Rechenapparat haben muß, an dem es tätig ist, mit dem es vertraut wird, an dem es „handelt“ rechnen lernt.

So versteht die Anschauung die allseitige Auffassung eines Gegenstandes mittels der Tätigkeit aller Sinne, einschließlich des Tastsinns, mittels des gefühlsbetonten Erlebens. Von hier aus läßt sich auch leicht die Formel gewinnen für den, der unter Anschauung nicht das Ergebnis, sondern die Funktionen der vielfachen, planmäßigen und allseitigen Sinnesbetätigung in Bezug auf ein Einzel-

¹⁾ Man vergleiche den sogenannten darstellenden Unterricht.

²⁾ Wenn nicht nicht dem Wertigen, der gilt vom Auge aus. Aber es weiß doch zugleich auch in der Welt des Stimmworts auf ein sinnliches Erleben hin.

wissen verstehen will. Er wird sagen können: Anschauung ist nötig nie zur völligen Klarstellung der Erkenntnis.

Auf diesem Grunde der Anschauung baut man die Abstraktionen auf¹⁾. Wollen wir sie zunächst nicht in objektiviertem Sinne, sondern in funktionalem verstehen, so könnten wir sagen, es ist diejenige Fähigkeit, welche in allem Hinschüßigen das Wesentliche von den zufälligen Elementen zu sondern, und das Wesentliche zusammenzufassen weiß vom Begriff, zur Regel, zum Gesetz. Es ist das in der Hauptsache eine analytische Tätigkeit, welche sich entwickelt in dem vielfachen Ineinandergreifen der elementaren Funktionen des Denkens und Vergleichens. Im objektivierten Sinne ist dann natürlich unter Abstraktion das Produkt dieser Tätigkeit zu verstehen, also der Begriff, das allgemeine Urteil usw.

Fassen wir nun bezüglich dieser letzteren, also der Abstraktionen, die Wirklichkeit ins Auge und nicht nur den bloßen Hergang, so sehen wir, wie es im Leben und in der Schule zwei Arten von Abstraktionen gibt, die sich zurückführen lassen auf verschiedene Arten der Entstehung, die aber auch späterhin die Kennzeichen ihrer Abkunft nie verlagern können.

Sie mögen durch zwei Beispielsreihen belegt werden. Solche der ersten Art sind: Mais ist wechself; die Säpgeiere bringen lebendige Junge zur Welt; die Stiegrögel fressen Insekten und Körner; das Pferd ist klug; der Fuchs ist listig; Gas explodiert; das Meer ist tief; die Alpen sind ein junges Gebirge; die Italiener sind heißblütig; die Spanier sind katholisch; die Germanen waren unkristianisiert; die Römer waren tugter; die Juden waren halbsaturnig; Gott straft die Übeltäter; nobody ehgt immer die Wahrheit; alle Menschen sind sterblich; Goethes Gedichte sind tief empfunden. Solche der zweiten Art sind: Der Fisch schwimmt; Eisig ist esser; im Vorfrühling blühen eine Anzahl Bäume; bei 60° gefriert das Wasser; der Regen schwemmt das Erdreich fort; das Wasser rucht die tiefsten Stoffen des Bodens auf; die alten Verkehrsstraßen führen zu den Hängen der Hügel hin; es gibt mehr Arme als Reiche; glücklich, wer andere beglückt; wir lügt, kann andern nicht in die Augen sehen.

Bei den Beispielen der ersten Reihe wollen wir zunächst davon absehen, daß sich bei solchen Zweifel erheben könnten an ihrer Allgemeingültigkeit und Richtigkeit; davon wird später noch die Rede sein. Wir wollen vielmehr vorerst den Blick richten auf ihre Entstehung im Bewußtsein der Jugendlichen. Da zeigt sich, daß sie alle durch Überlieferung herabgekommen sind. Alle diese ab-

¹⁾ Vergl. dazu den früheren Abschnitt: Entwicklung der Begriffe.

gemeinen Sätze sind den Schülern gesagt worden. Man wird zwar sofort einwenden: das kann doch unmöglich bei allen in dieser großen Vermögenswertung geschehen sein. Das sei zugegeben und zugleich darauf erwidert, daß das jugendliche Bewußtsein, selbst wenn derartige Abstraktionen nur bedingt oder eingeschränkt an es herankommen, doch nicht Willkür zu tun hat, es solche Sätze auf allgemeinste Formeln zu bringen. Und die große Masse des Volkes unterscheidet sich in dieser Beziehung nicht im geringsten von dem jugendlichen Bewußtsein, auch sie ist der weitestgehenden Abstraktion des Überlieferungsdarlehens genügt. Diese Abstraktionen der Überlieferung, der Tradition, haben nun eine außerordentlich große Bedeutung. In ihnen sind nämlich die Ergebnisse der gesamten menschlichen Kulturarbeit aufgespeichert — soweit sie nicht als Einzelerscheinungen bestehen und als Einzelerscheinungen registriert, sondern soweit sie systematisiert sind. Wer daher an der menschlichen Kulturarbeit bewußt Anteil haben, die Kulturhöhe der Zeit verstehen will, der muß — abgesehen von den Einzelerscheinungen — einen reichen Schatz solcher Abstraktionen zu seinem geistigen Eigentum gemacht haben. Das ist der hauptsächlichste Sinn und die Bedeutung des Stoffes im Unterricht.

Die zweite Beispielreihe dagegen zeigt Abstraktionen, die selbstverständlich auch durch Tradition, durch Überlieferung in das einzelne Bewußtsein eingegeben können. Aber sie sind so gewählt, daß man eben weiteres erkennt, daß jeder normale Schüler auf einer gewissen Stufe stehend ist, wie selbstständig zu bilden, allein auf Grund eigener Erfahrung. Die Bedeutung dieser zweiten Art von Abstraktionen ist in Bezug auf die Kulturübermittlung wesentlich geringer als die der ersten Art; sie haben aber vor ihr den Vorzug der größeren Bedeutung für die Entwicklung der Persönlichkeit.

Das läßt sich noch klarer erkennen bei weiterer Betrachtung der Unterschiede. Während bei den allgemeinen Abstraktionen die Neigung betrachtet werden kann, von Bedingtheit und Beschränktheit abzuheben, tritt bei den ausarbeiteten Abstraktionen leichter die entgegengesetzte Erscheinung ein, Bedingungen und Beschränkungen hinausrufen. Dadurch werden diese im allgemeinen richtigen, genauer als jene. Es ist dies aus der ganzen seelischen Struktur der Person erklärlich, welche mehr nach der einen oder nach der anderen Seite hinneigt: Menschen mit ausgesprochen rezeptiver Anlage sind weniger kritisch, solche mit produktiver Anlage viel mehr. Ein Junge, der befriedigt nachgeht, daß bei 0° das Wasser gefriert, unterscheidet sich in seinem psychischen Habitus wesentlich von einem anderen, der das Thermometer nur Hand nimmt und es in das gefrierende Wasser hält. Man hat — wie schon gesagt

= für die Übertragung der Kultur jenseit anders, für das Fortschreiten der Kultur dieses letzteren Typus der westlichen.

Ein weiterer Unterschied zeigt sich in der Schwierigkeit und im Tempo der Gewinnung der beiden Abstraktionsarten. Während die aufgenommenen Abstraktionen rasch und fast ohne jede Schwierigkeit gewonnen werden, dauert das Erwerben der erarbeiteten Abstraktionen oft recht lange und erfolgt unter Überwindung von Schwierigkeiten, die manchmal recht bedauernd werden können²⁾. Die Abstraktionen eigener Erfahrung beanspruchen daher einen wesentlich größeren Energieaufwand als die aufgenommenen. Dadurch eben erlangen diese eine größere Beweglichkeit, sie werden die Kleinstmaße des geistigen Verkehrs und sind in dieser Eigenschaft von nicht geringer Bedeutung. Aber sie sind auch nicht so stark verankert. Man behält sie nur so lange, bis andere mit dem Anspruch auf größeres Dauerrecht kommen, und wird sich diese weg, wenn es notwendig noch gleichwertigere sich einstellen³⁾.

Diese gegenüber führen die erarbeiteten Abstraktionen ein ganz anderes Bildnis. Ihr langames Reiten, ihr Emporwachen aus einem dunklen Untergrunde der Seele mit sie viel fester gewesen erscheinen. Sie sind infolgedessen dem Wechsel nicht so leicht unterworfen und bilden ein wichtiges konservatives Moment der psychischen Struktur. Die größere Beweglichkeit der einen Art, die größere Festigkeit der anderen verkörpern also jenerseits eigenständige Vorzüge.

Die Gewinnung der beiden Arten ist nun nicht nur verschieden nach Schnelligkeit und Schwierigkeit, sondern auch nach ihrer Gefühlsbetontheit. Die Abstraktionen, die das Kind in den ersten

*) Das Märchen, das schon 1/2 Jahr lang schon mit dem Winterabend haunert, also Märchen getrieben hat usw., findet im Nachdruck an den Anfang, 4. 2. 1891 in ein zu verzeichnen. Es fragte es, weshalb es, wie es ist. Die anderen Kinder wissen ihm das Märchen unter der Asche, und im letzten Augenblicke war die Festimmung da. Aber nur war die Frage doch immer nicht beantwortet, wie ich denn noch, wie selbst die Erinnerung an die Heldentat — die allerdings einige Wochen später hätte — und Augenblicke dem Gedächtnis zurückzuführen konnte, daß die Abstraktionen dieser Art in manchen Einzelheiten in ihrer Fiktion und besonders auch in ihrer Entwicklung bis zur letzten Verfolgung die gleiche Linie brauchen. Außerdem war mir Frage und gesagte Hilfe viel lieber, als wenn das Kind sich die Wortumstellung 1 zu 120 um hätte herumrechnen lassen, ohne daß ich die Gedächtnis gehabt hätte, daß der Winter herüber sei. So habe ich es.

*) Durch die Entropen ging ein Anstich, in dem von Untersuchungen gesprochen wurde. Betreffend die Bestimmung von der Länge 15 m langer Äquale. In gewöhnliche Masse, abnehmend: Also, wenn Trichter sind 15 m lang — und war dann vorhanden. Teilweise bediente haben zwei Zweifel an dieser Angabe und geben dies noch breiter. Aber die Diskussion bestand selbste, die man kann und betragend: Die im ersten habe, wenn mindestens 25 m lang. Second dann bei nächst und sagt die Bestimmung der Darstellung: In höher möglich man ein 25 m lang, der heutigen sind mindestens 100 m. — so wird die Aussage bestätigt: die die Diskussion wird gewonnen, und die neue an drei Stellen gesamt.

Beispielen von Hund und Fuchs laut¹⁾, sind ganz keine angeschlossen bezeugt. Das Kind fühlt sich ein wenig ein in das Tier und fühlt sich ihm verwandt, wenn Eigenschaften behauptet werden, die es sich selbst nicht ungern zusprechen läßt. Die Abstraktionen von Gas und Meer haben einen anderen Charakter, sie sind ganz keine selbstbezeugt. Es ist ein schwaches Gefühl des Grauens vor einem so furchtbaren Erwas. Das keine Gefühl hängt sich diesen Abstraktionen an und läßt sie — wie auch die beiden vorher genannten — doch etwas fester in der Seele haften als solche fast selbstbezeugte Abstraktionen, wie etwa die von den Fliegensaugen und Fliegenpöhl. Auch wenn wir die übrigen Beispiele daraufhin prüfen, zeigt sich, daß die aufgenommenen Abstraktionen begleitet sind von meist recht schwachen Gefühlen, von Gefühlen — der Ausdruck sei erlaubt: objektiver Natur. Es sind Vorstellungsgefühle, bei denen sich das Ich wie in einem gewissen Abstände von ihnen vorfindet. Ganz andere die erarbeiteten Abstraktionen. Zwar treten bei ihnen dieselben Gefühle gegebenenfalls auf, daneben aber noch wichtige Gruppen andere, die wir hier nennen können mit den Ausdrücken Erkenntnisgefühle²⁾, Erinnerungsgefühle, Erfolgsgefühle usw. Sie bedingen eine wesentlich größere Gefühlsbetontheit der erarbeiteten Abstraktionen und haben die Wirkung, sie nicht nur fester, sondern auch klarer und sicherer zu gestalten.

Der wichtigste Unterschied zwischen den beiden Arten von Abstraktionen ist freilich noch nicht erklärt. Er besteht darin, daß die aufgenommenen Abstraktionen bereits formuliert sind. Ein anderer hat sie formaler, wir sprechen sie nur nach. Besonders bedeutsam ist dabei, daß wir uns nicht der Grundlagen bewußt sind, nicht mit können, auf denen sie aufgebaut werden. Wenn ein Zweifel ihnen gegenüber laut wird, so müssen wir schweigen oder können uns höchstens auf unsere Gedächtnisse berufen.

Anders wiederum die erarbeiteten Abstraktionen. Sie sind eigentlich weiter nichts, als ein Sprachsymbol, das eine Seele unserer eigenen Taten, unser Sehens, Handelns, Suchens deckt, das unsere Erfahrungen umschließt. Diese Erfahrungen stehen bei jeder

¹⁾ Diese sprechen davon, ob sie tatsächlich richtig und oder nicht.

²⁾ Manche Erkenntler sind sich nicht klar über den Unterschied von Erkenntnis und Erkenntnis. So kann man die Meinung hören, daß eine gewissen Erkenntnis später zur Erkenntnis werde. Das ist ein Irrtum, der wider den Sprachgebrauch noch die psychologische Entstehung jener Vorgänge trachtet. Wir teilen Erkenntnis von einem Erkenntnistum getrennt — eine Erkenntnis ist eine Erfahrung, die sind die eigenen Zustände welche die Sachlage betreffen. Es ist bezeugt darin, daß Erkenntnis die Tatsachen umschließt, Erkenntnis aber die Zusammenhänge, oder: das Reich der Erkenntnis umschließt das Zusammengehörige, das nur durch Nachsicherung und Deutung vollzieht; das Reich der Erkenntnis umschließt nur die erarbeiteten Abstraktionen.

Bedeutung des Symbols im Hintergrunde des Bewusstseins und sind bereit, aufzutreten und sprachliche Gestaltung anzunehmen, sobald es nötig erscheint. Und das ist nicht nur dann der Fall, wenn Zweifel an unseren Abstraktionen sich verschärfen lassen, sondern auch, wenn unsere Ausdrücke vom Zuhörer mit einem anderen Sinne verbunden werden, wenn wir also uns veranlaßt sehen, uns ausführlicher auszusprechen, als wir es für nötig halten. Für die erarbeiteten Abstraktionen haben wir dann sofort Beispiele zur Hand, mit anderen Worten: wir sind in der Lage, zu konkretisieren. Damit gelangen wir zu einem Begriffe, gegen den der Einwand erhoben werden könnte, daß er nicht unter die Überschrift „Abstraktion“ gehöre, weil er augenscheinlich das Gegenteil von Abstraktion bedeutet. Aber es muß zunächst betont werden, daß auch der Begriff der Anschauung nicht zur Abstraktion gehört. Und doch mußte schließlich auf ihn eingegangen werden, wenn man sich vor die Aufgabe gestellt sieht, die Abstraktion in allen ihren Beziehungen zu überblicken. Ebenso ist es mit dem Begriff der Konkrektion. Wir müssen nämlich zeigen, daß von den beiden Arten der Abstraktion diejenige die aktive, die verbende, die lebendige ist, welche sich mit ihrem Gegenstück, der Konkrektion, eng verbindet.

Um den Unterschied recht klar zu erkennen, vergleiche man daraufhin noch einmal die beiden Beispielsreihen. Bei den aufgearbeiteten Abstraktionen können wir uns des Gefühls nicht erwehren, daß es schwer ist, aus der Masse der Beispiele, die in Betracht kommen könnten, das auszuwählen als Vertretungsbeispiel. Diese Schwierigkeit wird noch erhöht durch das Gefühl der Tatsache, daß eigentlich keines der Beispiele, die uns durch das Bewußtsein eilen, völlig typisch ist für den ausgesprochenen Satz.

Bei den erarbeiteten Abstraktionen dagegen suchen wir nicht lange, da wählen wir nicht best, brauchen uns nicht zu entscheiden. Da gewiß blühschiel die Erinnerung dasjenige Erlebnis, mittels dessen uns die betreffende Erkenntnis offenbar wurde, steht in ihm das typische Beispiel dafür und erinnert sich — man möchte sagen: geradisch — noch einer Anzahl darauf folgender Fälle, die diese Erkenntnis bestätigen. Damit ergeben sich aber für die erarbeiteten Abstraktionen völlig entgegengesetzte Darstellungsbedingungen gegenüber denen der aufgearbeiteten. Während nämlich diese „geradisch“, „gedächtniswäßig“ festgehalten werden müssen, d. h. in ihrer Spandform, können die erarbeiteten gewissermaßen vergessen werden. Ihre spezifische Formellierung darf dem Gedächtnis entweichen, weil die Sachverstellung mit allen Nebensverstellungen und mit ihrer Gefühlshetoseit bestehen bleibt. Dadurch aber ist es möglich, auch die entschwandene Abstraktion im

Augenblicke oder wenigstens in kürzester Zeit neu zu erzeugen. Das der besten Beispiele dafür ist die schon einmal erwähnte Formel für die Berechnung der regulmäßigen Vierecke aus dem Seitenfaktor desjenigen, das halb oder doppelt soviel Seiten hat. Näher noch liegt vielleicht manchem Leser das Beispiel des Ausrechnens der Quadrat- oder Kubikwurzel. Es besteht kein Zweifel, daß das „gelehrt“ werden kann in dem Sinne, daß die Reihe der anzureichenden Teilgebieten eingestuft wird und im gegebenen Falle richtig abläuft. Es würde das eine aufgenommene Abstraktion bedeuten, und viele dürften in dieser Form über das Wesentliche verfügen. Eine erarbeitete Abstraktion aber würde z. B. für das Kubikwurzelziehen einen Würfel vor sich haben von etwa 14 cm Seitenlänge. Sie kühlt hindurch und sieht den Kubikdezimeterwürfel als ersten und wichtigsten Bestandteil (a^3), sieht dann drei seiner Seitenflächen bedeckt von quadratischen Platten entsprechender Dicke ($3 a^2 b$), sieht die Lücken ausgefüllt durch drei flache Säulen ($3 ab^2$) und fügt endlich einen kleineren Ergänzungswürfel hinzu (b^3).

Indem nun die erarbeitete Abstraktion in jedem Augenblicke neu erzeugt werden kann, unterliegt ihre sprachliche Formulierung jedesmal der Nachprüfung, der Berichtigung oder der Bestätigung. Alles das ist bei der aufgenommenen Abstraktion nicht möglich. Hätte jemand die Kubikformel vergessen, oder wäre im Zweifel, ob bei beiden Mittelprodukten der Faktor 3 stehen müsse, so könnte ihn alles gedächtnismäßige Suchen nicht von dieser Unsicherheit befreien.

Die Tatsache, daß die aufgenommenen Abstraktionen sich als Wortformelzusammenhänge zeigen, die erarbeitete Abstraktionen aber als Sachverhaltskomplex, dessen Betrachtung eine neue Formulierung verursacht, ist auch bedeutungsvoll nach einer anderen psychologischen Richtung hin. Paul Ranschburg hat experimentell nachgewiesen⁷⁾, was schon Helmholtz und Lotze geahnt und behauptet hatten, daß „sich bestehende Komplexe der Seele sich in ihrer selbständigen Entwicklung um so mehr stützen, je homogener sie sind“. Oder mit anderem Ausdruck: „Das Gleichartige strebt je nach dem Grade seiner Gleichheit zur Verschmelzung in eine Kugel.“

Nun sind eine große Menge von Abstraktionen in ihrer sprachlichen Formulierung einander sehr ähnlich. Wer die beiden Sätze aus unserer ersten Beispieldrucke im Geschichtsunterricht hätte „lernen“ müssen: Die Germanen waren kriegslustig, die Römer waren klug — und nun plötzlich einer Reproduktion infolge des

⁷⁾ Vgl. das Selbststudium für pädagogische Psychologie S. 149.

völlig gleichen Resultaten und anderer Ähnlichkeiten in die einen solchen Istfallt ganz scharf hervortretende Form geht: Die Germanen waren tapfer, die Römer waren unkultiviert, das wird künftig die beiden Sätze kaum auseinanderhalten wissen. Mit Lieder- und Gedichtstrophen, noch mehr mit Sprüchen werden ja zu Zeiten ähnliche Erfahrungen gemacht. Oder, um auf mathematischen Gebiet zu bleiben: Das Kind, das vorerstlich „gelernt“ hat, $7+8=15$ und dann $9+6=15$, das kommt mit Sicherheit dazu, es sagen $7+8=14$ und $9+6=14$ und $6+7=14$ usw. Jeder Lehrer der Elementare wird diese Erfahrung vielfach belegen können. Doch wir wissen ja, was der Methodiker von gemtem sagen würde: Sie haben schlecht gewirkt; Sie müssen erst ein bis zu völliger Sicherheit üben, und danach das andere. An sich hat er ganz recht, nur gibt sein Einwand nicht auf diesen Fall. Denn alle Übung kann die Tatsache des sprachlichen Gleichnisses nicht aus der Welt schaffen, die sich psychologisch darin verwickelt, daß aufgenommenen Abstraktionen, insbesondere solche von ähnlicher Sprachform, einander störend beeinflussen, selbst dann, wenn ihre Erwerbung längere Zeit auseinanderliegt⁷⁾. Ihnen gegenüber verfügen erarbeitete Abstraktionen in ihrem seelischen Vorstellungsbildungsgrad über ein starkes Übergewicht gegen solche zufälligen Verwechselungen. Was das im einzelnen für das Lehrvorgehen im Rechenunterricht bedeutet, wird noch auszuführen sein. Hier handelt es sich zunächst darum, den Unterschied zwischen aufgenommenen und erarbeiteten Abstraktionen möglichst klarzulegen.

Wir fassen ihn zusammen in folgende Punkte.

Um der Zeit und Kraftersparnis willen sind wir genötigt, den größten Teil unseres Wissens in formulierten Abstraktionen aufzunehmen, denen wir je nach Bedürfnis mehr oder weniger deutliche Phantasievorstellungen zugeben. Diese aufgenommenen Abstraktionen sind daher für die Kontrollüberprüfung von höchster Bedeutung und können im Unterrichte gar nicht entbehrt werden.

Die erarbeiteten Abstraktionen dagegen dienen denen der Entwicklung der Persönlichkeit und gewinnen demnach im vorrichtenden Unterrichte neben jenen die gleiche Bedeutung⁸⁾.

⁷⁾ Welche unstillbare Last von Arbeit und Sorge auf seinen des Lehrers wie den Schüler mit solchen Verwechselungen verhängen ist, bezeichnet Bregels treffend (Zustalt des kleinen Kinnakins, S. 88), wenn er sagt „Ein solches Paradox besteht aus vollständigen Karikatur 80 bis 85 richtig.“

⁸⁾ Es soll durch ausdrücklich der extreme Gesichtspunkt abgelehnt werden, als wäre der Unterricht nur das Ziel der Persönlichkeitsentwicklung ohne jede Sachkenntnis und Stoff- und Methode.

In einzelnen zeigen die beiden Arten folgende Unterschiede:

die aufgenommenen	die erarbeiteten
sind leicht und much zu erwerben;	sind schwerer und langsamer zu erwerben;
zeigen größere Beweglichkeit, sind locker;	zeigen größeren Beharren, sind fester;
weisen zu bedingter und unbedingter Formellierung;	weisen zu bedingter und bedingloster Formellierung;
zeigen schwache Gefühlsbetontheit und Unsicherheit im Besitz;	zeigen außerdem starke Gefühlsbetontheit und Sicherheit im Besitz;
erscheinen mit fester sprachlicher Formellierung;	erscheinen ohne feste sprachliche Formellierung; diese muß jeweils neu erzeugt werden;
sind nur mit geringer Möglichkeit der Konkretisierung ausgestattet, daher weniger klar.	sind mit der Möglichkeit der Konkretisierung ausgestattet, daher klar.

Aus dieser Gegenüberstellung geht aber nun eines hervor, das durch die Erfahrung täglich bestätigt wird: daß nämlich die aufgenommenen Abstraktionen dem Kinde ungleich leichter fallen als die erarbeiteten. Und die psychologische Forschung fügt hinzu, daß die Kinder eigentlich vor einem gewissen Lebensalter gar nicht fähig seien, Abstraktionen selbständig zu bilden. So schreibt Max Brahn⁶⁾: „Genauere Untersuchungen zeigen immer mehr, daß erst von der Pubertät an das Denken im strengen Sinne sich entwickelt, die Fähigkeit, Begriffe zu bilden, zu vergleichen und aufeinander zu beziehen, daß bis dahin alles Denken einem starken anschaulichen Hintergrund hat. . . Unsere Volksschule wird so lange nicht den Ansprüchen der Zeit genügen, als sie die Schüler trotz ihrer verbüßlichen Methoden und Lehrer nicht denken lehren kann, weil keine Methode erzwngen kann, was die natürliche Entwicklung nicht hergibt.“ Und Ernst Meumann warb nicht umsonst, in seinen Werken diese Erkenntnisse der modernen Psychologie immer und immer wieder zu betonen⁷⁾.

⁶⁾ Zitiert von Böllger, Deutsche Schule 1914, S. 433.

⁷⁾ Vor allem am Ich, wie eine einfache Frau ihren Kindern, die sie im Kinderwagen bei sich hatte, vom Herabsteigen des Kindes. Das geliebte Kind frucht im 2. Jahre ein, das Kind im 2. Ich war nicht wenig betroffen ob meines Übermaßes. Dann aber sagte ich mir: Wir tun ja eigentlich in der Schule dasselbe. Bei all unseren Verlesungen und Forderungen setzen wir an, der Geschwindigkeit, die Beständigkeit und die Vollständigkeit der Kinder auf geistigen Gebiet seien von der unseren nicht wesentlich verschiedenes, eigentlich nur quantitate gegeben. Daß auf körperlichem Gebiet ganz beträchtliche Ver-

Damit wird von wissenschaftlicher Seite bestätigt, was der Praktiker schon längst vermutete, daß nämlich die logischen Gedankenselten der Kinder zum größten Teil unsere Gedankenreihen seien. Zeigen das nicht freie Schüler auch größerer Kinder noch? Können sich nicht kleine wie große Schüler an einen neuen Lehrer erst gewöhnen, d. h. doch in der Hauptsache, sich auf seine Denkreihen einstellen? Wird es nicht allgemein als besonders schwierig angesehen, von einem fremden Examinator geprüft zu werden? Wer die Augen aufhat und die Fehler der Schüler nach Solomonus Wert mischt, in sich sucht, kann Wunderdinge erleben. Eine besonders große Täuschung in dieser Beziehung ist es, wenn wir glauben, durch unsere Entwicklungsfrage hätten die Schüler ererbte Abstraktionen erworben. Selbst wenn das an sich möglich wäre, würde doch das einmalige Durchlaufen eines solchen Gedankenganges in der Regel nicht genügen, um selbsttätig das Gefühl der Widerspruchslösung zu erleben, aus eigener Überzeugung seine Zustimmung zu geben. Das geht sogar uns Altem noch so. Aber unsere Lektionen geben von der Annahme aus, daß bei Kindern ein einmaliges Durchlaufen genüge.

Die Schule muß daher folgenden Befehl ausgeben: Indem wir mit dem Kinde, auch mit dem jüngeren Kinde, Abstraktionen erarbeiten, glauben wir, daß diese Abstraktionen als von dem Kinde selbst erarbeitete gelten könnten und demgemäß auch die Wirkungen der erarbeiteten Abstraktionen aufweisen würden. Darin haben wir uns getäuscht. Diese Abstraktionen haben für die innere Entwicklung des Kindes nur den Wert der aufgenommenen¹⁾.

Auf Grund solcher Erkenntnis wollen wir uns nun bitten, die Entwicklung stärker zu beschleunigen, als es die Natur will. Wir wollen keine Schafstücken geben, nicht Fledermäusen im Februar, sondern Bäume, die ihre Frucht bringen zu seiner Zeit²⁾. Durch ist aber nicht gesagt, daß wir auf die Förderung der Entwicklung verzichten, keineswegs. Aber wir setzen sie darin, alles bereit zu stellen für die Arbeit der Natur. Auch die Abstraktion ist

schon immer vorhanden und es herbeizuführen sind, das wissen die meisten; daß es auf größeren Gebieten nicht geht, ist, wie das wenigsten in der Zeit, meistens glauben sie, die logischen Komplexe selbst für das Kind darboten wir für uns.

¹⁾ Von der vielen Formen einer Einführung des Kindes wird die die Ausbildung einer richtigen Verstandesart wahrscheinlich die zu frühen Gegebenen mit Entdeckungen am schicklichsten sein.²⁾ Ruyter, Bemerkungen über mathematische Erziehung, S. 12. Über das Fehlen des Konkreten von Platon erzählt das Werk eine Fülle kindlicher Auffassungen, unter anderem S. 37, 128, 206, 207, 211, 213 usw.

³⁾ Wie mit diesem Fehlen selbst verfahren ist, weiß auch, welche starke Schädigung die jungen Geister erleidet, der frühzeitig vom Fledermäusen gezwungen wird.

wie jede geistige Tätigkeit ihre Vorstufen, ihre Kognitionen, aus der sie langsam herauswächst. Diese Vorstufe ist für das Kind normalerweise leicht zu beschreiben: Die erstbeste Abstraktion erwächst nämlich aus der Form einer anschaulichen Haptik eines statisch dargestellten Einzelstiles. Bei Pflanz stellt sich das Kind solche von bestimmter Gestalt und Farbe vor, es sagt aber gleich aus der „Pflanz“, nicht, wie es seiner Vorstellung entsprechen würde: Braunes Droschkepferd, geschicktes Laupferd. Es spricht mit uns 2-3, es denkt aber an Apfelmännchen oder Kugel oder Salzen (solange hier nicht eine angemessene Abstraktion vorliegt). Daß diese Vorstufe in ihrem Anfangs sein statisch anschaulich ist, gegen ihr Ende aber schon unserer Abstraktion nahe kommt, das braucht nicht weiter ausgeführt zu werden.

Interessanter noch ist, daß wir die rechte Entwicklung der Abstraktionsfähigkeit dadurch wesentlich unterstützen, daß wir ihr vorzeitiges Eintreten verhindern. Es ist ja ohne weiteres klar, daß alle unsere Abstraktionen eine Erschöpfung und begrenztere Gestaltung unseres Gedankenverkehrs bedeuten; und es bedarf keiner großen Beobachtungsgabe, um zu erkennen, daß in jeder Seele von Natur dieser Trieb zur Erschöpfung vorhanden ist, daß also Abstraktionen völlig aufgenommen werden, und daß auch die einfachsten Abstraktionen gewissermaßen allein wachsen, wenn sie den geeigneten Nährboden finden. Dieser Nährboden aber ist einzig und allein die Anschauung, wie wir sie geschaffen haben, die allseitige klare Anschauung. So widersinnig es daher auch klingen mag, so ist es doch psychologisch und schulpädagogisch völlig begründet, wenn man behauptet: Wir fördern die Abstraktion dadurch, daß wir sie verhindern — besser und klarer ausgedrückt und zugleich als Beispiel für diesen Satz: Wir fördern die vorzeitige, auf Bedingungen und Beschränkungen achtende Abstraktionsfähigkeit dadurch am meisten, daß wir die frühzeitige Gewöhnung an selbstnormierte Abstraktionen zurückhalten, und denen so weit als möglich die Konkretisierung verlangen, d. h. einen gewissen Zwang ausüben zu klaren und deutlichen Vorstellungen- und Erläuterungsformen?).

?) Wir sollten endlich aufhören, von den Kindern von mit Beispielen abzuheben zu lernen von ihnen: Der Baum heißt, der Hund heißt, der Vogel heißt, der Mann. Wir sollten endlich nur ein paar Worten helfen die Kinder zu verstehen, wie sie selbst denken, oder gar ihnen die Linien im Buchstaben, einer Spitze heißt gleich, wenn ein anderer kommt, wenn Pflanz heißt hoch, wenn man so weiß, schließlich Kinder Pflanz heißt so hoch, daß man es auf der Straße sieht, ich habe noch keine Pflanz gesehen, der Baum steht, wenn die Pflanz Namen schreiben, durch die Kinder selbst klar. Solche Dinge können klar und klar, und es ist uns nicht möglich, daß unsere Schule ein gutes Geschäft machen würde, wenn sie für solche Konkretisierungen eine Menge selbstnormierter Abstraktionen dinstellen würde.

Wir verhindern selbstverständlich dadurch nicht die Abstraktion, ebensowenig, wie wir verhindern können, daß ein Baum die Früchte seiner Art bringt. Wir verhindern nur die starke Gewöhnung an formaleste Abstraktionen, wir verhindern vor allem die mechanische Aufbahn solcher Abstraktionen, die notwendigerweise selbst verarbeitet werden müssen.

Damit gelangen wir zur Hauptfrage des Absichts:

Wie sieht es nun in dieser Hinsicht mit den Abstraktionen des Rechenunterrichts? Man darf sich hierbei nicht der Tatsache verschließen, daß für recht viele unserer Kinder — sollen wir sagen: die meisten? — gegenwärtig noch das Rechnen eine Welt für sich ist, die mit der wirklichen Welt nur selten etwas zu tun hat, eigentlich nur bei „Wörteraufgaben“ (eingekleideten Aufgaben). Und da — so denken unsere Kinder — kann man eigentlich nie wissen, ob es richtig ist. Ja, rechnen — sie meinen die Behauptung der Assertionen — rechnen können wir, aber die Wörteraufgaben, da wird es manchmal umgekehrt gemacht¹⁾.

Kann man sich ein vernichtenderes Urteil über unsern Rechenunterricht fällen, als dies aus Kindesmund? Aber — wenn wir es nicht schon wüßten — wir entscheiden diesem Werte zugleich noch eine andere Erkenntnis, nämlich die, daß das gesamte Rechnen zu den Abstraktionen der zweiten Art, zu den erschultesten gehört, auch in den Formen, die später mechanisiert werden müssen. Denn wenn das Lehrverfahren unseres Rechenunterrichts dieser Erkenntnis gemäß ausgestaltet wäre, wenn Ziel und Lehrplan auf ihr aufbauen, dann würde jenes Urteil unanglücklich sein.

Welche Folgerungen ziehen wir daraus? Ein Beileger könnte meinen, daß man dann das gesamte Rechnen am besten bis zum 12. Jahre hinausschieben möchte, und damit wäre die Frage nach dem Lehrverfahren vollständig beantwortet. Aber so leicht ist das Problem nicht zu lösen. Eine etwaige Hinausschiebung bedarf gründlichster Erwägung. Hier dürfen wir jedenfalls diesen Gedanken beiseite stellen, um uns an die gegebene Wirklichkeit und unsere vorliegende Aufgabe zu halten. Diese verlangt, aus unsern Erkenntnissen praktische Folgerungen für das Lehrverfahren zu gewinnen. Es sind folgende:

¹⁾ Wir haben die Behauptung, der Baum trüffliche Früchte Ausdruck gibt, schon wiederholt machen können. Wir können bei den Vätern dieses Kindes kein anerkennen, daß jemand bei vorwärtiger psychologischer Beobachtung an der Mehrzahl seiner Kinder wesentlich bessere Erfahrungen wird machen können. Allerdings unter der Voraussetzung, daß mit den Kindern nicht „umtrieben“ wird, wo sie sich selbst herausfinden können sollen.

1. Wir wollen in unserm Rechenunterrichte nicht mechanisch anwendig lernen lassen, sondern alles auf die Anschauung als die oft wiederholte, flüssige und selbstige Auffassung gründen. Insbesondere soll uns auch das Einmaleins die abstrakte Form sein aus konkreten Formen einfacher Schälrechnungen.

2. Wir wollen uns klar sein über zwei Irrthümer. Über den, daß jemand verlangen sollte: Die Schüler müssen vom gegenständlichen, sinnlichen Rechnen möglichst bald loskommen. Gerade das Gegenteil ist richtig: Wir müssen die Kinder so lange beim gegenständlichen, sinnlichen Rechnen belassen, als ihnen dies nicht als eine Last erscheint, die sie gern abwerfen möchten. Wir brauchen durchaus nicht zu fürchten, sie würden dann überhaupt nicht von der Anschauung loskommen, die Begründung dafür ist schon gegeben. — Und dann über den anderen Irrthum, daß jemand, der sich von dem langsamen Gehen der Abstraktion überzeugt hat, nun fordern sollte, man müsse darum mit der Abstraktion noch zeitiger einsetzen und sie noch intensiver weihen.

3. Wir wollen bedenken, daß, je einseitiger die Veranschaulichung erfolgt — z. B. mit einem einzigen Rechenabstraktmittel oder mit einem einzigen Lösungsverfahren — sich um so leichter die Form der aufgegebenen Abstraktion einstellt, d. h. daß mechanisch eingetretet wird.

4. Wir wollen uns dagegen bemühen, auch die reinen Zahlenaufgaben recht oft auf konkrete Fälle zurückzuführen; selbstverständlich nicht jede solche Aufgabe, aber in jeder Stunde soll es geschehen, so daß die Möglichkeit für das Kind daraus erwacht, jede Zahlenangabe zu verdeutlichen. Die Wichtigkeit dieses Tuns verlangt, daß es hin und wieder auch noch auf der Oberstufe geschehe.

Es ist nichts Neues, was wir hier verlangen. Pestalozzis Grundsatz, daß „die Anschauung das absolute Fundament aller Erkenntnis sei“, daß also „jede Erkenntnis von der Anschauung ausgehen müsse und auf sie zurückgeführt werden könne“, gab dem Rechenunterrichte zunächst eine natürliche und sichere Grundlage. „Es kann nicht anders sein; wenn wir z. B. Maß anwendig lernen: Drei und vier ist sieben, und dann auf diese Sieben bauen, als wenn wir wirklich wüßten, daß drei und vier sieben ist, so betriegen wir uns selbst; denn die innere Wahrheit dieser Sieben fehlt, indem wir uns des sinnlichen Hintergrundes, der ihr leeren Wort zur Wahrheit machen kann, nicht bewußt sind“¹⁾.

Ein Beispiel dafür, welche wir mit unserem Abstraktionszeiler ge-

¹⁾ Zitat nach Böhmer, *Arithmetik* S. 60.

kommen sind, bietet eben diese Aufzählung. In fast allen Büchern über allgemeine und Rechenmethode findet man sie. Aber das Lehrverfahren des Unterrichts ihr gemäß zu gestalten, insbesondere sie auf dem Gebiete des Rechenunterrichts zu verwicklichen, das vermehrte man wohl, aber tatsächlich hat es kaum jemand gewagt. Diese Pentakostsworte waren aufgenommenen Abstraktionen, die wir recht schön herzusagen wußten, ohne uns ihren tiefen Sinn und Inhalt bewußt zu werden. Nur wo eine Seele in stofflichem Ringen um didaktische Wahrheit die als erarbeitete Abstraktionen nachschaut, da konnte des Meisters Geist in ihr lebendig werden in befruchtender Tat. Es ist hier genau so wie mit dem Herrn, Herr! sagen: nicht die das Können, kommen ins Himmelreich, sondern die den Willen des Vaters tun.

2. Abschnitt des Lehrverfahrens

Die Gewinnung der Zahlbegriffe.

§ 19. Die Erwerbung der Zahlenreihe.

Unter den Stufen, die die Entwicklung der Zahlbegriffe durchschreitet — wie wir es in früheren Ausführungen dargelegt haben — ist es besonders die dritte, die unsere Aufmerksamkeit fesselt, wenn wir diese Entwicklung unter dem Gesichtspunkt des dem natürlichen Wachstum entsprechenden Lehrverfahrens betrachten. Es ist die Stufe, welche die einzelnen Zahlbegriffe von fünf an entwickelt, soweit sie sich ohne Erfassung des Systems gewinnen lassen, die Stufe, welche die Zahlenreihe erwirbt. Denn die vorhergehenden Stufen, die des reinen Vergleichs mit der Erwerbung einiger unbestimmter Zahlbegriffe und die des genaueren Vergleichs mit der Gewinnung der bestimmten Zahlbegriffe 1 bis 4 fallen im allgemeinen vor die Schulzeit, d. h. die in die Schule eintretenden Kinder stehen meist am Ende der zweiten Stufe — von Ausnahmen abgesehen. Zwar wurden auch Ausführungen über ein etwaiges Lehrverfahren für die zweite Stufe ein gewisses Interesse beanspruchen, namentlich bei psychologisch interessierten Lehrern, die sich gern der Schwächen anschauen. Aber es läßt sich von vornherein erwarten, daß es sich nicht grundsätzlich unterscheiden wird von dem Lehrverfahren des Elementarunterrichts, welches die Pädagogen in wesentlich höherem Maße interessiert. Denn der psychische Habitus des Kindes ändert sich während der zweiten und des ersten Teils der dritten Stufe nicht wesentlich und ist gekennzeichnet durch die noch völlig sinnliche Betätigung seiner

Vorstellungen. Auch handelt es sich sowohl bei der zweiten als auch bei der dritten Stufe um das Erwerben solcher Assoziationen, da ein bestimmter mathematischer Sachverhalt, eine Anzahl Dinge mit einem bestimmten sprachlichen Ausdruck, dem Zahlwort, verbunden wurden. Das Erwerben auch der Ansichten, welche nicht mehr mit einem Blick vom Kinde übersehen werden, und welche darum einen neuen Hilfsmittel, der Wortreihe, bedürfen, stellt eben den Fortschritt der dritten Stufe dar.

Was diese Stufe verlangt, ist im wesentlichen eine Gedächtnisleistung, mit psychologisch genauerem Ausdruck eine Assoziation, die anfangs aktiv ist, später passiv wird und aus Assimilation und Komplikation besteht. Mit der Wiederholung gewinnt sie an Festigkeit, Klarheit und Übersichtlichkeit. Bei diesen und ähnlichen Gedächtnisleistungen unterscheidet man nun zwei Stufen der Entwicklung: einerseits wenn die Erwerbung nur so weit geühen ist, daß ein Wiedererkennen oder ein Erkennen eintritt, andererseits, wenn sie solche Fortschritte gemacht hat, daß eine Reproduktion möglich ist. In diesem Sinne unterscheidet z. B. die psychologische Gedächtnisforschung Wiedererkennungs- und Reproduktionsmethoden. Doch ist zu beachten, daß der weitaus größere Teil unserer Gedächtnisarbeit nur bis zur Höhe der ersten Stufe entwickelt wird. Einige Beispiele: Man bemerkt, daß man dies Gedicht schon einmal gelesen hat — Wiedererkennung; man trägt es vor — Reproduktion. Wir hören ein Musikstück und sagen, es sei die Tannhäuser-Entrée — Wiedererkennung; wir spielen es — Reproduktion. Ein Kind sieht der Fledermaus zu und spricht: Das Fledchen wird gewaschen — Erkennung der Tätigkeit; die Mutter sagt zum Kinde: Wasche dich und es geschieht — Reproduktion der Tätigkeit. So können wir ein Ding erkennen — z. B. eine Halbkugel, und können die Vorstellung zeichnerisch und sprachlich reproduzieren, wenn wir etwa einem Kinde Material, Form, Zweck und Gebrauch der Halbkugel erklären wollen.

Auch bei der Gewinnung der Zahlbegriffe auf dieser Stufe handelt es sich um diese zwei Gedächtnisleistungen: Erkennung und Reproduktion. Wir berechnen sie hier mit Zählauflösung und Zählarrstellung. Ein Kind zählt ein Häufchen Hirse und sagt: es sind 8. Ein andermal sagt der Vater: Da darfst du nun den Kerbe 8 Stems nehmen, und das Kind zählt 8 ab. Dessen Beispiel gegenüber wird nun mancher vielleicht behaupten wollen: Das ist doch genau dasselbe; das eine Mal wird gezählt, und das andere Mal nach nur. Und doch ist dies nicht richtig, und der psychologische Gegensatz steht dem Unstrachid: In jedem der beiden Fälle ist die Aufmerksamkeit anders eingestellt; im ersten ist die Sachvorstellung einer Menge da und dann das Aufgabebewußtsein

mit der Frage wieder? Im zweiten Falle ist die Zahlgröße im Bewußsein vorhanden, und es muß eine Nachanlage festgestellt werden, die dieser Zahlgröße entspricht. Die Ähnlichkeit der beiden Erhebungen ist darin begründet, daß in beiden Fällen derselbe Maßstab und dieselbe Tätigkeit angewendet wird. Aber im ersten ist die Sache vorhanden und deckt einen zu bestimmenden Teil der Zahlenreihe, im zweiten ist die Zahlenreihe da und deckt einen zu bestimmenden Teil der Sache.

Mit diesen Ausführungen sind wir bereits eingegangen auf das Verfahren, mittels dessen das Kind seine Zahlvorstellungen und damit seine Zahlbegriffe gewinnt, das ist das Zählen.

Es soll hier nicht ausführlich eingegangen werden auf den Streit der Zähler und Anschauer im elementaren Rechenunterricht. Neumann hat mit trefflicher Beobachtung und vielen Schachfen ein ganzes Anzahl Vorzüge jeder der beiden Methoden aufgestellt, die entsprechend als Nachteile bei der anderen Methode erscheinen¹⁾. Er kommt vom theoretischen Standpunkt zu demselben Ergebnis, zu dem uns auch der praktische geführt hatte, daß jedes einzelne Prinzip auf die Spitze getrieben einseitig ist und Gegenseitigkeit hervorruft, daß allein also weder die Zähler noch die Anschauer recht haben. Man könnte hier jegliches Streit stillen lassen und sich auf psychologischen Boden wendet stellen. Dieses Stillschlagen bedeutet hier tatsächlich ein Vereinigen.

Während psychologische Untersuchungen stimmen darin überein, daß die Zahlbegriffe der dritten Stufe mittels des Zählens erworben werden, d. h. daß die Reihe als Maßstab dient, die Zahlreihe, die Wortreihe. Darauf weist auch unabweisbar die pädagogische Erfahrung hin, wobei diejenige der Lehrer an Elementarschulen hier besondere Bedeutung und Beachtung beanspruchen darf. Denn sie erleben fortgesetzt an ihren Kindern die Entwicklung einer Stufe, die normale Kinder zum Teil schon hinter sich haben oder doch auch bei einer Behandlung, welche der Natur nicht ganz entspricht, überwinden. Diese Überwindungskraft ist bei den Schwachkönnigen so gut wie nicht vorhanden. Die Lehrer sind also genötigt, viel mehr zu beobachten und sich viel mehr anzupassen als die normalen Klassen. Ihre Erfahrung geht nun dahin, daß sie allein mit der Zählmethode Erfolge erzielen können, zumal sich bei dieser Methode mit großem Vorteil das motorische Element einbringend verwenden lassen (Sprechen, Handbewegungen usw.). Sogar haben die Zähler recht.

Aber Gewinnung der Zahlbegriffe ist doch nicht gleichbedeutend mit mechanischer Fertigkeit und vor allen

¹⁾ Vorlesungen Bd. III, S. 258ff., Abt. 2. 1940.

Dingen nicht mit derjenigen selbständigen Fortentwicklung der Zahlbegriffe, welche wir in den ruhenden Betrachtungen der Gliederung und des Vergleichs geschildert haben. Und zu dieser Form des geistigen Bestandes müssen unsere Zahlbegriffe gelangen, möglichst auch die der Hilfsschüler. Für diesen Zweck genügt das Abtragen der Zahlreihe nicht mehr, hier muß es überblicken können, und von hieraus die Anschauer zu ihrem Rechte. Von dieser psychologischen Warte aus ist es völlig verständlich, ja gar nicht selbst zu erwarten, daß man mit Zählhilfen keine guten Erfahrungen bei solchen Köpfen mit Schwachen, die sich beim Schulauftritt noch auf der ersten oder zweiten Stufe der Zahlbegriffsentwicklung befinden, recht gute Erfolge dagegen zu verzeichnen hat bei entwickelteren Kindern, bei solchen, wo die Erlangung der Zahlreihe schon bis zu einem nicht geringen Grade erreicht war, die beim Schulauftritt also schon ein Stück der dritten Entwicklungsstufe zurückgelegt hatten. Wenn daher Zählmethode und Anschauungsmethode nacheinander auftraten, so kann jede von ihnen ein richtiges Platin sein, sie werden einander in ausgezeichnetster Weise ergänzen, und die Erfolge werden dementsprechend sich steigern.

Die Erwägungen und Erfahrungen in dieser Richtung haben uns gelehrt, zwischen Zählen und Überblicken noch eine Zwischenstufe einzuschalten, die nicht unbedeutend erscheint, nämlich das rhythmisierte Zählen. Zur Begründung der Forderung können wir hier auf unsere Ausführungen über die Entwicklung des Zahlbegriffs im System verweisen.

Schließlich muß noch auf einen andern schon ausgeführten Gedanken zurückverwiesen werden, daß nämlich auf der dritten Stufe die gewonnenen Zahlbegriffe zunächst noch völlig in dingliche und ganz individuell angepasste Selbstverleibungsverstellungen gebunden sind. Aber auf derselben dritten Stufe beginnt das Kind doch schon, auch und auch davon abstrahieren. Die Entwicklung geht also dahin, Überlege zu suchen nach den späteren Selbstverleibungsverstellungen der Zahlbegriffe in einer weniger dinglich und individuell angepassten Sachvorstellung. Solche Erwägungen — oder an ihrer Stelle die Instruktion dahlingselnder zweckmäßiger Maßnahmen — führen den Rechenunterricht auf die Erreichung der dinglichen Zahlensymbole. Es sind dies Anschauungsmittel, die zwar noch dahliger Natur sind, aber durch ähnliche Maßnahmen dem individuellen Charakter der Wirklichen der Fiktion unterliegenden Gegenstände stark eingestrichelt haben¹⁾.

¹⁾ Es soll gleich an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, daß bei einer steigenden geistigen Symbolisierung die Kinder nicht eben immer eine Symbol an Stelle der Sachvorstellung setzen, so daß dann eigentlich nur die eine Selbstver-

Für das Gesamtgebiet der dritten Stufe — Entwicklung des Zahlbegriffs — hätten wir somit drei Gliederungsmotive gewonnen, die das Lehrverfahren zu berücksichtigen hätte: der verschiedene Grad der Gedächtnisleistung in Zuhörfassung und Zahl-darstellung; die Erweiterung des Aufmerksamkeitseinfusses im Zählen, im rhythmisierten Zählen und im Überblicken; endlich die Teilnahme der Sinne begreifenden Abstraktion, die sich zeigt in einer Ersetzung der Dinge durch dingliche Symbole. Damit würde sich diese dritte Stufe in 12 Entwicklungsformen gliedern lassen, die sich kurz so ausdrücken ließen: Zuhörauffassung und Zahl-darstellung an Dingen und dinglichen Symbolen mittels des Zählens, des rhythmisierten Zählens und des Überblickens. Diese Entwicklungsformen greifen vielfach ineinander und wechseln ab im Unterricht. Aber vom Lehrer ist zu verlangen, daß er jeden Augenblick völlig klar darüber ist, welche dieser Formen jeweils der Übung und Weiterführung bedarf.

Die erste und einfachste von ihnen ist ohne Zweifel die, daß die Zuhörauffassung zählend an wirklichen Dingen geschieht wird. Dann sollte der Elementarunterricht in fast jeder Stunde Gelegenheit und Veranlassung bieten. Wenn die Kinder im Schulzimmer eingetroffen sind, werden sie gezählt; selbst wenn noch nicht alle da sind, kann das geschehen. Die einzelnen Abteilungen, die Kinder der einzelnen Bänke, die Knaben, die Mädchen werden für sich gezählt. Dann die Schulstühle der Kinder, die Gegenstände der Schulstube, die Schulgeräte, welche ausgelegt werden, die Kreidestückchen, die übrig sind. Und draußen sollten wir — d. h. selbstverständlich immer die Kinder — die verschiedenen Gräser, die die Kinder sammeln, die Blumen, die sie pflücken, die Käufker, die sie fangen, Erdbeeren und Kirchen, die sie erhehlen. Wir zählen die Grade am Thermometer, die Regentropfen auf der Hand, die Schmetterlinge im Garten und die Fische und Bäume im Walde, die Wassertropfen auf dem Rasen, oder an der Leine, die Fliegen am Fenster, die Räder an den Wagen, die Schritten auf der Straße, die Lokomotiven, die durch die Brücke fahren, zählen Spinnspinn und Krühen, Hühner, Kriech, Soldaten, Dorsch, elektrische Autos, Schutzleute, Pferde, Hunde, Häuser und alle sonstigen Haustiere, zählen unsere Schritte von einer Ecke zur anderen, zählen bei unseren Turnübungen, zählen überhaupt alle Dinge und Erscheinungen, die in unsern Gesichtskreis treten. Das darf selbstverständlich nicht falsch verstanden werden. Keineswegs ist damit gemeint, daß wir nun kein anderes Interesse an den Dingen hätten, als das

stehung von einer anderen abgeleitet wird. Will man das verhindern und somit eine natürliche, nicht bloß eine vermittelte Abstraktion verhindern, so ist es zweckmäßig, mehrere Symbolisierungen im Wechsel miteinander zu verwenden.

quantitative, als das des Maßes, nicht im geringsten. Aber so ist es gerade, daß wir über der qualitativen Beschreibung und über kausalen Zusammenhängen als, aber auch bei keinem Gegenstande das quantitative Moment verpassen wollen. Wir wollen mit solcher Tätigkeit das in den Kindern vorhandene quantitative Interesse fördern und es heben, um die Zahlenreihe einzusetzen, die der entsprechenden Dinge wegen andererseits in vielfacher Auffassung und Übung zum geläufigen Eigentum zu machen.

Einstufig erscheint das „einfache Zählen“ und langweilig dem, der sich vom Lehrplane vorwärts gedrängt fühlt; kurzum, wenn er hört, daß wir uns bei allen diesen Übungen damit begnügen, festzustellen, wieviel es sind, nichts darunter lassen und nichts hinzuzufügen wollen. Aber es ist weder einstufig noch langweilig, wenn der Lehrer über den Stoff verfügt — hier natürlich in rechenpsychologischer Hinsicht — und seine Kinder beobachtet, jedes einzeln, und in diesem schrecklichen Zählen auch noch Unterstufen der Entwicklung anfindig macht, auf die die einzelnen Kinder einzeln gelangen folgendermaßen: Zuerst wird nur so getüftelt, daß das einzelne Ding dabei eine kleine Platzveränderung erleidet; Hände, Tuscheln, Stätschen, Kreidestrichchen und alle passenden kleineren Dinge werden vom zählenden Kinde ein klein wenig nach links geschoben; Kinder werden berührt und müssen sich setzen. Eine zweite Stufe, die angeblich — d. h. den Kindern gegenüber — viel schwächer ist, wird dann dazu vorgeliefert, daß man die Dinge an ihrem Orte läßt, sie nur berührt. Das ist Zählen mit Tippen, und wer das gelernt hat, der kann schon viel mehr und berichtet mit Stolz zu Hause von seinen Erfolgen¹⁾.

Die 3. Unterstufe ist es, wenn einer Zählen ohne Tippen lernt, bloß mit Zeigen. Das läßt sich auch wieder an all den handlichen Dingen üben, die in unseren Bereich kommen, außerdem aber auch an den Kindern auf dem Spielplatze, an den Fenstern der Häuser, den Fahren an den Fenstern, den Fliegen an der Decke, den Strömen der Straße, den Laternen eines Platzes u. s. Auf die 4. Unterstufe endlich erhebt sich, wer zählen kann selbst ohne zeigen, bloß mit den Augen. Erwachsene können sich die beiden letzten Stufen noch noch durch bewegliche Objekte, Springe, Krüken, Schmetterlinge und sonstige Tiere, Spaziergänger, Geschäftleute, Radfahrer, Autos, Eisenbahnwagen usw.

¹⁾ Sollte ein Lehrer dazu keine Aufmerksamkeit haben, so setzen wir ihm, dem Versuch so machen, einen Teller voll Klumpen oder Kastanien oder Was — nur eine Substanz, nicht notwendig gelblich — in diese Art zu stellen. Er kann ja darüber die erste Form mit der Platzveränderung versuchen. In der zweiten ist die Aufgabe für Kinder vielleicht noch zu schwierig; das Kind muß ja auch nur darauf aufmerksam machen, wie selbst der Erwachsene seine Handlungen in der Blickführung prüft, die Dinge beim Zählen ein wenig vom Platte zu rücken.

Täglich werden auch diejenigen Kinder geübt, die die einzelnen Stufen erreicht haben, Knaben und Mädchen besonders. Diese Übungen beanspruchen nicht übermäßige Zeit, täglich nur Minuten. Wir wollen nicht sagen: eine halbe Stunde, weil es ja vorkommen kann, daß es viermal hintereinander 5 Minuten, oder zweimal 10 Minuten, oder einmal 20 Minuten oder auch mehr oder weniger werden. Aber wieder ist nötig: täglich, um der Gewöhnung willen, und gefühllos, interessiert, interessiert, unangenehm. $1+1=2$ gelingt viel schwerer, gefühllos, interessiert zu gestalten für diese Stufe, selbst wenn man Tippen oder Soldaten vorstellen läßt. Das — meint das Kind — habe es längst gewußt und brauche es nicht zu lernen, daß $1+1=2$ sein. Aber etwas können, etwas leisten — es braucht gar nicht objektiv zu sein, sondern nur in der Annahme der Kinder —, das gibt Ansporn, da will jedes mit. Und z. B. zählen können schon ohne Tippen, bloß mit Zeigen, das ist eine Leistung: die Mutter zu Hause mag sie einmal nachmachen, dann wird sie sie anerkennen.

Eine wichtige Frage ist noch zu erörtern, die nämlich, wie weit wir auf dieser Stufe zählen dürfen. Aus langjähriger Erfahrung und aus hantlichem Mißgeschick wie auch aus psychologischen Beobachtung der Elementarstufe schlagen wir vor: ohne jede Grenze. Welchem Elementarlehrer hätte es nicht jedesmal einen Stich ins Herz gegeben, wenn ein frisches Kindergesicht erklärte, er könne bis 20 zählen oder bis 30 — und er doch nur bis zur 10 rechnen lassen durfte, weil der Lehrplan es so vorschreibt! In der Tat, wer die Grenzen der Zahlenreihen für den elementaren Rechennunterricht bis 10 oder bis 20 abgesteckt hat, ist gewiß ein logischer Kopf, vielleicht auch ein wohlmeinender Mann gewesen, aber ein Psychologe und Kinderfreund nicht; oder er hat nicht bedacht, daß die Bestimmung Zahlenraum bis 10 nun vom Schulmeister so ausgelegt werden würde, daß er verboten sei, darüber hinauszufragen, wenigstens offiziell. Nur privaten Stützen Kinder des 1. Schuljahres ihre Zahlbegriffe zwischen 10 und 100 erweitern; im 2. Schuljahre „lernen“ sie beispielsweise an geeigneter Stelle die 10 „kennen“, vorher kannten sie nur die Zahlen bis 10. Welche Unnatur zeigt sich in dem allen! Unsere Erfahrung ist die, daß eine solche Begrenzung deutlich die Wirkung hat, das Interesse des Kindes am Rechnen und seine Lust am Fortschritt stark abzuschwächen.

Zwar können auf unsere Art die Kinder zunächst verschieden weit, und die „gleichmäßige Förderung aller“ läßt es wünschen übrig, wenigstens in dem Sinne, daß alle Kinder eines Jahrgangs dasselbe gleichmäßig gut können. Aber wir beginnen mit neuen Übungsschemen, wenn der Standpunkt der Schwächeren es gestattet.

herwachen wollen wir aber beinahe alle die Begleitenden aufstehen. Sie bekommen, wenn die Erweiterung der Zahlenreihe nicht mehr genügt, noch schwere Übungen. —

Der Zahlenfassung gegenüber steht die Zahlendarstellung an wirklichen Dingen. Aber sie kommt nicht hinterher, an zweiter Stelle, sondern — das sei gleich vorausgenommen — sie zeigt sich in einem Wechsel mit der ersten, selbstverständlich mit dem durch die Umstände gegebenen Beschränkungen. Haben wir die anwesenden Kinder gestellt, so heißt es z. B.: 5 kommen war, die vorderen 4, die hinteren 10 stehen auf. Dabei führt jedesmal ein anderes Kind das Zählen her und deutlich aus, während die anderen zusehend nachprüfen. Oder: 30 Knospenstängel sollen ausgepflückt werden, 10 Pfenne nimmt jedes Kind aus seinem Käschen mit.

Auch bei dieser Form können wir Untersuchen unterscheiden, die freilich nicht ganz denen der ersten Form entsprechen. Die erste, die die verlangte Zahl von der ungetheilten Menge absondert, auch deutlich, ist hier dieselbe wie dort; man erreicht sie aus den oben genannten Beispielen. Jedem Zählen mit Tippen aber entspricht hier eine Stufe, die von sehr großer Bedeutung ist, das ist das Malen. Es wird einfach alles gemalt: 4 Jungen, 4 Mädchen, 6 Blumen, 3 Zuckerküken, 5 Bäume, 12 Stare in der Luft; was uns überhaupt in den Weg kommt, wird, ebenso wie es geteilt wird, in bestimmten Zahlengruppen gemalt. Und noch muß es geben, nach Dürst, die ganze Zahl voll; ganze Geschichten werden daraus: 8 Jungen kreiseln auf dem Spielplatz: 3 Jungen, 3 Kreisel, 4 Felschen; 3 Mädchen treiben Reifen: 2 Mädchen, 2 Reifen, 3 Hülsen; kommen noch 3 Jungen dazu und wollen nachspielen; Kreisel gibt nicht... es sind bloß 3 Kreisel da... stehen auch nicht, da spielen die Küsschenchen vermischt; es sind im ganzen 7 Kinder, die brauchen 6 Blumen, einer ist Häschen usw. Wie das geschahet ist, darauf kommt es nicht an, nur darauf, daß man die verlangte Anzahl der Dinge erkennen kann.

Jedem Zählen mit Zeigen entspricht hier das Abzählen einer bestimmten Zahl mit pantomimischer Darstellung. Die kindlich geäußerte Anforderung dabei heißt: Wir malen es in die Luft und zeigen dazu: 12 Äpfel, 20 Pflanzen, 3 Hase, oder was die Mutter auch in der Speisekammer hat: 4 Schinken, 8 Brote, 3 Stücke Wurst, 8 Fischkochen usw. Diese Übungsform läßt sich erkennen, wie die für die Anschauung der Zahl wie für die Abstraktion bedeutsame Bewegungsvorstellung mit herangezogen wird. Wenn wir als letzte Grundlage der Malzahl die Gleichheit der Bewußtseinsvorgänge ansehen konnten, so ist hier die positive Folgerung gezogen: Mithin der darstellenden Ansbewegung wird sich das Kind der Gleichheit der Vorgänge anorglich bewußt; und dabei

ist der Abstraktion vorgearbeitet, indem außer der Bewegungsvorstellung jeglicher andere direkte sinnliche Eindruck fehlt.

Eine kleine, ziemlich schwierige Unterstufe ist es endlich, wenn die Kinder geübt werden, sich eine bestimmte Anzahl von Dingen vorzustellen, ohne Malen und ohne Zählen. „Man kann 7 Soldaten sehen und sogar die Augen dabei zuzumachen. Wer sieht sie?“ Dieser Übung wird man freilich nicht allzuviel Ausdehnung geben können, schon weil das Natürliche erschwert ist. Aber es ist möglich, wenn man hinzufügt: Zeige sie! Und die Übung ist wertvoll, wenn man etwa in der Lage sich sieht, die Zählungsbeziehung vorzubereiten: Wo siehst du deine 7 Soldaten? und das Kind antwortet: Hier sind 3, dann noch 3, zuletzt einer; oder: Erst gehen 4 und dahinter 3.

Die bisherigen beiden Formen, die Zahlenfassung und Zahlendarstellung an Dingen, an wirklichen oder gemalten oder vorgestellten, gehören rechtlich zusammen. Die Übungen wechseln miteinander, einmal nach Minuten, ein andermal nach längerer Zeit je nach der inneren Notwendigkeit des Fortschritts und der Befestigung. Aber sie nähern sich eine gewisse Höhe der Ausbildung erreicht haben, ehe man zu dem nächsten Formengpaar übergehen kann, der Zahlenfassung und Zahlendarstellung an dinglichen Symbolen. Auch hier werden Fassung und Darstellung in stetem Wechsel geübt. Es dürfte darum an dieser Stelle genügen, darauf hinzuweisen, während in der Praxis des Unterrichts der Lehrer sich jederzeit dessen bewußt sein muß, daß er jetzt Zahlenfassung, jetzt Darstellung übt und üben will.

Bei den Zählspielzeugen denkt man zuerst an die Rechenmaschinen, die sogenannte russische Rechenmaschine, den Türkischen Rechenkasten, die beide in unzähligen Abänderungen vorkommen, und an die große Gruppe von Rechenmaschinen, welche einzelne Zählkörper in bestimmter Anordnung (ohne Drähte) enthalten. Sie alle sind für den vorliegenden Zweck brauchbar. Daneben können verwendet werden Legestäbchen, Spielmarken, Perlen, Plättchen, Linien, Kastanien, Eicheln, Stäbchen usw. Jedes Kind hat eine größere Anzahl davon in seinem Besitz, und sie bedeuten ihm nun — was die Hauptsache ist — Soldaten, Puppen, Früchte, Pferde, Mäuler, kurz alles, was jene ersten Übungsformen an wirklichen Dingen übten und abübten. Auch die Finger gehören zu diesen dinglichen Zählspielzeugen, so sind während des Zählens freilich keine Finger, sondern Kinder, Fenster, Männen oder sonst etwas. Und nun werden Geschichten gefächelt, die sich nach den Tageszeiten und dem jeweiligen Standpunkte der Kinder verändern: 20 Kinder gehen zum Schlafenfest — das wird dadurch dargestellt, daß jedes Kind 20 von seinem Zählspielzeugen abählt —

3 Malen an der Würstchenbude stehen ... 4 setzen sich in die Schachtel ... 5 schließen sich an die Schachtelbude ... die anderen gehen zum Kasperletheater und. Die Kinder dichten selbst weiter. Man sieht wohl, es ist möglich, jede Unterrichtsstunde zahlerrichtig auszurichten¹⁾.

Dass derartige Übungen schon nicht geringe Abstraktionsforderungen an die Kinder stellen, dürfte unstrittig sein. Es ist nicht dasselbe wie jenes Phantasiebild, da ein Stück Holz als Puppe angesehen und eine ungeübte Fußbank als Puppenwagen betrachtet wird. Denn die Scherchen, die Früchte darstellen sollen, werden nicht in den Mund genommen, und die Legetafeln, welche Soldaten verkörpern, werden nicht mit Waffen versehen. Wer sich auch nicht von den Unterrichtsleuten zwischen dieser Abstraktionsfähigkeit und jener kindlichen Phantasiefähigkeit überzeugen kann, mag darauf achten, daß die Kinder dem Aussehen, das seien Soldaten, Puppen, Früchte usw. lebhaften Widerstand entgegenzusetzen, den man nur dadurch überwinden kann, daß man ihnen suggeriert: Wir haben keine da, wir möchten gern mit ihnen spielen, wir wollen einmal denken, wollen uns einmal einbilden, das wären Äpfel usw.

Bei solcher Abstraktionsfähigkeit gehen wir nun an den dinglichen Symbolen denselben Unterstudium durch, wie es mit den Dingen selbst geschah ist. Also Zählen der Symbole mit Ortsveränderung, mit Berühren, mit Zeigen, mit dem Blick, sowie das Abzählen der Symbole mit Ortsveränderung. Wie nun aber für die folgenden Formen der Zahlvorstellung an Dingen deren Abbilder treten, so sehen wir hier bei der Zahlvorstellung die dinglichen Symbole durch Flächen- und Liniensymbole ersetzen: durch Ringe die Kugeln, Petten, Spielmarken, Linsen und damit Früchte, Geld und was sonst unter ihnen gedacht war; durch Striche die Stäbchen und damit Schiffe, Soldaten, Fahnen, Gewehre, Putzchen, Laternen, Büsche und was sonst durch eine bevorzugte Ausdehnung dieses Liniensymbol übertritt als jenen. Auch hier ist der kleine Fortschritt in der Abstraktion deutlich zu erkennen, wenn man diese Übungen mit den entsprechenden der vorigen Stufe vergleicht: dort waren 4 Pfefferkuchenthorner genau , hier können denselben Pfefferkuchenthorner durch Striche  vertreten werden. Wichtig ist dabei, daß diese Abstraktion vorzüglich langsam erfolgt, mit offener Nachbarschaft zu den Dingen selbst; und der größte Irrtum dabei wäre, man könne eine solche Abstraktion in einer Woche oder gar in einer Lektion erledigen. Monatelang wollen solche Übungen vorgenommen werden, oder es ist wenigstens bei Bedarf

¹⁾ Womit natürlich nicht gesagt sein soll, daß das geschehen sollte.

zu ihnen zurückzuführen. Und das Zählbild der 4, 8 oder 12 Dinge ¹⁾ soll in unaufrichtigem Wechsel der Gegenstände den Kindern, als das eben in diesem Wechsel Hinsichts nach und nach vom Bewußtsein kommen.

Es ist nicht leicht, bis zu den Tiefen dieses psychischen Geschehens vorzudringen. Dies ist aber nötig, wenn die Frage beantwortet werden soll, was denn nun eigentlich das Haltende ist, wenn wir von den verschiedenen Dingen absehen. Es ist, wie wir schon ausführten, die Tatsache, daß von psychischen Erlebnissen eine Gleichartigkeit und Zusammengehörigkeit berührt werden. Willen wir uns davon aber eine Vorstellung machen — und das ist bei einem derartig komplizierten Erlebnisbegriff nötig —, so gelingt das nur dadurch, daß wir die erlebte Zeile in eine andere handgreifliche, später schwächer, endlich kaum mehr bemerkbare und nachvollziehbare Reizreihe umsetzen, so daß wir in der Lage sind, uns 4 Dinge etwa so vorzustellen. Wir sagen, indem wir unsere Aufmerksamkeit einem bestimmten Ort im Raum zuwenden, „etwas“, und indem wir die Blicklinie unserer Aufmerksamkeit etwas schräg, meist nach rechts, gelenken lassen, „und etwas“, und wiederholen mit denselben Begleitscheinungen: „und etwas“, „und etwas“. Wird dann von uns die Vorstellung 8 verlangt, so ist sie doppelt so lang als die vorige Reizreihe, die der 4 ist, dreimal so lang; bei 12 schreungt der Maßstab zusammen, vielleicht auf ein Zehntel der vorigen Größe.

Wir selbst erscheinen die Zahlen vielfach als mehr oder weniger deutliche bandartige Strichen, und zwar je nach den in Betracht kommenden Größen — wie schon angedeutet — in verschiedenen Maßstäbe, jedenfalls aber so, daß ich sie mit einem Blick übersehen zu können meine. Multiplikationsaufgaben erscheinen demgemäß oft als Flächen. Die Zahlen des ersten Hunderts treten auch auf in der Form regelmäßiger Anordnungen von „Punkten“ (meistlich markierten Kreistichen). Was ist es wohl möglich und sogar wahrscheinlich, daß in diesem letzten Falle gewisse, später noch zu besprechende Übungen von Einfluß gewesen sind. Aber die vorher erwähnte Strichenvorstellung kann ich in meiner Erinnerung bis weit vor jene Übung zurückverfolgen.

Andere sehen die Zahlenreihe bis zu einer gewissen Höhe vor sich als eine Reihe nebeneinander schwebender körperlicher Objekte²⁾. Die meisten allerdings stellen sich die Zahlgrößen

¹⁾ Womit an dieser Stelle nicht etwa Zählbilder wie die von Ley als Best. gemacht sind.

²⁾ Vgl. Mayr, Ein Psychologe des kleinen Kindes. Zeitschrift für pädagogische Psychologie, 1913, No. 4.

unter dem Bilde der Ziffern vor, und zwar nicht nur bei größeren, sondern auch schon bei kleineren Zahlen. Daß hierbei das in unseren Schulen herrschende schriftliche Rechnen von entscheidendem Einfluß ist, wage ich nicht zu behaupten, ich vermute es aber.

Es weiter auch rein akustische Zahlvorstellungen in Betracht kommen, habe ich auch nicht feststellen können. Geübte Typen, d. h. solche, die in dem einen Falle mehr optisch, in einem anderen mehr akustisch vorstellen, dürfen in größerer Zahl vorhanden sein. Größere Zahlen, d. h. fünf- und mehrstellige (z. B. die ersten 19 Dezimalstellen von π) stelle ich selbst nicht mehr optisch, sondern akustisch, und zwar rhythmisiert vor, wobei ich annehmen dürfte, daß motorische Elemente dabei stark wirksam sind.

Wer auf diesem Gebiete zum rechten Verständnis gelangen will, kann das eigentlich nur erreichen auf Grund eigener Beobachtung an den Kindern und an sich selbst. Diese Beobachtungen sind nicht nur vielfältig zu wiederholen, sondern müssen ganz besonders auch den Blick richten auf etwaige Suggestion und Übung. Die Selbstbeobachtung könnte sich fragen: Wie stelle ich mir die Geschichtszahlen vor, die ich sicher beherrsche? Wie Telefonnummern (bes. Sechsstellige), die ich ungewandt weiß und ohne Nachdenken und Nachzählen in den Hörer rufe; wie lernen statistische Zahlen, z. B. die Einwohnerzahlen größerer Städte usw.; endlich wie Zahlen innerhalb des ersten Hunderters? Solches: wechselt die Art meiner Vorstellung innerhalb der gleichen Gruppe? Sind in diesem Falle Gründe für den Wechsel erkennbar? Wodurch könnte allgemein die Art meiner Zahlvorstellung bedingt sein? uel.

Eine ganz falsche Vorstellung ist es nun, die die Kinder gewinnen bei unsern Übungen, nur daß oben die kindliche Raumvorstellung nicht gar so merkwürdig ist wie die vorige. Beim Kinde erscheinen die Einheiten rund oder eckig, kurz oder lang, weiß oder buntig. Hier würde von der Theorie der alten Schule hinzusetzen: „Und um der Forderung der Abstraktion willen wollen wir die Kinder auch über die Einheiten hinweggeleitet haben, damit ihnen die Qualität ihrer Vorstellungen gar nicht erst zum Bewußtsein kommt.“ Das ist zwar gut gemeint, aber doch nicht richtig und zweckmäßig. Denn wir brauchen die Abstraktion, die zur rechten Zeit ganz allein eintritt, weil sie das Erleichtern der Geistesarbeit bedeutet, durchaus nicht gemächlich zu beschleunigen. Feinsinn und die weiteren Fortschritte des Wegweisend ist es vielmehr, gelegentlich die Kinder zu veranlassen, die Merkmale dieser ihrer Raumvorstellungen anzugeben: 6! Was sieht etwas vor sich? Wenn

jetzt durchgängig bestimmte Dinge genannt werden, so ist diese Stufe noch nicht erreicht; dann begreift man sich eben mit der Einsicht dieser Tatsache, wartet einige Zeit, einige Wochen abwarten, und führt die sonstigen Übungen weiter. Werden bei einem späteren Versuch Körper oder Flächen Symbole genannt, so mag man sich nach der Größe und Farbe dieser Vorstellungen erkundigen. Ja, man kann suggerieren: Ich stelle mir lieber weiße Kugeln vor! Die Kinder betasteten sofort, das auch zu können. Dann werden unsere vorgestellten 2 Kugeln rot oder grün, nehmen an Größe zu oder ab, und die Kinder gehen nicht mit. Endlich kann der Versuch gefragt werden: Meinet Kugeln haben gar keine Farbe . . . aber mit größter Vorsicht und ohne jedes Nötigen und Erklären. Doch mag ab und zu ein gut begabtes Kind letzteres wohl wünschen.

Was ist damit erreicht? Es sind die weiteren Potentiales der Zahlvorstellung und Zahlvorstellung, Stufen, auf denen wir die Zahl vertreten lassen in der Vorstellung durch Symbole, die nicht einmal mehr den dinglichen Charakter des direkten Eindrucks haben, sondern die wir nur durch Handbewegungen andeuten, und bei denen wir soweit kommen, endlich auch diese Andeutungen zu unterlassen, so daß die Zahlbegriffe nur mehr als markmallos, nur nicht zu sagen qualitatlos Raumvorstellungen erscheinen.

Blicken wir zurück! Wir haben versucht, das Lehrverfahren auf einem ganz ungünstigen Gebiete darzustellen. Es sind nur Andeutungen gewesen, die aber jeder interessierte Pädagog sofort im Leben und Praxis umsetzen kann. Sie betreffen die Zahlvorstellung und Zahlvorstellung an Dingen und Symbolen mittels des Zählens.

Nun könnte man freilich meinen, hier sei uns ein nicht unerhebliches Verstoßmittel unterlaufen. Denn das wichtigste Symbol der Zahl, die Ziffer, sei ja mit keinem Worte erwähnt. Das ist aber mit Absicht geschehen. Die Bedeutung der Ziffer und der rechte Ort ihres Erscheinsens soll noch für sich betrachtet werden. Hier nur so viel, daß alle unsere Mühe vergeblich gewesen wäre, daß es alle unsere kühnsten Erfolge über den Haufen werfen würde, wollten wir hier die Ziffer als Zahlsymbol einführen. Es bedarf einer langen Zeit, ehe der kindliche Geist sich dem Bewußtsein der besondern Vielheit jeder einzelnen Zahl bemächtigt. Dabei ist das Zahlwort schon das Hand, das sich um die Menge der Einzeldinge schlägt. Die Ziffer ist aber nicht ein Symbol für die Zahl, sondern ein Symbol für den Zahlwert. Wer die Ziffer hier beachtet, würde zwei verschiedene Abstraktionschwierigkeiten, und zwar Symbolisierungen verschiedenen Grades, den Kindern auf einmal auferlegen, und dann noch Kindern, die an sich kaum zu den abstraktesten und einfachsten Abstraktionen fähig sind; Abstraktionschwierigkeiten

hierbei, die infolge des Gleichnisses der lustlichen Bezeichnungen und infolge der Abstraktheit ihres Wissens ausgesprochenlich noch nicht einmal von einem Erwachsenen bewältigt werden, die in Betracht kommen können?).

Nachdem dies Ziel — die Zahlenfassung und Zahlendarstellung an Dingen und Symbolen mittels des Zählens — im allgemeinen erreicht ist, kann langsam, langsam, mit steter Zurückgriffen die zweite Gruppe dieser Übungen in Angriff genommen werden, die Zahlenfassung und Zahlendarstellung an Dingen und Symbolen im rhythmisierten Zählen. Zweierlei Erfahrungen mögen dahin führen — auch die Kinder. Zunächst die, daß bei größeren Zahlen, bei 10, 15, 20 und mehr Einzelheiten, die Zählung unsicher wird: die einzelnen Kinder, die da versuchen, „mit den Augen“ zu zählen, bekommen verschiedene Ergebnisse heraus. Und dann die andere Erfahrung, daß es doch ziemlich langsam geht, daß es lange dauert, bis man fertig wird, ja daß infolgedessen der Fall eintreten kann, daß man vergessen hat, wo man im Augenblicke war usw. Dies führt notwendigerweise zur Gliederung, und zwar zur gleichmäßigen Gliederung, zum Rhythmus. Das rhythmische Zählen kommt zum Ausdruck durch abwechselndes lautes und leises Ansprechen, der betreffenden Zahl. Es bestehen dabei verschiedene Möglichkeiten der Betonung. Bei der Zweiergliederung kann man die Zahlen so betonen: eins, zwei drei, vier fünf, sechs . . . oder so gestalten: eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs . . . Und bei den übrigen Rhythmen ist es entsprechend. Auch ist leicht zu erkennen, daß keine dieser Möglichkeiten von den Übungen wegzufallen braucht, weil sie unabweislich wäre. Dennoch hat die streife Form vor der ersten schon ganz wesentlichen Vorzug darin, daß ihre Akzente den späteren Einzelansprechen entsprechen und sie in trefflicher Weise vorbereiten. In Dreierhythmen würde also zu zählen sein: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 usw.

Zur Zweier- und Dreiergliederung tritt noch in unsern Übungen die Vierer- und Fünfergliederung hinzu. Anders kommen nicht in Betracht. Denn die Sechsergliederung wäre nur eine Wiederholung der Dreiergliederung, und höhere zu verwenden widerspricht dem Zweck der Aufmerksamkeitsübungen.

Von diesen Gliederungen beanspruchen zwei unsere Aufmerksamkeit in besonderem Maße, die der Zwei und der Fünf, die

*) Ich habe hier einen schüchternen Knaben, der ursprünglich im Rechnen versagte. Bei der Aufgabe 1-5 frag ich ihn: Wo steht es dir nicht vor? Er meint er die Fünf 5 in die Hand. Da wollte ich zeigen, wie man mit dem zehn Zahlzeichen- und Zahlendarstellungsübungen, und hatte die Freude, ihn nach einem solchen Male an den zehn Reihern der Klasse zählen zu können. Die Übung selbst eines so wenig geübten Kindes ist allerdings keine leichte Arbeit.

kleinste Mehrheit, die es gibt, und die größte, die wir unmittelbar erfassen vermögen. Zu diesen psychologischen Gründen tritt noch der entwicklungsgeschichtliche, daß sie die Faktoren sind, auf denen unser Dezimalsystem sich aufbaut, und damit die logische Folgerung, daß es zweckmäßig sein wird, die Einführung ins System in dieser von der Natur gegebenen Weise vorzunehmen. Hätten wir ein mathematisches Duodezimalsystem ausgebildet, so würde selbstverständlich die Dreier- und Vierergliederung die höhere Bedeutung haben. Aber vielleicht sind auch jene psychologischen Motive mitwirkend gewesen dafür, daß das Dezimalsystem das schon bis zu einem nicht geringen Grade der Entwicklung gelangte Duodezimalsystem verdrängt hat.

Die brauchbaren Rhythmen unterscheiden sich voneinander in erheblicher Hinsicht durch die Schwierigkeit ihrer Erweckung und Sicherung. Sie verlangen infolgedessen auch eine andere Behandlung. Die Zweiergliederung fällt dem Kinde am leichtesten, weil sie zunächst im langsamen $\frac{1}{2}$ Takte des Kinderliedes mit Aufzählung einhergeht:

$$\begin{array}{cccccccc} \dot{\downarrow} & & \dot{\downarrow} & \dot{\downarrow} & \dot{\downarrow} & \dot{\downarrow} & \dot{\downarrow} & \dot{\downarrow} \\ \downarrow & | & \downarrow & \downarrow & | & \downarrow & \downarrow & | & \downarrow & \downarrow & | & \downarrow & \downarrow & | & \downarrow & \downarrow & \dots \end{array}$$

Die Dreiergliederung erfolgt am besten im $\frac{1}{3}$ Takte mit je einer Pause nach den einzelnen Rhythmen:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \dot{\downarrow} & \dot{\downarrow} & \dot{\downarrow} & | & \dot{\downarrow} & \text{ } & \dot{\downarrow} & \dot{\downarrow} & \dot{\downarrow} & | & \dot{\downarrow} & \text{ } & \dot{\downarrow} & \dot{\downarrow} & \dot{\downarrow} & | & \dot{\downarrow} & \text{ } & \dot{\downarrow} & \dot{\downarrow} & | & \dot{\downarrow} & \text{ } \end{array}$$

Bei der Vierergliederung steigern sich die Anforderungen. Man beginnt sie daher zweckmäßig im $\frac{1}{4}$ Takte mit den entsprechenden Atem- und Überlegungszeiten:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} \dot{\downarrow} & \dot{\downarrow} & \dot{\downarrow} & | & \dot{\downarrow} & \text{ } & \text{ } & \dot{\downarrow} & \dot{\downarrow} & \dot{\downarrow} & | & \dot{\downarrow} & \text{ } & \text{ } & \dot{\downarrow} & \dot{\downarrow} & \dot{\downarrow} & | & \dot{\downarrow} & \text{ } & \text{ } & \dot{\downarrow} & \dot{\downarrow} & \dot{\downarrow} & | & \dot{\downarrow} & \text{ } & \text{ } & \dot{\downarrow} & \text{ } & \text{ } \end{array}$$

Der Fünfergliederung endlich als der verhältnismäßig schwierigsten entspricht die folgende Form:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccc} \dot{\downarrow} & \dot{\downarrow} & \dot{\downarrow} & \dot{\downarrow} & \dot{\downarrow} & | & \dot{\downarrow} & \text{ } & \text{ } & \text{ } & \dot{\downarrow} & \dot{\downarrow} & \dot{\downarrow} & \dot{\downarrow} & \dot{\downarrow} & | & \dot{\downarrow} & \text{ } & \text{ } & \text{ } & \dot{\downarrow} & \dot{\downarrow} & \dot{\downarrow} & \dot{\downarrow} & \dot{\downarrow} & | & \dot{\downarrow} & \text{ } & \text{ } & \text{ } & \dot{\downarrow} & \text{ } & \text{ } & \text{ } \end{array}$$

Selbstverständlich wollen diese Angaben nur Hilfen, Annäherungswerte sein, die auch stärkere Abweichungen vortragen. Was sie hauptsächlich zeigen wollen, ist, daß wir neben der Betonung von Abgrenzen der Rhythmen mit gutem Erfolg das Pauzieren verwenden können. Beides mag entsprechend stark vollzogen, so daß

der Charakter des Zeitrhythmus in die Gehör- und Bewegungsvorstellungen eingeht. Aber man soll hier nicht etwa die Kinder quälen wollen mit Selbsttönen. Minus Formachen ist hier das Mittel, welches am besten zum Ziele führt.

Solche sei darauf hingewiesen, daß das Sprechen der unbetonten Zahlenwerte nach und nach immer weniger vorgenommen wird, bis es — das wird als besondere Leistung betrachtet — nur noch von durchaus lediglich durch Lippenbewegungen erzeugt und angedeutet wird.

Diese Übungen werden von Tag zu Tag hindurch fortgesetzt. Sie beziehen sich wiederum auf die Dinge selbst, die überhaupt und so oft geübt werden, wie wir es S. 157 angedeutet haben, nun aber nur noch rhythmisch: Zähle die Kinder in Zweisern! Zähle die Kastanien hier in Dreien! Die Soldaten in Vierern, die Pfennige in Fünfern! Es werden dabei die Schwierigkeitsstufen „mit Rücken, mit Tippen, mit Zeigen, schließlich mit den Augen“ verwendet, und neben den Dingen selbst werden ihre dinglichen Zahlensymbole geübt. Die Übungen beziehen sich wie die vorigen nicht nur auf die Zifferaufzeichnung, sondern auch auf die Zifferdarstellung. Sie führen wieder einen Schritt weiter, indem sie der bisher in der Hauptarbeit zeitlichen Rhythmisierung die räumliche zugesellt: durch entsprechende Legen und Zeichnen der Dinge und Symbole. § Ständchen werden von nicht mehr so geübt: , sondern in

„Zweien“:  oder in „Dreien“: 

oder in „Vierern“:  oder in „Fünfern“: 

15 Perlen nicht mehr so: 
sondern in Zweigliederung: 
oder in der streifen Form: 
oder 
oder 

Und wenn statt Stäbchen und Perlen Striche und Ringe gemacht werden, ist's auch so¹⁾. Selbst beim bloßen Vorlesen von Zahlgrößen (von Zahlensymbolen) ohne wirkliche dingliche Hilfsmit-

¹⁾ Das Hauptziel wird, wenn irgend möglich, rhythmisch stehend durchgeführt.

wirken, Betörung, Fesseln, Zählbewegungen einer Hand und Annahme der räumlichen Rhythmen mit beiden Händen noch lange Zeit mit. Daß diese Übungen nicht langweilig sein müssen, sondern Gefühlsarbeit gestaltet werden können, das brauchen wir dem Elementarlehre nicht erst zu bezeugen und zu zeigen. Eine Gefühlsbetonung ist ja schon in hohem Maße vorhanden, wenn ein Kind zur nächsten Schwierigkeitsstufe zugelassen wird. Brechen wir so die Intelligenzen nicht anzuhalten, so haben wir doch anderseits die tröstliche Gewißheit, daß die Schwächeren gar nicht allzuhohe Schwierigkeitsstufen durchzumachen nötig haben und trotzdem in einigermaßen ausreichender Weise ihre Zahlbegriffe entwickeln.

BRUNNEN VERLAG

Angesichts der Darstellung größerer Zahlen, die durchaus nicht unterbleiben darf und bei welcher dem Kinde die Grenzen vor durch sein eigenes Können gesteckt werden, fällen die Kinder den Fortschritt zur nächsten Übungsgruppe als dringendes Bedürfnis. 50 oder 60 selbst in irgendeiner Rhythmisierung, ist eine sehr lange Reihe. Das Prinzip der linearen Reihung aber steht — selbst wenn der Rhythmus blanztrifft — dem Wunsche nach immer schneller Auffassung entgegen. Die Zahlendarstellung durch bloßen Überblicken erscheint als neues Ziel, und eine mehrgliedrige Reihung als das Mittel, es zu erreichen.

Damit gelangen wir ins Gebiet der Zahlbilder. Es soll hier nicht eingegeben werden auf die verschiedenen Formen und Autoren von Zahlbildern sowie auf die Grundlagen ihres Aufbaues. Wer sich dafür weitergehend interessiert, kann es in den üblichen Rechenmethodebüchern nachlesen. Zudem hat uns die Erfahrung gelehrt, daß keine Form der von uns versuchten Zahlbilder unannehmbar gewesen wäre, und sogar auch dies, daß ein gelinder Wechsel der Zahlbilder gar nicht etwa unglücklich wirkt. Es leuchtet das schon ein, wenn man es praktisch an sich selbst ausprobiert. Ob die 8 in Zweiergliederung  oder in Dreiergliederung er-

scheint  oder in Vierergliederung:  oder vielleicht in Fächergliederung:  oder so:  oder so:  als

in der Form der von Brounsoepel her bekannten und anderer symmetrischer Zahlbilder, sie soll überall von dem Kinde eben als 8 erkannt.

werden. An diesem Versuche aber zeigt sich noch sehr deutlich, daß wir keineswegs beachtliches, eine Raumvorstellung — eine bestimmte geometrische Figur — an Stelle der Einheitsstrecke zu setzen, wie es manche Methapher von den Zahlbildern behaupten. Sondern daß die Benennung der Zahlbilder, wie sie hier vorgeschlagen wird, zunächst nur den Zweck hat, das Zählen zu mechanisieren, fast möchte man sagen: zu automatisieren in dem Sinne, daß es immer schneller — mehr fast momentan — sicherer und mit immer geringerem Kraftaufwand verläuft²⁾.

Hat uns Weber die Erfahrung gelehrt, daß die Gestalt der Zahlbilder nicht die große Bedeutung hat, die ihr von manchem Zahlbildenfinder zugesprochen wird, so läßt sich doch nicht verkennen, daß eine von diesen Zahlbildengruppen gewisse Vorteile hat, die man nicht ohne Not aus der Hand geben sollte. Es sind dies die Bernacher Zahlbilder. Sie sehen so aus:



Man sieht zunächst, daß ihr Aufbau bestimmt wird von denselben psychologischen Gesetzen, die uns veranlassen, der Zweier- und der Fünfergliederung im rhythmisierten Zählen unsere besondere Aufmerksamkeit zu widmen: jener als kleinster Mehrheit, dieser als derjenigen Mehrheit, die gerade noch überblickbar ist³⁾. Interessant ist, daß mit dieser psychologischen Folgerung der rein experimentell

²⁾ Sollte man die Zahlbilder verwenden, ohne daß sie wiederholt ausgesprochen werden, so wäre allerdings zu betonen, daß die Figur mit dem Worte noch stärker als aufgenommen, nicht aber als mathematische Abstraktion. Andererseits ist nichts gegenüber, daß in dem letzten Jahre, in welchem „reine Zahlgeriffe“ gewonnen wurden, die Zahlbilder mitunter wieder vergessen wurden, durch das Bewußtsein, daß die Fähigkeit des mathematischen Denkens sich ohne Raumvorstellungen gut entwickeln kann, daß wir auch beim Zahlrechnen durchaus zu reinen Zahlen gelangen können (Baudenrogers, Zahlrechnung beim Schakale. Leipzig 1904, S. 181), daß die Abstraktion langem Zeit und auch „reine Begriffe“ erst in einem späteren Alter klärt.

³⁾ Die Methode hat sich auch in unserer Forderung manifestiert, noch ganz gut erkennen, wenn wir uns eingestehen, haben, das Bild gleich Anfangs der ganzen Gruppe anzusehen, d. h. auf die Mitte zu achten. Man versuche es selbst mit folgenden Anordnungen: OOOOO und stelle darüber 1, 2 und andere.

gewonnene Befund übercintraint¹⁾. Dazu enthält diese Anordnung selbst auch die Vierergruppierung, und selbst die Dreiergliederung macht nicht erhebliche Schwierigkeiten, wie wir später noch zeigen werden. Ein weiterer Vorzug dieser Aufbaumethode ist, daß jedes Zahlbild die vorhergehenden in gleicher Form in sich schließt; der wichtigste aber ist der, daß das Aufbaumotiv 2-5 aufs beste die Einführung des Dezimalsystems in sich schließt und darauf vorbereitet. Wir gehen gern an, daß andere Zählbilderformen auch ihre Vorzüge haben — so leisten manche der Dreiergliederung wertvolle Dienste — aber keine der anderen Formen kann ganz noch den decimalen Aufbau des Systems darstellen. Man kann darum die bestimmte Anordnung gewisser als decimale Zählbilderform bezeichnen. Zunächst ist es möglich, nicht nur den Zehner als eine Einheit zu erfassen, sondern auch in solcher Weise mehrere Zehner ohne Schwierigkeit oder auch ganz kurzer Übung zu überblicken. So entstehen, was selbst von den Vertretern der Zählbilder-methode bisher niemand gewagt hat, Zählbilder wie die folgenden:



Durch das immer wiederkehrende Aufbaumotiv 2-5 ist es möglich, mit einem Blicke sogar den Hunderter als Einheit zu erfassen. Es wird dem Dagewesenen nicht schwer sein, zu erkennen, welche außerordentlich wertvolles Lehrmittel damit zur Verfügung steht.

Wesentlich ist dabei ferner, daß wir selbstverständlich nicht angewiesen sind auf die Zählbilder der höheren Einheiten, auf ganze Zehner etwa, sondern daß wir in der Lage sind, jedes beliebige Zahlbild bis zur Hundert darzustellen. Das Zahlbild der 94 z. B. gestaltet sich so:



¹⁾ Frank Freeman gibt Überlegungen über den Aufbaumotivcharakter und die Zählbildung bei Kindern und Erwachsenen. Leipzig 1942, S. 67. (Zitiert nach [1].)

Es wird dem Leser nicht schwer fallen, auch folgende Zahl-
bilder rasch zu überblicken:

Wie sind die Gruppen im Zahlenlesen und Zahlendar-
stellen mit raschem Überblicken nun zu gestalten? Für die

die folgende Anordnung unter sechs verschiedenen Anordnungen, die gleichgültigen
Ergebnisse haben.

Zahlauffassung hat es sich recht bewährt, wenn man die Zahlbilder auf Anschauungstafeln zeigen kann, deren Ansehnlichkeit so groß wird, daß das einzelne Zahlbild auch noch von den weiter weg sitzenden Kindern erkannt wird. Wir haben solche Anschauungstafeln mit Hilfe von älteren Schülern hergestellt. Auf Papptafeln von 35–42 cm Größe wurden die Zahlbilder von 5 bis 100 aufgemalt. Dabei konnte die Rückseite für ein zweites Zahlbild verwendet werden, so daß im ganzen 48 Tafeln sich nötig machten. Die schwarzen „Punkte“ bekamen 25 cm Durchmesser, diese Größe erwies sich als völlig ausreichend; Versuche mit kleineren Kreislücken beträgen weniger. Der vom Zahlbild nicht beanspruchte untere Raum wurde frei gelassen⁷⁾.

Diese großen Anschauungstafeln dienen zunächst zur der gemeinsamen Ansetzung. Sie geschieht in der Form der tachistoskopischen Leserversuche mit der anfänglichen Auflöserung: *Raus!*⁸⁾, wieviel Punkte läßt euch zeigen! Wir haben dabei den ganzen Stock Tafeln vor uns in waagrechter Lage auf dem Pulte liegen. Der untere Rand der Zahlbilder liegt nach den Kindern zu. Wir kippen nun das oberste Blatt nach in senkrechte Stellung, so daß es alle Kinder sehen können und legen es nach wenigen Sekunden schräg als „ach Gesicht“. Nun sprechen die Kinder aus, was sie gesehen haben. Inzwischen haben wir schon das nächste Blatt ergriffen, behandeln es gerade so, legen es aber nicht auf das erste, sondern daneben. Das dritte Blatt legen wir wieder auf das erste, das vierte auf das zweite; dadurch entstehen zwei abgelegte Stöße, und die Reihenfolge der Darbietungen kann nie dieselbe bleiben. Beide werden aufeinander gelegt, und die Übung kann fortgesetzt werden mit den Zahlbildern der bisherigen Rückseiten.

Diese Zahlauffassungsbungen verbrauchen sehr wenig Zeit⁹⁾. Auch ist es gerade deswegen mit möglich, die ganze Klasse daran teilnehmen zu lassen. Natürlich empfiehlt es sich hierbei nicht, zu

⁷⁾ Diese Tafeln kann man sich selbst herstellen, wenn man über die nötige Zeit verfügt und die nötige Hilfskräfte zur Hand hat. Wenn es sonst nicht möglich ist, 45–100 „Punkte“ mit Zirkel und Transpazent herzustellen, die Pappe wird man, das Stück je nach Größe zu 4–10 cm schneiden können. Auf einem geeigneten Wundst hat nach dem der Verlag durchschneidet, diese Pappe zu drucken. Durch Ansetzung aller Möglichkeiten ist es in der Lage, das ganze Jahr von 45 Bildern für 1 K. abzugeben.

⁸⁾ Das ist selbstverständlich nur die taktische Anweisung. Wie viel Punkte legte ich? (Raus!) im Fortsatz, d. h. wie haben sie, daß ein Kind eine Zahl heraussagt ohne einleuchtende oder überprüfende Grundlage.

⁹⁾ Letzteres wurde von Anwesenenden festgestellt, daß 45 Sekunden in Teil Sekunden geteilt werden können. Ich habe dabei den Kindern gezeigt, daß es nicht besonders schnell gegangen war.

warten und wollen den Kinder zu verlangen. Wir veranlassen es gewöhnlich so, daß zwei, drei oder vier Kinder um die Werte die Zahlgrößen schnell zu erkennen suchen. Alle anderen geben nicht, weil sie feststellen wollen, wer von den Wettläufern am flinksten gewesen sei, Richtigkeit vorausgesetzt. Nach 10 oder mehr Aufgaben wechseln die Rollen, andere kommen dran. Auch bei schwachen Kindern hat sich das Verfahren als recht erfolgreich erwiesen.

Nun wird erwidert: Das ist ja eigentlich nur ein Schätzen, manchmal, wenn es so nach gehen soll. Wir geben das zu, aber nur für den Anfang. Dann hier genügt es uns völlig, wenn die Kinder angaben können: es waren fast 80, es waren vielleicht 60, es fühlen sich so 40, es waren ungefähr 30. Es ist uns nicht nur für die Erkenntnis der psychologischen Lage wie das entsprechende Lehrverfahren wertvoll, sondern es ist uns darüber erwünscht, wenn die Kinder ihre Aufmerksamkeit erst der Gesamtmenge zuwenden lernen. Es ist uns lieber, sie sagen einmal 48 statt 80, als 48 statt 68. Bei solchen Fehlern, wie auch bei Zweifelsfällen, wird das Blatt nochmals aufgerichtet und — umgeklippt; es bleibt kein anderer Weg übrig. Nur geht das nachprüfende Anzahlen außerordentlich schnell. Wir können uns nicht mehr erinnern, daß es nötig gewesen wäre, im Anschluß an solche Aufmerksamkeitsübungen die gesamte Zahlreihe vom Anzahlen zu lehren. Nach sehr kurzer Übung schätzen die Kinder die Zahlen, noch besser, als überblinsen die Zahlen, und das „nachprüfende Anzahlen“ dauert später so etwa 2 Sekunden. — Übrigens ist an der ganzen Übung die Vorbereitung für die Richtung im System deutlich zu erkennen.

Selbstverständlich dienen diese Anschauungstafeln zunächst dem Zweck der Zahlkenntnis im Überblicken. Die Zahlendarstellung an solchen Anschauungsmitteln verursacht wenig Zeitaufwand, z. B. wenn man die Kinder ein verlangtes Zahlenfeld herausuchen lassen wollte. Das kommt also nicht in Betracht. Es ist ja mit bei allen sogenannten Anschauungsmitteln auch so. Soll ein Kind an einem Anschauungsobjekt irgend etwas bemerken, so schauen 20 andere zu; 75 Hände, die das gleiche tun könnten, sind zum Stören verurteilt. Bei der Zahlendarstellung können wir aber, wie bei jeglicher anderen Art von Darstellung, alle Kinder zugleich beschäftigen können, und das geht nur, wenn das Lehrmittel in den Händen aller ist. Das bedingt natürlich eine handliche kleine Form. Wir haben nun die Zahlbüchertafeln in der verschiedensten Weise angefertigt, um den Kindern das eigene Mitun zu ermöglichen. Sehr wirksam erschienen sie auf Packpapier in zwei Farben. Mittels eines Lochstempels haben wir viele Tausende

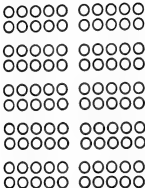
von Häufchen (von etwa 5 mm Größe) aus farbigen Papier ausgeklappt. Die Kinder beschriften nun auch alle Schreibbeobachtungsschritte und kleben auf die dunkelfarbenen die leuchtenden hellen Farben, auf helles oder farbiges Packpapier oder gewöhnliches weißes die roten und dunkleren Farben, abwechselnd in den Schreibbildern, wie hier durch Ringe und Vollfläche angedeutet ist.



Es war das allerdings eine Arbeit, die nicht in kurzer Zeit erledigt war. Aber im Laufe mehrerer Wochen waren doch von jedem Kinde einige solcher Hefen hergestellt worden, die einem schienen, die andere minder schön. Man kann es versuchen lassen und wird gewiß seine Freude daran haben, wenn auch nicht an allen. Denn das Auge und die Handgeschicklichkeit vieler Kinder sind eben noch nicht soweit entwickelt. Zwar ist die Hauptsache dabei, daß die Kinder den Zahlenraum bis 100 gefühlvoll, langsam und wiederholt erleben, und dies ist jedenfalls erreicht worden. Doch waren Hefen dabei, welche zu große oder zu kleine oder verschiedene Abstände zeigten, und solche, bei denen die Reihen schön oder nicht ganzdingig geraten waren. Dies ist aber weder vom ästhetischen Standpunkte gutzuheissen, noch entspricht es dem Geiste des mathematischen Aufbaues. Diese Erfahrung führte uns auf den Gedanken, für den Gebrauch der Kinder die Hundertertafel drucken zu lassen, genau in der Größe, wie sie auf der folgenden Seite zu sehen ist.

Damit wollen wir dem Kinde die schwinde und zottrische Arbeit der geradlinigen Einzeichnung in den Raum — mit besonderer Berücksichtigung capser und weisser, aber unter sich gleicher Abstände — abnehmen, nicht aber die leichere und für die mathematische Bildung allein in Betracht kommende Arbeit des Ausfüllens und Auswählens. Zu diesem Zwecke haben wir die „Punkte“ durch Ringe ersetzt. Man kann das Kind eine solche Tafel in die Hand bekommen mit der Aufgabe, die eine Hälfte der Zahlen —

immer im Wechsel — hier, die andere gelb ausmalen, genau zu zählen dabei usw. Gelingt eine Table nicht, so ist die Arbeit nicht

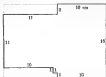


verloren gewesen, und der Verlust ist gering¹⁾. Die Ringe können auch mit Tinte schwarz ausgefüllt werden, je für Auffassungs- und

¹⁾ Diese Table können vom Verlag J. Neumann, Neudamm, Leipzig, bezogen werden, 250 Stück zu etwa 50 Pf.

Darstellungswenche können noch die Ringe bleiben, wie sie sind. Doch wirken dunkle Farbblöcke durch ihren Kontrast (vgl. S. 173).

Zur Herstellung ist noch nötig, daß jedes Kind sich ein Stück Deckpapier herstellt von folgender Form und mit den dabei stehenden Maßen:



Da das Deckpapier nicht zu dünn sein soll, eignet sich das dicke braune Umschlagblatt eines alten Heftes recht gut dazu. Mit wenigen Scherenschnitten können die Kinder es sich zurecht machen.

Die Übungen im Zahlenherstellen gestalten sich nun mit diesem Hilfsmittel wie folgt. Man bündelt an: Wer kann auf seinem Hundertblatt recht schnell 60 zeichnen? Das übrige decken wir zu. Aus den beiden folgenden Bildern ist ohne weiteres ersichtlich, in welcher Weise das Deckblatt zu benutzen ist.





Gerade Zahlen werden mit dem einmal abgemessenen oberen Bande (Bild von S. 177) gemischt, bei ungeraden deckt man das Blatt um seine wagerechte Längsachse und legt mit dem zweiten oberen, zweimal abgemessenen Bande. „Mundgeflüsch“ lernen die Kinder gerade und ungerade Zahlen beschriften. Es braucht wohl nicht weiter ausgeführt zu werden, wie man in kürzester Zeit eine Fülle von Zahlenanordnungen bewerkstelligt werden kann, wie dabei alle Kinder tätig sind, wie der Lehrer nur die Zahlen zu nennen braucht und dann einen prüfenden Blick über die Klasse wirft, wie aber auch jedes Kind sich und des Nachbarn Leistung dieser Nachprüfung unterwirft, wie weiter auch das Aufgabenstellen in die Hände der Kinder gelegt werden kann, wie diese Übungen gruppensweise oder paarweise fortgesetzt werden können, so daß ein Kind die Aufgabe stellt, das andere sie ausführt. Nachprüfung im rhythmisierten Auszählen ermöglicht die sofortige Kontrolle, die in jedem Kindes eigenem Interesse liegt.

Wenn die Technik dieser Darstellungsbewegungen geläufig ist, lassen sich diese in den Händen der Kinder befindlichen Bänder auch für Zahlenfassungsbewegungen gut verwenden; freilich nicht so, daß alle die gleiche Aufgabe bekommen — das geschieht besser mit den großen Tafeln —, sondern so, daß die Kinder paarweise arbeiten: ein Kind deckt eine gewählte Zahl ab, und sein Nachbar sucht sie rasch zu erbauen. Nach einer Reihe von Aufgaben werden die Rollen gewechselt.

Solche Auffassungs- und Darstellungsbewegungen können eines frühzeitigen Wettetils sein. Hierbei finden übrigens die Kinder selbst die

Schwächeren und Langsamern kennen, deren man sich helfend, forschend und beobachtend bedienen kann. Solche Übungen sind wertvoller als geistloses Auswendiglernen von Worten ohne sinnlichen Hintergrund, selbst wenn man vorher mehrere Male „Die Anschauung“ „durchspielen“ hätte.

Auch die russische Rechenmaschine läßt sich für diesen Zweck herrichten. Den Zählkörper auswechseln gewöhnlich in zwei Farben, allerdings in Zehnerlinien. Man hat dann nur nötig, die Stäbe herauszuziehen und die Farben so zusammenzustellen, daß die ständigen Zehnerbilder (5-8) sich voneinander durch die Farben abheben, so wie es das Bild auf S. 176 andeutet. Dann können diese Aufzählungs- und Darstellungsübungen auch an ihr vorgenommen werden. Sie kann dann bis zu einem gewissen Grade die oben beschriebenen Papptafel ersetzen. Die Schweißigkeit der Darstellung bleibt begrifflicherweise weit hinter der der Anschauungstafel zurück. Und darauf kommt es doch wesentlich an. Aber wie gesagt, im Notfall geht es auch so. Das Lehrmittel in der Hand der Kinder kann sie allerdings in keiner Weise ersetzen.

Was soll nun mit diesen Übungen erreicht werden? Kurz gesagt: Die Kinder sollen Zahlgrößen auffassen und darstellen lernen. Auffälliger: Sie sollen in eigenem Tun und Erleben nach und nach die völlig klare Bewußtheit von der Maßgröße der Zahlen sich aneignen, z. B. daß 75 viel mehr ist als 37, 34 mehr als 45, 53 nicht viel weniger als 83 usw.⁴⁾ Sie gewinnen so im Zählen, später im rhythmischen Zählen, und noch später im stillenden Überblicken der Etage und Rechenprobe. Das Auffassen und Darstellen der Zahlgröße muß dabei bis zu gefühlsmäßiger Sicherheit gesteigert werden. Es wurde das schon angeklaut in dem Hinweis auf das Schätzen. Dies müssen die Kinder tatsächlich lernen, und nicht bloß als Vorstufe, sondern als gefühlsmäßige Voraussetzungen des geordneten Ergebnisses. Nicht Oberflächlichkeit und Ungenauig-

⁴⁾ Ich erinnere mich dabei lebhaft solcher Kinder, die noch bei der Hand waren, ihre Rechenproben auszurechnen oder wenigstens zu verstehen, wenn ihnen das Bewußt der Etage oder des Bewusstes der anderen Kinder ausreichte, selbst daß sie nicht ganz richtig gerechnet hatten. Z. B. 8-37 Kind: ist 48. Da ich aber die Idee hatte nicht abzuschreiben, um die psychische Wirkung und die Zahl-Bewußtheit der Kinder zu erforschen, so trug auch die „Verzerrung“ sein 48. Das sollte bei solcher Behandlung überhaupt möglich sein. Oder ich erinnere mich des Falles: 7-20? Kind: 124. Ich, so als gewandt: ist das nicht mehr? Kind antwort: 123. Hier nicht nur deutlich, wie etwas und was richtige Teile dieser Assoziation im Gedächtnis länger geblieben sind, die 7, die 10, die 20, aber es war doch nur ganz Teil von Auswendiglernen gewesen, das ich nach einer Rechenübung und Rechenübung mit ungenügender Zahlvorstellung nicht-klassisch, so sehr geübt. Die nachträgliche Grundlegung in Aufzählungs- und Fortschrittsübungen hatte dann auch das geordnete Ergebnis. Doch ist es — natürlich bei den ungenügenden — nicht leicht, so das Wort gefundene Kinder auszusprechen an die Vorstellung.

heit wird dadurch begünstigt, wie von ununterrichteter Seite behauptet wird, sondern die Gewissenhaftigkeit, den möglichen Fehler denkbar klein und im weiteren Verlaufe die Genauigkeit möglichst groß zu machen. Die zweite Zahl, die größere Feststellung ist zunächst zu machen, die kleinere folgen darauf¹⁾.

Daß solcher Zahlenflusses und Zahlendarstellung auch eine zweckmäßige Vorbereitung für die Operationen ist, wird an der betreffenden Stelle noch näher auszuführen sein. Ein Gefühl dafür wird dem Leser schon jetzt aufgehen.

Ein wichtiger Hinweis scheint noch nötig zu sein. Mancher Lehrer kann sich einen Rechenausschnitt gar nicht denken, der nicht addiert, subtrahiert usw. Das ist aber bei diesem Auffassungs- und Darstellungsgruppieren im Zählen und Überblicken gänzlich ausgeschlossen. Hier handelt es sich immer nur um die Frage: Wieviel sind es? als um die: Wieviel werden es? In unserem üblichen Rechenausschnitt zeigt sich freilich, daß die Beherrschung der Zahlfassung und Zahlendarstellung in ihrem Wesen und Wirken stark unterschätzt wird. Er vernachlässigt infolgedessen ihre Befestigung oder glaubt sie mit der Behandlung der Operationen verbinden zu können. Wir sind der Überzeugung, daß in dieser Tatsache ein wichtiger Grund zu sehen ist für die von allen Seiten festgestellten und betragenen Mißerfolge.

§ 20. Die Einführung in das System.

Die Einführung in die Zahlreihe ist in jeder Hinsicht grundlegend und mußte deshalb ausführlicher dargestellt werden. Mit der Einführung in das System können wir uns kürzer fassen. Damit soll freilich nicht eine Herabwürdigung angedeutet werden. Dies wäre eine völlig falsche Auffassung, welche besonders bedauerlich wäre angesichts der Tatsache, daß unser heutiger Rechenausschnitt sich dieser Aufgabe — in geistiger Weise durchzuführen im System — nicht allenthalben bewußt ist. Es ist dringend zu wünschen, daß hier Klarheit und selbstbewußtes Arbeiten einsetze.

Wer wirklich meint, in das Dezimalsystem führe man die Kinder ein mit der Bearbeitung des zweiten Zähners, der ist im Irrtum. Und in diesem Irrtum sind, soweit wir sehen, Methodiker und Lehrpläne in erheblichem Maße befangen. Er ist dort wahrscheinlich, wo man eine gewisse abgemessene Zeit der Behandlung des Zahlensystems von 10 bis 20 widmet.

Wir haben gezeigt, daß die Zahlreihe bis 100 schon für das Kind übersichtlich gestaltet werden kann — mit der selbstverständ-

¹⁾ Weiter Ausführungen über Schritten folgt später die besondere Klarheit.

haben. Einschränkung, daß die Klarheit der Vorstellung anfangs geringer ist und mit der Zeit immer größer wird. Aber innerlich, psychologisch ist die Zahlenreihe ein ganz anderes Ding als das Zahlensystem. Um ein Beispiel zu benutzen: Die Erwerbung der Zahlenreihe gleicht der Entdeckung, daß man Kenntnis gewinnt von dem Werdegange einer Stahlfeder vom Walzen des Stahlblechs an bis zur Verpackung. Der Beherrschung des Systems würde es dann entsprechen, wenn jemand diesen Werdegang aus seiner Kenntnis der Eigenschaften des Materials, aus seiner Kenntnis der bestmöglichen Zweckgestaltung und der Ökonomie der Herstellungsmethoden heraus eben diese Methoden beherrscht und in die experimentierende eingreift. Das ist ungenügendlich nicht von einem zu verlangen, der — um im Bilde zu bleiben — neben der Anwesenheit des Stahlblechs keinen gelernt hat.

Die Erweiterung der Reihe der Zahlbegriffe zum Zahlensystem bedeutet, wie schon früher gesagt wurde, eine höhere Entwicklungsstufe. Sie bedingt, daß der Begriff der höheren Einheit erfüllt wird, und besteht in der fortschreitenden Erkenntnis des komplizierten Charakters jeder Zahl, insofern sie eben aus Einheiten verschiedener Grade zusammengesetzt ist. Das Zahlensystem ein tiltscheschen Rechenkasten erkennen zu wollen, zeigt sich damit als ein Beginnen, dem der Erfolg versagt sein muß, oder dessen Erfolg nur ein Scheiterfolg sein kann in dem Sinne, daß es entweder Wortlauterlei gewesen ist, was gewonnen wurde, oder daß Nebensächlichkeiten gewesen sind, die für den eigentlichen Erfolg die Ursache waren. Das Kind, das am tiltscheschen Rechenkasten lernt und übt, hat eben begonnen, die erste Stufe der Zahlbegriffe (die erste schlußfähige, nach unserer früheren Darstellung die dritte) zu erklimmen. Es muß die nächste für es noch in weiter Ferne liegen. Doch aber, wo die Einführung in das System erfolgen kann, bedarf es des tiltscheschen Rechenkastens nicht mehr.

Wenn damit in Rücksicht auf das Lehrverfahren die grundsätzliche Verschiedenheit der beiden Gebiete festgelegt ist, so ist es doch auch andererseits selbstverständlich, daß man nicht von einem los andere rückwärts versteht, sondern daß Verbindungswege vorhanden sind, die langsam in die Höhe führen, will sagen, daß die Einführung ins System von einer Anzahl anderer Übungen schon vorbereitet wird.

Zu diesen vorbereitenden Momenten gehören in erster Linie unsere Zahlwörter. Wir müssen bedenken, daß es für die Beherrschung der Zahlenreihe gar nicht in Betracht kommt, wieviel eigenartige Zahlwörter wir hätten. Bei der Masse von Volksliedern, die ein Kind in den ersten drei Lebensjahren bewältigt — oder auch ein Knigge von 14 bis 20 — käme es in der Zeit der Aufnahme der

Zahlwörter auf 40 oder 50 Wörter mehr wirtschaftlich nicht an. Das geschieht aber nicht; sondern mit außerordentlicher Ökonomie haben sich die deutschen Zahlwörter dem Dezimalsystem angepaßt, derge-
 stellt, daß in jedem Zehner dieselben zehn Klänge ohne Ausnahme wiederkehren. Die Tausende dieser natürlichen Ökonomie haben die Methodiker nun für ein Zeichen gehalten, mit dem Zahlwörtern das System zu geben. Sie haben dabei das Wortsymbol mit der dadurch bezeichneten Sache verwechselt.

Einem Photographieflüssigen kann das Wort Paradißphosphor ganz geläufig sein, ohne daß er die Konstitution dieses Stoffes, die der Chemiker eben durch das Wort bezeichnet, irgend be-
 herrscht. Und Kunstwörter, wie Formalin, Forman, Formol, Formazin usw., die eine bestimmte Zusammensetzung oder einen be-
 stimmten Herstellungsverfahren bezeichnen (der unter gewöhnlichen Schülern stehen kann), werden von aller Welt gebraucht, während nur wenige von jenen charakteristischen Eigenschaften genaue Kenntnis haben.

Daß die Zahlwörter das System abbilden, sei was im Rechen-
 unterricht also eine willkommene Vorbereitung, aber keine Nötigung zur Behandlung des Systems.

Diese Behandlung haben geschickte Elementarlehrer so einrich-
 teten, gerückt durch eine Veranschaulichung des Systems, der man die Anerkennung nicht versagen darf. Sie bündeln 10 Stäb-
 chen mit einem Gummifaden zu einer Einheit zusammen und fassen nun mit diesen Einheiten höhere Ordnung wie mit gewöhn-
 lichen Einheiten rechnen. Auch Hunderte wurden von einzelnen so dargestellt. In der Hand eines kompetenten Lehrers wird diese
 Veranschaulichung zweifellos gute Früchte tragen. Neben den Vor-
 teilen der dinglichen Gestalt und der verhältnismäßigen Merkmals-
 armut hat sie freilich auch einen nicht zu unterschätzenden Nachteil:
 Ein Lehrer müssen auf guten Glücken hingesonnen werden, die
 Möglichkeit des Nachprüfens ist ziemlich schwer; dies kann nur
 durch Auseinandersetzen und Auszählen erfolgen. Das bedeutet
 aber einen nicht unbeträchtlichen Energieverlust, dem an dieser
 Stelle kein formaler Gewinn gegenübersteht. Von ist aber gerade
 das Wesen des ganzen Systems die übersichtliche Gliederung.
 Eine Veranschaulichung, welche dieser übersichtlichen Gliederung
 Rechnung trägt in dem Sinne, daß sie gestaltet, den Zehner momen-
 tan als 10 Einheiten aufzufassen, auf Vorlagen aber auch als eine
 einzige Einheit höherer Ordnung, wäre jener Veranschaulichung durch
 Stäbchenbündel ohne Zweifel überlegen. Dies ist in der Tat ge-
 geben in unserer Zahlbildtafel. Indem die Kinder an Heften
 die Zehneinheiten abschneiden und dann zunehmend nachprüfen, können
 sie in vielbündentlicher Übung dazu, in Zehnern zu zählen. Dieses

Aussählen, würde ja auch mit Stäbchenabzählen möglich sein. Aber bei den Zählbüchern laßt sich leicht bewerkstelligen und ununterbrochen die Kontrolle beobachten, daß jeder Zähler auch wirklich seine 10 Einheiten erhält. Wir konnten das gut beobachten, als wir die Zählstäbchen, welche die Kinder in Händen haben, noch mit farbigen Häutchen bekleben ließen. War einmal irgendwo ein solches Häutchen abgefallen, so wollte das Kind — auf den ersten Blick — den betreffenden Zähler eben nicht als Zähler anerkennen und fügte hinzu, obwohl alle Beteiligten das selbst sahen, obwohl es auch manchmal für den Zahlbegriff völlig überflüssig war: „Aber hier fehlt eins.“

Das in Zehnerrhythmen erfolgende Aussählen, welches die Übungen der Zahlauffassung und Zahlendarstellung begleitet, tritt uns damit als zweite wichtige Vorbereitung für die Einführung ins Zahlensystem entgegen.

Die Hunderterstabtabelle ist selbstverständlich nicht die einzig mögliche Form. Eine andere, auch recht empfehlenswerte sind Übungen mit dem Metermaße (Bandmaß), zumal mit einem, dessen Darimeter abwechselnd rot und weiß oder sonstige gegeneinander leuchtig abgesetzt sind. Es hat für die Zahlauffassung freilich den einen Nachteil, daß die Kinder nicht an der Vorstellung der Ziffer hängen bleiben. Bei schwachen Kindern, zumal bei solchen, die vorher auswendig gelernt haben, die also nicht nur Vorstellung der Zahlgröße erlangen werden sind, bereitet es ziemlich Schwierigkeiten, wenn man sie gewöhnen will, unter 76 an sich die Strecke vom linken Ende des Bandmaßes bis zu dem Strich — einschließlich — vorzustellen, auf dem die Ziffern 7 und 6 stehen. Solche Kinder lassen eben bei dem Klange 76 einen kleinen Ruck ins Auge, auf dem sie diese Ziffern in dieser Zusammenstellung sehen. Solchen Schwierigkeiten kann auf einer früheren Stufe noch manchmal aus dem Wege gegangen werden. Später muß man ihnen besondere Aufmerksamkeit widmen und sie gleichmäßig zu überwinden suchen. — Ein anderer Nachteil des Bandmaßes gegenüber der Hundertertafel ist es ja auch noch, daß jedes des Aufbaumodus 10:1 hat, während diese das andere: 2:5 admet; dies letztere aber erleichtert das Überblicken ganz wesentlich, und zwar nicht nur das der Einer, sondern vor allem auch das der Zehner. — Wir sehen, was wir wiederholt betonen müssen, daß es kein universales Anschauungsmittel gibt, daß vielmehr jedes seinen ihm eigenen Wert hat und die anderen ergänzt. In diesem Sinne ist auch das Bandmaß ein ganz ausgezeichnetes Vergleichsmittel der in Zehnerhythmen dahinschreitenden Zahlen-

reife, das wir mit gutem Erfolge benutzt haben und nicht missen mögen!).

Ein weiteres gutes Veranschaulichungsmittel für die Einführung ins Zahlensystem ist unser Geld. Es hat zwar auch den Nachteil des Ziffer, aber der wird hier aufgewogen durch Größe, Gewicht und Farbe (letzte als Merkmale moderner Materialien) des Zahlphänomens gegenüber den Kryptophenomenen. Auch das Hinzutreten der Mark erhöht die Wirkung wesentlich. Dazu kommt, daß es den Kindern schon bis zu einem gewissen Maße vertraut ist. Leider ist wirkliches Geld für die Hand der Kinder zu kostspielig, wenigstens in dem zweckmäßigen Umfange. Anschauungsbilder des Geldes haben neben manchem hier schon berührten Vorteil eben den gerichtigen Nachteil, daß sie nur für das Auge und nicht für die Hand des Kindes bestimmt sind, während den Spielmarken wiederum die eigenartige Gefühlsbetontheit des wirklichen Geldes abgeht. Dabingsbunde Verrichte, die wir jahrelang mit wirklichem Geld unternahmen, haben aber immer so dem Ergebnis geführt, daß sein Gebrauch wirklich die Einführung in das System unterstützt. Es dürfte darum als Anschauungsmittel neben anderen nur zu empfehlen sein.

Auf Grund welcher ungeliebten Vorbereitung begegnet dann die Einführung in das System keinen Schwierigkeiten mehr. Es gilt nur, solange die Übungen sich noch im Zahlenraum bis 100 bewegen, die Zehnerereinheit mehr zu betonen. Dazu gehört zunächst die Übung, die Zehnerereinheiten mit den Einerheiten zu vergleichen, z. B.: „Wenn man 60 Einer (auch die Form Einer wäre vollständig zulässig) zählen will, dauert es lange; wenn man aber 6 Zehner zählt, geht es ganz flink, und es ist doch gerade soviel!“

¹⁾ Besser als das getriebene wäre allerdings eine, die nur auf einer Seite die Ziffern zeigt, während auf der anderen Seite nur die Zehnerstriche mit fertig abgezählten Beispielen zu sehen wären. Als letzte Notbremse aber würde eben die Ziffer sprechen sein — so, wie es die alten Ellen waren mit den goldenen Krebsern oder Krebseringen — oder eine fast allseitige Bezeichnung der Zehner als Zehner, aber 1, 2, 3 usw.

²⁾ Das ist wieder darauf zu achten, daß das, was wir ganz selbstverständlichen Erklärern ist, dem Kinde nicht so und immerhin erschlossen laßt: es freut sich darüber, stand über die Tatsache, als wenn es da gar nicht umgehet hätte. Von dieser Forderung aus gewinnt das Wort meine Bedeutung, daß die besten Mathematiker mit die eifrigsten und besten Rechenlehrer seien. Zum Rechenlehrer gehört selbstverständlich mathematische Bildung, je mehr, desto besser, wie in jeder Allgemeinbildung. Aber es mindestens dem gleichen Maße wie mathematische bewußt der Rechenlehrer psychologische Bildung. Der gute Mathematiker, dem diese psychologische Bildung abgeht, kann es dann „gerade nicht lassen, daß je ein Kind so etwas ganz kann“, ohne aber jene „ganz abgemessene Wahrheit“ nicht oder nur langsam zu begreifen. Ich glaube ganz offen, daß ich in jüngeren Jahren selbst in Zweifel geraten hätte, daß jener Ausspruch nicht anders lauten

Weitere Übungen in dieser Richtung sind folgende: Verwandlung der Zehner in Einer und der Einer in Zehner. Sie schließt sich unmittelbar an die vorige an, und sie muß sehr ausgiebig betrieben werden, da sie den Kindern größere Schwierigkeiten bereitet, als die Beziehung der Hunderter zu den Einern. Ferner Zerlegung der aufgestellten oder dargestellten Zahlen in Zehner und Einer, immer verbunden mit dem Zeigen des Gegenges. Solches Umstellen der üblichen Zahlwörter, also sechzig und fünf, dreißig und neun usw., und zwar sowohl bei Aufstellungs- wie bei Darstellungsübungen. Hierbei wird ganz besonders der Kontrast, das Unerwartete. Die Kinder behaupteten, es wäre es doch eigentlich richtig, bei größeren Zahlen sagte man doch auch erst die Hunderter!).

Ein weiterer Schritt der Einführung in das System ist es, wenn man den Hunderter überschreitet, also den Zahlenraum bis 1000 betritt. Dann man ist auch der Hunderter als Einheit aufzufassen, und es können nun Einheiten dieser Grade nebeneinander gestellt werden. Meter und Mark werden dabei gute Dienste leisten. Außerdem sind auch an dieser Stelle die Hundertertafelbilder zu verwenden. Jedes Kind hat mindestens 10 Stück. Die laßt es sich zusammen wie ein Buch oder verbindet sie mit einer Heftklammer oder steckt sie auch nur in einem Briefumschlag. Und man können die Zahlauflassungs- und Zahlardarstellungsübungen wieder beginnen. Es ist besonders darauf hinzuweisen, daß es solche Übungen sind und nicht Operationen, die in Betracht kommen. Mittels der Operationen die Reihe der Zahlbegriffe erweitern zu wollen, hat keinen Sinn, hat fast etwas wenig Sinn, wie wenn jemand durch Nachdenken herausbekommen wollte, ob ein Pferd, das hinter seinem Rücken versteckt, braun oder schwarz erscheint. Beim Nachdenken und bei den Operationen handelt es sich um Beziehungen der Begriffe, bei der Feststellung der Farbe und bei der Erweiterung der Reihe der kindlichen Zahlbegriffe um sinnliche Wahrnehmungen, die mit den dafür üblichen Ausdrücken belegt werden.

Die Aufstellungs- und Darstellungsübungen im Zahlenraum bis 1000 schließen sich auch in der äußeren Form an die früheren an. „Wir wollen bis 657 zählen!“ Das dauert lange, meinen die Kinder, und es kann ja ursprünglich tatsächlich angeführt werden — wobei alle Kinder abwechselnd mitzählen —, schon um das Gedächtnis nach Abkürzung recht lebhaft werden zu lassen. „Wie kann es schon schneller?“ Das können natürlich alle, und sie zählen, noch das schwächste Kind: „Zwei 6 Hunderter,“ und dabei zählt es

§ Und sie sagen, wie das kann. Eine mathematische Antwort war es natürlich nicht, da sie bekamen, sondern eine sprachliche.

8 Handzettelfächer heraus, dann nimmt er das 3. Blatt zur Hand und spricht: „Und dann noch 5 Zehner und zuletzt noch 7 Einer, 637.“ Auch Aufbaumethoden sind entsprechend zu gestalten: „Füllt bis zu diesem Fingerr“ und die Kinder zählen 4 Handzettel, 8 Schenck, 2 Einer und legen hinein 423. Jede Zahl bis zur 1000 läßt sich auf diese Art einfach erkennen — wenn man will, noch darüber hinaus. Verwandlungen und Zerlegungen — die sind ja eigentlich nur besondere Abänderungen der bisherigen Übungen — sind auch hier zu berücksichtigen.

Wicht ist die Einführung ins System eigentlich geschehen. Die Beherrschung tritt erst langsam ein, wenn auch die Operationen in diesem Rahmen geländig zu werden beginnen. Daran wird in folgenden Abschnitten die Rede sein.

Sollen wir nun bei 1000 aufhören mit der Vertiefung des Systems? Vielleicht wird die „erste Anschauung“ schon viel zu lange gedauert haben; er wird durch „zweite Begriffe“ und Nachdenken auch schon den größten Teil der bisherigen Zahlbegriffe haben verstehen wollen. Wir gehen gern zu, daß mit zunehmender Klarheit über den systematischen Aufbau der Zahlgrößen auch das Verständnis sich entwickelt. Gewiss Aufbau in logischer Fortentwicklung zu denken. Aber man soll dem Denken von Worten nicht zu hoch einschätzen, zumal bei Kindern. Es ist wirklich nichtsgutend, wenn jemand behauptet, er wisse, wieviel 1000 ist, und dennoch auch, wieviel 10 Tausend und 100 Tausend. Es sind das tatsächlich meist Worte, die ihnen von einem schwachen Multiplikationsgefühl begleitet sind, d. h. welche haben die unterbewußte Vorstellung, daß die 100000 tatsächlich 100-mal soviel sei als die 1000, als Fühlen, welche Tätigkeit wohl in Betracht zu kommen habe, aber es ist nicht klar, insbesondere nicht, welche Wirkung das haben würde. Einer, der die 100000 in voller Klarheit erwirbt — nicht einer, bei dem sie durch vielfachen Gebrauch wieder verbanalisiert worden ist — hat dabei ein ganz anderes Gefühl als jenen, das wir Multiplikationsgefühl nennen. Wir könnten das andere etwa als Ergänzungsgefühl bezeichnen¹⁾. Diese Klarheit ist aber — zumal in der Zeit des Erwerbs — bei dem meisten in hohem Maße abhängig von dem Vorhandensein einer den Begriff vertretenden schwachen Reizvorstellung. Gerade weil mancher behauptet, er sei nicht imstande, sich 10 — nicht die Ziffern, sondern Dinge oder Zahlensymbole — mit völliger Klarheit vorzustellen, haben wir den Versuch gemacht, unsere Kinder auch noch die 10000 zur Anschauung zu bringen. Die 1000 hatte ja jeder schon in der Hand. Es ist für

¹⁾ Es sind dies Empfinden mehr vollständiger Beherrschung in Vertiefung und psychologischen Beziehungen. Die weitere Forschung ist an diese Gebiete noch sehr heranzutreten.

auf einem Raume, der kaum größer als 2 qm sein wird (1,3-1,5 m); man braucht nur 100 solcher Blätter in der bekannten Ordnung nebeneinander an die Tafe! zu heften.

Beliebig, d. h. hier in den Geist der Sache einführend, ist es auch, wenn die Kinder dabei erkennen, daß der Zehner immer ein Rechteck darstellt, der Hunderter immer ein annäherndes Quadrat (das ganz genau wäre, wenn wir nicht in der einen Richtung Fächer, in der anderen Zweiergliederung gewöhlt hätten), der Tausender wieder ein Rechteck, der Zehntausender wieder ein Quadrat, der Hunderttausender ein Rechteck, die Million ein Quadrat. Beliebig ist es weiter, wie gegenüber Zahlen wie Millionen die bisher geübte Veranschaulichung vermag. Veranschaulicht werden kann der Maßstab nicht. Hängen wir eine halbe Wand voll solche Blätter, so können es — wenn sie lang genug ist — 10 Millionen werden, bei der ganzen 20. Für eine Milliarde brauchen wir ähnliche langen Scherenscheitel einer großen Schule von 50 Klassen usw.

Endlich sei noch darauf hingewiesen, daß die wichtigste Einzelheit bei der Einführung ins System darin besteht, die Kinder einträglich und immer wiederholt helfen und begreifen zu lassen, welche außerordentliche Erleichterung ihrer Rechenarbeit ihnen das System bietet, und zwar nicht nur für das Zählen, sondern auch für die eigentlichen Rechenoperationen.

Das Begreifen hilft sich stark unterstützen durch einige einfache Mittel, an die der Lehrer in erster Linie sich selbst zu gewöhnen hat. Zunächst dadurch, daß man das Lesen größerer Zahlen — schon die dreistelligen kommen in Betracht — zwar nicht immer, aber doch immer und immerwieder mit der Gliederung in die einzelnen Systemeinheiten betreibt. So wird die Zahl 5627000 nicht Maß in der uns geläufigen und üblichen Form gelesen, sondern öfters außerdem noch so: 5 Millionen, 6 Hunderttausender, 2 Zehntausender, 7 Tausender, keine Hunderte, 0 Zehner, 0 Einer. Ferner dadurch, daß man auch die Verwandlung der einzelnen Einheiten ineinander bei solcher Gelegenheit fleißig übt: 600 zunächst wie vorher, dann aber auch als 60 Zehner und 0 Einer, oder bei der obigen größeren Zahl heißt es: Sprich sie so um, daß du immer 2 Ziffern zusammen nimmst! 56 Hunderttausender, 27 Tausender, 00 Einer. Oder: Fung von hinten an! 00 Einer, 70 Hunderte, 27 Zehntausender, 5 Millionen. Auch drei Ziffern können so zusammengenommen werden. Endlich geschieht es dadurch, daß bei den verschiedenen Operationen jederzeit und unmittelbar die einzelne Einheit für sich behandelt wird.

§ 21. Die Einführung in die Bruchzahl.

Eine höhere Stufe der Entwicklung hat der Zahlbegriff zu erklimmen, wenn er sich über den Gedanken erheben will, daß die Zahl eine Separation von vollen Einheiten darstelle, wenn also der Begriff der Bruchzahl erworben wird.

Zunächst sei dies vorausgeschickt, daß Kinder der Unterstufe im allgemeinen noch nicht so weit sind, den Gehalt eines Begriffs ohne weiteres aus seiner sprachlichen Bezeichnung zu erschließen, selbst wenn diese Sprachbezeichnung ihnen bekannt ist und nicht über ihr Verständnis hinausgeht. Sie fassen noch nicht die Notwendigkeit der Überschneidung zwischen Sache und Wort. Gut- und mittelmäßige Kinder des 3. Schuljahres, denen die Frage vorgelegt wurde, wieviel Drittel ein Apfel habe, konnten sich zunächst nur dazu verstehen, er müsse 4 Drittel haben, und daß, obwohl auf den Ausdruck Drittel, sogar auf die vermuthliche Verwechslung mit Viertel besonders hingewiesen wurde. Das Zeichnen mit der Drittel- und Vierteltheilung nebeneinander brachte dann den gewünschten Erfolg. Ebenso hielten sie zunächst für möglich, daß es noch Apfel gäbe, die 5 Viertel hätten. In jenem ersten Falle mag diesen Kindern die in viel höherem Maße geübtere theilende Theilung in Viertel bekanntlich vorgesprochen haben, ohne daß sie sich von diesem Gedanken befreien konnten, während der Erörterungen und der zweiten Frage aber mag hier das Gefühl dafür gekommen sein, daß man ein Ding doch nicht gerade in 4 Teile zu theilen nötig habe, es müßten — je nach der Zahl der „Theilnehmer“ — auch 5 sein können. Von dieser neuen Erkenntnis war die Aufmerksamkeit ganz in Anspruch genommen und konnte von dem Ausdruck Viertel — bei dieser letzten Aufgabe — nicht in gleicher Stärke angewendet bleiben.

Es erscheint daher zweckmäßig, sich nicht allein stark auf die Wirkung derjenigen Verhältnisse zu verlassen, welche für die Bruchrechnung allgemein gebräuchlich sind. Diese beinhalten schon vor dem Eintritt der eigentlichen Bruchrechnung die thätigsten Bruchformen Halbe und Viertel, in seltenen Fällen auch Achtel, Drittel, Fünftel und Zehntel. Sie führen den kindlichen Gebrauch weiter und übertragen ihn auf Zahlverhältnisse. So durchaus notwendig und wichtig es nun ist, solche vorhandenen Gut zu pflegen und weiterzuentwickeln¹⁾, so mußte doch eben vor dem Irrtume gewarnt werden, als sei mit dem kindlichen Gebrauche die innere Klarheit schon gegeben. Denn dieser Gebrauch läßt wohl eine dunkle Vorstellung davon zurück, daß Halbe und Viertel weniger sind als das Ganze,

¹⁾ Wie das zweckmäßig in Bezug auf die Operationen geschehen kann, wird später zu besprechen sein; vgl. dazu den Abschnitt Bruchrechnung.

aber zur vollen Klarheit fehlt oft noch ein gutes Stück. Auf jeden Fall müssen wir uns vergewissern, ob die vom Kinde gehandhabte Bruchvorstellung auf festem, stichhaltigen Grunde ruht.

Voraussetzung für diese Grundlage ist möglichst klares Operationsverständnis (des Kindes) für das Teilen, die Grundlage selbst ist die Anschauung, das wiederholte, ständige, planmäßige Verfahren. So selbstverständlich war jene Voraussetzung erscheint, so ist sie doch nicht immer verständlich. Denn viele Kinder können wohl dividieren — d. h. sie haben ihre Divisionsstichen ausreichend gelernt —, aber teilen oder verteilen würde man vergeblich von ihnen verlangen. Jene Voraussetzung würde natürlich nachgeholt werden durch wirklichen Teilen von Dingen, das nach Bedarf wiederholt wird.

Aber auch dann, wenn man — von dieser Voraussetzung ausgehend — den Zahlbegriff zu erweitern gedenkt durch Einführung der Bruchzahl, kann die wirkliche Teil-, das Handeln nicht entbehrt werden. Das ist ja ein wesentliches Merkmal wirklicher Anschauung. Ein recht zweckmäßiges Hilfsmittel für diese handhabende Anschauung ist Papier, das gefaltet wird. Wenn das Papier zu bestimmten Zeit schon etwas wohlfeiler gewesen, ihn hätte schon die Einführung der Bruchzahl so geflagen müssen, wie es hier dargestellt werden soll. Denn für die große Bedeutung des eigenen Tuns, des Tuns überhaupt für das Lernen, hatte er ein kleines Verdienst; daß seine Bruchblätter, die allerdings eben nur für das Anschauen berechnet sind, können wir einfach als Fortbilder bezeichnen.

Die Kinder haben einige Blätter Papier von gleicher Größe, etwa Quadrätklein, vor sich. Man wird ihnen gezeigt, wie man bei einem solchen Blatt Ecke auf Ecke legt¹⁾ und dann einen „Bruch“ hinein macht. Indem sie das nachmachen, lassen sie 2 Hälfe hergestellt. Sie werden feststellen können, daß oben ein halbes und unten ein halbes Blatt ist, daß die beiden Hälften gleich sind usw. Sie werden das Wort auch mitten hinein in die Teile schreiben können: eine Hälfte, eine Hälfte. Dies Blatt wird nun als „Bruchblatt“ von jedem Kinde im Rechenbuch oder in einem passenden Umschlage aufbewahrt und gelegentlich herangezogen, wobei sein Intreten im Gedächtnis gesichert wird. Ein zweites Blatt wird durch einen wagrechten und einen senkrechten Bruch in vier Viertel gebrochen. Auch hier erhält jeder Teil seine schriftliche Bezeichnung in Worten: ein Viertel, ein Viertel, ein Viertel, ein Viertel und später auch in Ziffern: $\frac{1}{4}$ usw. Die Kinder sollen dann wiederholt, wieviel solche Viertel das ganze Bruchblatt hat und vergleichen

¹⁾ Bei Kindern, die im Anschauungsunterricht schon das Faltten geübt haben, kann das Formachen weglassen.

die Viertel untereinander und mit den Hälften durch Auflegen und Ausmessen. Ein drittes Blatt wird später durch drei wagerechte und einen senkrechten Bruch in 8 Achtel gebrochen. Auch hier wird der Wert in jeden Teil eingeschrieben. Wenn man sowohl gekennzeichneter, kann man Hälften, Viertel und Achtel vergleichend nebeneinander und aufeinander legen, gegen das Licht halten, sie auch ausmessen. Die Beziehungen ergeben sich von selbst.

Drei weitere Blätter ergeben dann mit zwei wagerechten Brichen Drittel, mit einem senkrechten dann die Sechstel, mit drei senkrechten auch die Zwölftel. Diese letzteren können auch mit drei wagerechten und zwei senkrechten entstehen. Endlich sind noch zwei Blätter für Fünftel und Zehntel bestimmt. Das wäre der Bruchreicht; mit dem wir unsere Zeit ankommen¹⁾ und an dem auch später noch Auffassungs- und Darstellungsaufgaben vorgenommen werden, z. B. Sagt, was ich zeigt! $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10}$ usw. oder: deckt ab, so daß man sieht $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10}$ usw. oder bei weiteren Darstellungsaufgaben: Seht einmal nach, wieviel ihr abdecken müßt! oder: Wie kann eine Handchen sagen, wieviel abgedeckt ist? Ferner: Vergleicht Sechstel und Zwölftel eines! miteinander! Vergleiche Achtel und Zehntel! ($\frac{1}{10}$ ist mehr als $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{10}$ sind mehr als $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{10}$ sind beinahe $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{10}$ sind genau soviel wie $\frac{1}{12}$ usw. Diese letzteren Formen führen bereits hinfür zu den Operationsaufgaben, die an diesen Bruchblättern vorgenommen werden.

Eine weitere Teilzahl besteht darin, solche Übungen mit anderen Papiergrößen vorzunehmen, z. B. mit quadratischen Blättern von etwa 11 cm Seitenlänge. Jetzt gibt es kleines Viertel und große Viertel, kleines und große Zehntel, je nachdem kleine oder große Blätter gebrochen worden sind. Und doch sind die einen wie die anderen Viertel, die einen wie die anderen Zehntel, und das Kind gewinnt die Erkenntnis, daß die einzelnen Brüche verschiedenen Wert haben je nach der Größe der Einheit, welche geteilt wurde. Diese Erfahrung wird handgreiflich und oft wiederholt den Kindern nahe treten. Man kann auch und auch weiter gehen und beispielsweise aus Stöcken von 4-5 cm Viertel brechen lassen. Solche, die nicht so rasch all dies erkennen, daß es ihnen fast erfüllt, die andern aber auch sich nicht mit Nachfragen begnügen, werden leicht in Stutzen und Freude gesetzt darüber, daß es wirklich geht. Diese Erkenntnis ist eben eine mathematische Irrungenschaft für

¹⁾ Daß man je nach den Umständen auch Viertel, Sechstel und auch andere Nennungen kann, in dieser Ausführung als Bruchteil überflüssig, daß man ferner Sechstel, Drittel usw. auch in verschiedenen Bruchformen haben kann, wie späterhin besser verglichen zu können, das besteht nur angedeutet zu werden.

das Kind, während wir wiederum schwer lassen können, daß das allen dem Kinde nicht selbstverständlich erscheint.

Wenn dann diese Erfahrung ausreichend und gründlich genug wirkt, wenn sie durch das Bewußtsein von ihrer Notwendigkeit zur Erkenntnis geworden ist, dann kann übergegangen werden zu einer dritten Teilstufe, da das ganze Papierblatt eine größere Zahl vertritt. Auch hier ist die Handverteilung gute Dienste stiftend ja auch nicht so kostspielig, daß nicht stilles „zerbrechen“ werden könnten. In Viertel gebrochen, zeigt das Hunderterblatt 4 Fünfundzwanzigen, das Achtel „von 100“ besteht aus 8 Zweien und 8 Halben, Fünftel- und Zehntelbrüche sind auf einem anderen Blatte möglich; sie zeichnen sich aus durch ihre Deponierbarkeit. Diese fällt hingegen ganz und gar bei Dritteln und Sechsteln. Wenn man nicht einzeln auskühlen will — das geht auch —, so gelingt es nur dadurch, daß man die vergeblichen Bruchlinien so legt, daß auf jeden Teil 10 Dreien und 10 Erden kommen. Aber wenn wir das oben und unten machen, kommt da der mittlere Teil nicht so schlecht weg? fragt das Kind. Das muß ausgekühlt und ausgezeichnet werden. Und mit Sechsteln ist es ähnlich. Ebenso geht es mit Teilstücken: Viertel, Achtel und Zehntel von 80 lassen sich ganz leicht darstellen, Halbe, Drittel, Viertel, Fünftel, Sechstel und Zehntel von 60 ebenfalls; auch 30 und 60 sind diesen Bruchformen zugänglich.

Ist das nicht — hören wir da sagen — schon eigentlich Prozentrechnung und Multiplizieren mit Brüchen? Freilich ist es das. Man kann allerdings auch sagen, das ist es nicht, denn es sind ja weiter nichts als Zahlenfassungen und Darstellungsübungen, Übungen allerdings, welche jenen Operationsformen alle Schwierigkeiten zu nehmen geeignet sind. Wer die Bruchfassung so einleitet, wird jedenfalls nicht über mangelndes Verständnis zu klagen haben. Sieht er trotzdem vor dieser Tatsache, so mag er nichtucken, so weisen Verhältnisse die Schuld liegt, sondern mag bethat zu dem einzigen Mittel greifen, das alle solche Kinderschüden heilt: die vollkommene Anschauung im eigenhändigen Erleben.

§ 22. Die allgemeine Zahl.

Um den Begriff der allgemeinen Zahl zu gewinnen, können — wie leicht einzusehen ist — Auffassungs- und Darstellungsübungen nicht mehr in Betracht kommen. Diese widersprechen ja geradezu dem Wesen der allgemeinen Zahl. Denn wenn wir etwas wiederholt auflassen und darstellen, tun wir dies in der Absicht, die Auffassung auch in ihren Teilen immer genauer und feiner zu gestalten. Bei der allgemeinen Zahl kann aber von solch genauer Auffassung keine Rede sein. Das Begriffgefühl zeigt sich vielmehr besonders

nach dann, wenn Vertretungsvorstellungen von der Form der gewöhnlichen Zahlen eingesetzt werden sollen. Jeder ist sich dann dessen bewußt, daß auch ihrer viele den Umfang des Begriffs der allgemeinen Zahl bei weitem nicht ausfüllen. II ist nicht 1. Das Wesen der allgemeinen Zahl im Gegensatz zur gewöhnlichen Zahl beruht eben in der Freiheit von dieser Beschränktheit; als wesentliche Merkmale kommen nur noch die Beziehungen in Betracht; die Sachgröße verschwindet, die Rechenungsgröße wird allein herrschend. Auch darin zeigt sich der Fortschritt der Abstraktion.

Daher ist die Einführung in dies Gebiet nicht denkbar ohne operative Übungen. Wir könnten daher an dieser Stelle davon absehen. Diese Einführung darzulegen, und sie zurückstellen. Na die Operationen besprochen wurden sind. Um des Zusammenhangs und des Überblicks willen sollen aber wenigstens einige der wichtigsten Gedanken hier Platz finden.

Die Einführung kann vorgehen von den bereits vorhandenen allgemeinen Zahlen, mit denen die Rechenlehre beginnt. Diese ist nach den meisten Schulpisänen vor Eintritt der hier in Rede stehenden Erweiterung des Zahlbegriffs so weit gefördert worden, daß eine Reihe von Formeln den Schülern geläufig oder wenigstens verständlich sind, wie $g \cdot h$ für die Inhaltsberechnung des Parallelogramms, $\frac{g \cdot h}{2}$ für die des Dreiecks, s^2 für die des Quadrats, $s^2 \pi$ für die des Kreises, $4s$ als Formel für den Umfang des Quadrats, $2\pi r$ für den Umfang des Kreises u. u. m., sowie die davon abgeleiteten, wie $g = \frac{2}{h}$ usw.

Diese allgemeinen Zahlen sind auch bei ihrer ersten Einführung dem Schüler nicht schwer gefallen. Denn sie erschließen ihm die Abstraktionen für Grundlinie, Höhe, Seite, Radius usw., also die Bezeichnungen geometrischer Strecken, deren Maßzahlen die wesentliche Berechnung ermöglichen. In dieser Auffassung, daß für den Jugendlichen die ihm bekannten allgemeinen Zahlen Ausdruck Strecken bedeuten, liegt einerseits eine gewisse Schwierigkeit. Denn die allgemeine Zahl soll doch — das ist ihr Sinn — von der bisherigen Zahlvorstellung abstrahieren, um zu einer höher entwickelten Form des Zahlbegriffs zu gelangen¹⁾; und für diese Abstraktion könnte die Vorstellung der Strecke als ein Hemmnis erscheinen. Andererseits zeigt sich in der Auffassung der allgemeinen Zahl als Strecke eine gewisse Entschärfung insoweit, als sogar die gegebene

¹⁾ Diese Abstraktion ist durchaus nicht leicht. Wie es selbst gesagt hat, wird geglaubt haben, daß es immer eine Anzahl Schüler gibt, die für nicht geübten Willenswand empfangen schwere, abstrakte mathematische Vorlesungen hören, und denen mit der Zeit im Nachhinein ein etwas anderes nicht ergeht.

Stünde es lange noch nicht eine bestimmte Zahl bedeutet, als der

ersten Stufen. Die Einführung der negativen Zahl steht nun zu verdeutlichen durch ähnliche Anschauungen auf verschiedenen Lebensgebieten: Vermögen und Schulden, Wärme- und Kältegrade, vergangene und künftige Zeit, Mischungsrechnung mit gegebener Mischmenge usw., und die irrationalen Zahlen veranschaulicht man als bisher noch nicht bestimmte Punkte der Zahlreihe, die imaginären als außerhalb der Zahlreihe liegende Raumpunkte. Aber diese Veranschaulichung ist doch etwas ganz anderes als die bei der Gewinnung der Zahlreihe oder des Zahlensystems. Sie ist gewissermaßen ein nettes, aber kaum nütziges Bild jener Begriffe, kaum nützig, weil die Abstraktionsfähigkeit so weit entwickelt ist, daß der Begriff selbst ohne diese Veranschaulichung gewonnen werden kann. Das „kaum nützig“ ist aber nicht gleichbedeutend mit unvernünftig; im Gegenteil: obwohl die Veranschaulichung gegebenenfalls entbehrt werden kann, ist es doch zweckmäßig, sie zu gebrauchen, und zwar aus demselben Grunde, aus dem auch sonst die Veranschaulichung des Begrifflichen erfolgt: es klarer, deutlicher und damit widerlegungsfähiger zu gestalten¹⁾.

3. Abschnitt des Lehrverfahrens:

Die Gewinnung der Operationen.

§ 23. Die Gliederung der Aufgaben.

Wenn ein Schloßherr seinem neu eingetretenen Lehrling die Aufgabe stellt, er solle einen Schiffschart aufstellen nach dem ihm gegebenen Muster, zugleich aber auch darauf achten, welche Menge Fellspäne bei jedem Stiche abfalle, so würde jeder dieser Meister für sehr unvernünftig erklären, weil er ja nicht einmal wisse, daß man immer nur eine auf einmal tun könne, einmal der Anfänger. Dieser hat — um es psychologisch auszudrücken — gerade genug damit zu tun, seine Aufmerksamkeit auf eine der beiden Aufgaben einzustellen. Er kann sie der anderen erst dann zuwenden, wenn die erste erledigt ist.

Nichts anderes als die Rolle des unvernünftigen Lehrmeisters aber scheinen wir Pädagogen des öffentlichen Spieles zu spielen, wenn wir unsern Kindern, Anfängern in der mathematischen Erkenntnis, erwarten, sie sollen aus der 10 eine 7 oder aus der 11 eine 8 machen und dabei auch noch darauf achten, wieviel weggenommen werden

¹⁾ Jeder Begriff hat nur Inhalt durch die jeweilige Stelle des Satzes in sinnlicher Erfahrung, die wir damit verbinden“ (Wundt, Logik I, S. 76). Vergleiche auch die weitere Auffassung auf S. 98 der vorliegenden Ausgabe.

schwer. Es fällt zwar vielen von uns, wie auch jedem erwachsenen Laien, außerordentlich schwer, in dieser Forderung eine besondere Schwierigkeit zu finden. Aber die praktische Beobachtung des Kindes, verbunden mit immer tiefer dringenden psychologischen Studien, gestattet keinen anderen Schluß, als daß der Sachverhalt in beiden Fällen, in dem des Lehrlings und in dem des Elementarschülers — selbstverständlich mit den durch die Umstände gegebenen Unterschieden — psychologisch im Grunde genommen der gleiche ist.

Daraus ergibt sich als erste grundsätzliche Anweisung über das Lehrverfahren eine Teilung der Aufgaben in der Richtung, daß wir einerseits die Kinder einführen in den Sinn der verschiedenen Operationen, und daß wir andererseits ihre Aufmerksamkeit richten lassen auf das Ergebnis der durch die Operationen erfolgten Veränderungen. Wie wir uns auch die folgenden Aufgaben gliedern mögen, von vornherein ist klar, daß die Einführung in den Sinn jederzeit die erste Aufgabe zu bilden hat. Möglich wäre es, die Einführung in den Sinn der verschiedenen Operationen als Gesamtaufgabe in einem längeren Zeitraume zu erledigen, um dann später an die einzelnen Operationen mit dem Blick auf ihre Ergebnisse heranzutreten. Möglich wäre auch die Art, daß man jeder Operation für sich die Einführung in den Sinn voranstellt. Das Lehrverfahren selbst ist nicht wesentlich, ob man sich von hier die eine oder die andere Art entwickeln mag, wie sich leicht aus dem folgenden ersehen läßt. Wenn wir hier die erste jener beiden Arten darstellen, so heißt uns lediglich der Gedanke, inhaltlich Gleiches bei der Darstellung nicht wiederholen zu müssen.

§ 24. Die Einführung in den Sinn der Operationen.

Das Ziel der hier in Betracht kommenden Unterrichtsarbeit muß sein, den Kindern die mathematischen Tätigkeiten des Hinzufigens, des Wegnehmens, des Zerlegens und des Ergänzens, des Malnehmens, des Verteilens, des Zerlegens in Faktoren und des Messens begrifflich geläufig zu machen in dem Sinne, daß das Kind nicht nur diese Tätigkeiten kennt — d. h. weiß, was darunter zu verstehen ist —, sondern auch kann, d. h. ausführen kann. Die „Bedeutigkeit“ eines Begriffs müssen wir für diese Stufe eben so verstehen. Dabei muß immer wieder betont werden — weil unser bisheriger Rechenerunterricht das vernachlässigt — daß dabei kein anderes Ergebnis in Betracht kommt als dies: er kann schon ausführen, ihr könnt schon messen usw. Dieser Gehaltswert des Tätigkeitsbegriffs geschieht nicht durch Nachfragen der Worte, selbst nicht durch offenes Vermuten, sondern

durch wirklichen Ausführen. Selbstverständlich treten die Verführung und die verschiedenen sprachlichen Bemerkungen, die den Kindern noch nicht bekannt sind¹⁾, noch und noch hinzu, aber die wirkende Ursache ist eben jenes wirkliche Ausführen. Wie gestaltet es sich?

Wenn man die rechnerischen Tätigkeiten in ihrer Gesamtheit überblickt, so sieht man sofort, daß die uns geübteste Anwendung auf Zahlengrößen eine Verengung ihres Anwendungsgebietes bedeutet, die durch nichts gerechtfertigt wird. Gerade der Blick auf das allgemeine und der auf das tägliche Leben zeigt uns, daß wir hinaussagen, wassehen können usw., ohne bestimmte Zahlengrößen vor uns zu haben, und dies ist das Gebiet, auf dem wir unseren Kindern diese Tätigkeiten nach ihrem wesentlichen Inhalt — d. h. begrifflich — beibringen.

Einige Beispiele, zunächst aus der kindlichen Erfahrung: Die Suppe schmeckt nicht recht, die Mutter tut noch etwas Salz hinein (wie sagt es hinein, wie sagt eine Menschenpflanze, einen Kaffeetisch voll hinein); sie tut ein Stück Butter an das Gemüse, gibt noch ein wenig Salz an den Salat. Die Kinder sind noch nicht mitt im Mittag, sie möchten noch etwas Gemüse bekommen; auch noch zwei Kartoffeln dazu; nun haben sie mehr, für die Kleinen war es erst schon genug. Es ist nicht genug Öl auf der Lampe, die Mutter muß zugeben; das Feuer im Kachelofen will aufgehen, sie muß Peckkohlen zulegen. Beim Milchmann ist das Litermaß noch nicht voll, beim Kaufmann wiegt die Waage noch nicht, sie müssen beide noch etwas zugeben. Beim Buchbinder kriegt man zu einem Schreihals eine Feder ra. Es regnet wochenlang, das Wasser vermischt sich. Die Eichenröschen an den Kalkblättern lassen erkennen, wie sich die Schneefurche vernehmen . . . Oder aus dem Tun der Kinder. Zwei Tasse können wir von dem Semmelbrot, wir wollen noch einen dazu lernen. Wir haben 4 Kinder auf die Tafel gesetzt, wir wollen noch mehr dazu haben. Wieviel Vogel, Stein, Krust, Salb, Früchte, Kartoffeln usw. habt ihr gemacht? Fügt jedes noch mehr, noch 8 hinein! Neben dem Malen gibt das Spiel Veranschaulichung zum Zählen: Auf dieser Seite stehen so wenig Kinder, da müssen noch 2 mehr sein! Oder das Sammeln von abwechseln Dingen, Nadeln, Kartons, anderen Früchten, Samen, Federn, Metall usw.²⁾, bei denen alle dazu beitragen, es zu vernehmen. Das sind Augenblicke

¹⁾ Es lagten mich Kinder des 2. Schuljahres, als das Buchstabenbuch seine Aufgaben brachte, was es hieße: vermuten, verstehen, unterscheiden, aufheben, befragen, das Überhebe, befragen, Zählen usw.

²⁾ Die zunächst selbst als Lehrmittel dienen, bei geeigneten Dingen aber auch dazu, bessere Lehrmittel, etwa einen Lichtschappensatz herzustellen, den dann die Kinder selbst verwerten können.

bilder aus der Addition des Lebens, bei der die Kinder beobachtend und selbstthätig tätig sind, aber auch angereizt werden, je nach Stoff und Verständnis sich andere ausdrücken: hineinfügen, ergänzen, ergänzen, darüber, ergänzen usw. und bei all dem sich veranlassen, wie eine vorhandene Menge vermehrt wird.

Wenn es beim Einrechnen viel wiegt, nimmt der Händler ein paar wieder weg. Wo viel Mühe ist, hält man eine Karte; die soll sie vermindern. Mit Leinwandern und Unglücken vermindern wir auch die heiligen Flagen, die sich so stark vermehren. Der Schornstein wird vergrößert, die Aschegrube wird entfernt, der Schornstein gefügt: was uns stört oder viel ist, müssen wir vermindern. Die Blumen werden abgeschnitten, die Felder abgemäht, das Obst abgepickt, die Eier des Hühners weggeworfen; die weichen Pflanzen werden ausgesät, auch teigige Birnen, derartige Äpfel und kleine Kartoffeln. Überdies vermindern sich alle unsere Vorstände im Gebrauch. Der Fröhenheitsbund in der Schule wird nach wenigen, der Meistlich schneidet sich ab, die Tinte im Hause und die Kreise vermindern sich fortwährend. Wenn nicht genug Platz auf der Tisch ist, werben wir einige der Bilder weg. Beim „Bauen der goldenen Brücke“ wird die Reihe der Kinder jedesmal kleiner, ebenso vermindert sie sich bei der „schwarzen Köche“. Das ist die Subtraktion des Lebens.

Das Zerlegen lernen die Kinder, indem sie angereizt werden, sich jederzeit Rechenschaft zu geben über die Teile eines Dinges und zugleich über den Zweck der Teile, ohne den das Interesse für die Teile in der Luft hängt. Man versagewürdigt sich das und the es mit den Kindern an Kirchen, Bienen, Mäusen, Kartoffeln, Mören, Schneeglöckchen, Sonnenblumen und anderen passenden pflanzlichen Erzeugnissen, an Hausieren und wilden Tieren, an Tier und Fenster, Tuch und Öfen, Messer und Gabel, Kinderwagen und Schützen, Fische und Kreisel auf, Flachsenen, Schweinschäbchen, Ansetzen einer Gans, Lampen vorrichten, Betten machen, Kleider reinigen sind Beispiele aus der häuslichen Erfahrung. Dabei handelt es sich überall nicht um ein Zerlegen, sondern ein Zerlegen in die Bestandteile, ein Bewußtwerden ihrer Art und Eigenheit.

Das Vergleichen wird ebenfalls schon in fast allen Stunden getrieben; auch quantitativ soll es geübt werden und als solches zum Bewußtsein kommen. Wie vergleichen auf der Wiese die Größe der Grashalme, die Zahl der erblühten Maßkränze, im Walde die Fläche, wo mehr Heidebeeren stehen, die Größe und Kraft der Hausiere, die Größe der Kinderstühle, der Öfen, der Kreisel, der Hefen, der Eile, die Zahl der Osterker, die Geschwindigkeit der verschiedenen Beförderungsmittel. Und nach dem Vergleichen steht, so oft, als es angeht, das Ergänzende ein: Die Mutter gießt

die Mischstare voll, sie füllt den Wackelzug vollends, sie erglänzt die gesparten 17 Pfennige zu 20, sie hängt die Wackelstare nach voll auf der noch Platz war. Der Gebirgszug erglänzt die verlorenen Steine des Zuckersack, und Weihnachts erglänzt die Vorräte im Kaufmannsregal. Es handelt sich beim Erglänzen überall zuerst um den Vergleich der Wirklichkeit mit der Möglichkeit und sodann um ein Überführen der Möglichkeit in die Wirklichkeit durch Anfüllen des Unvollständigen. Das kann in den verschiedensten Lagen der häuslichen und schulischen Kinderleben in Betracht kommen.

Besonders wichtig ist, das Malnehmen zuerst ohne Zählen zu lernen. Wir haben wiederholt die Erfahrung gemacht, daß nicht wenig Kinder ziemlich verblüfft waren, wenn sie erkannten, daß das rechnerische Malnehmen doch eigentlich dasselbe zu bedeuten habe wie ihr häusliches „mal“: Zweimal bin ich im Walde gewesen, jedesmal habe ich Beeren gepflückt. Viennal wurden wir die Wänsche geüßt, so rasch wurde sie trocken. Dreimal hat der Zug gepflüzt, viennal bin ich schon in der Eisenbahn gefahren. Dreimal bin ich gestern auf dem Karrenroll gepflückt, einmal umsonst. Schon zweimal hat es in dieser Woche sehr starkes Nebel gegeben. Zwanzigmal wohl bin ich den Berg hinunter gerodelt. Sechszahl hintereinander habe ich den Ball geworfen und aufgefangen. Zweimal kommt die Bettelfrau. Dreimal in der Woche werden die Schulkameraden gekostet; ein Kind ist zweimal zu spät gekommen, das eine Mal hatte es sein Frühstück verloren; dreimal haben wir heute schon die Klasse gepflückt und.

Auch das Verteilen wird in der Schule wirklich ausgeführt: Verteile diese Stückchen Plastilin, verteile die Kreide, verteile diese Papiebstücker, verteile die Legenstücker, die Perlen, die Pinnagel. In der Schule und im Walde werden die Nüsse verteilt, und zu Hause verteilt die Mutter die Suppe, das Gemüse, das Fleisch, die Erdbeeren. Im Weihnachts werden Nüsse verteilt und zur Kindstube Zuckerstücken, und in der Kirche zur Weihnachtsfeier solche Bilder oder Kalender. Die Zeitungsstreu verteilt die Zeitungen und der Mann die Betstücker usw.

Wir messen auch mit allerhand Maßen: die Suppe mit dem Schöpfstiel, die Arzenei mit dem Teelöffel, den Kaffee mit dem Flechtel, die Pferdeheute mit Spannen, die Zahlings mit Deumenbreiten, den Spielkreis mit den Schallhaken mit Schritten. Die großen Leute messen die Wärme mit dem Thermometer, das Kind manche Kinder auch schon, auch die Kälte messen sie so, sie messen die Stunde mit der Uhr und das Hochwasser mit dem Wassermast. Daneben können Meter und Zentimeter neben Pfund und Dutzend schon frühzeitig an das Kind herangeführt werden. Auch das Messen ist ein Vergleichen der Möglichkeit — hier der Maßbarkeit

— mit der Wirklichkeit; nur daß diese hier nicht aufgesperrt, sondern daß lediglich die Funktionszahl gerundet wird.

Das Zerlegen in Faktoren endlich — wir beschränken es aus besonderen Gründen hier zuletzt — hat seine Parallele ebenfalls im täglichen Leben, auch in dem der Kinder. Wie das Zerlegen in Bruchzahlen vorgelübt ist und vorbereitet wird in dem vorliegenden Betrachten der Dinge und ihrer Teile, so wird das Zerlegen in Faktoren vorgelübt durch vorlegenden Betrachten der Erscheinungen und ihrer Ursachen — man erinnere sich der Funktionszahl und Schatzrisikahl! So z. B.: Daß das Thermometer in die Höhe geht, kommt von der zunehmenden Wärme; daß das Mühlrad sich dreht, das bewirkt der Wind oder das Wasser; daß der Teich gefriert, rührt her von der Kälte; daß wir Durst bekommen, vom langen Laufen. So werden auch analysierend betrachtet Sonne, Baum und Schatten; Schnecke und Schnei; blinkende Lampe, Fuß im Zimmer und schwarze Nase und was sich sonst noch für diesen Zweck auswerfen läßt.

Wir fassen zusammen. Ist denn dies Rechnen? Rechnen im üblichen Sinne allerdings nicht, aber es gehört mit zu den ersten und wesentlichen Grundlagen mathematischer Bildung. Wie es zur Erweiterung der Zahlgriffe nötig ist, Zahlenfassung und Darstellung in vielfacher Wiederholung zu üben, so ist auch die Operationenfassung und -darstellung nötig, die zunächst ohne Komplikationen und Erschwerungen erscheinen muß. Welches wir unsere Kinder anleiten zum Operieren mit reinen Quantitäten, so müssen sie das Operieren erst völlig beherrschen im Gebiete des Handgeflückten, des Koordinien, der Sachvorstellung. Der achtsame Leser hat gewiß bemerkt, wie in den Beispielen neben dem eigenen wirklichen Handeln und Ausführen des Kindes auch die Erinnerung an ihnen Rechte kommt und den Übergang bildet zu anfangs schwächeren, dann immer stärkeren Abstraktionen. Doch ist auch an dieser Stelle darauf gewarnt, sich etwa auf die Erinnerung zu verlassen. Die Erkenntnisse von der Wichtigkeit der Bewegungsempfehlung für diese Seite der geistigen Entwicklung und die Erkenntnisse von der Unzuverlässigkeit der kindlichen Erinnerung weisen den rechten Weg. Es gilt hier wie in vielen anderen Fällen: Das steuern und das andere nicht lassen.

Sollten läßt sich noch eine andere Erkenntnis aus den mitgeteilten Beispielen gewinnen. Weil das „eigentlich kein Rechnen“ ist im Sinne der alten Schule, sondern Anschauungsunterricht, so geht daraus hervor, einerseits, daß der Anschauungsunterricht mathematische Aufgaben zu übernehmen und zu lösen hat, und sodann, daß das „eigentliche Rechnen“ erst einsetzen darf, wenn ein solcher Anschauungsunterricht weit genug verarbeitet hat. Wenn dieser

Zeitpunkt am zweckmäßigsten anzusetzen ist, das ist aber eine Frage, die in einem späteren Abschnitt behandelt werden soll.

Zwischen der ersten Aufgabe, in dem Sinne der Operationen im gefühlbetonten und eigenschaftlicher Weise auszuführen, und der zweiten, die Operationen mit Betonung ihrer Ergebnisse anzuwenden an Zahlen, steht noch eine Übergangsstufe, die durch ein Beispiel gekennzeichnet werden möge: Ein Baueses Kinder geht zum Schülchenst (wir stellen sie nicht, jedes Kind symbolisiert sie aber durch Stäbchen, Perlen, Steinchen oder andere Rechenhelfer). Es bleiben an der Holzkuchenbode stehen, 3 an der Würfelbude. Die anderen gehen weiter; von jenen 3 läuft eine hinter dem Schwarm her und holt ihn ein. Nun stellen sich 10 an Karussell auf. Das alles wird dargestellt, die Operationen werden also auch zahlmäßig ausgeführt, ohne daß jedoch das Ergebnis in Betracht käme. Ein Hinweis darauf wäre es, wenn jedesmal festgestellt würde: Nun sind es hier weniger, nun wieder mehr u. s. Als Übergangsstufe bedarf das Ganze gewisshin keiner besonders starken Übung. Man beobachtet die Kinder, die schwächsten besonders, und merkt, ob man weiterrechnen kann.

§ 25. Addition und Subtraktion.

Sind die rechnerischen Operationen soweit vorbereitet, so können sie nun auch mit Hinzunahme des zahlmäßigen Ergebnisses betrieben werden. Wir empfehlen dabei, Addition und Subtraktion zusammen zu nehmen. Da die erste Form auch der folgenden Übungen darin besteht, den wirklichen Vorgang an wirklichen Dingen auszuführen, und da der Sinn der beiden Operationen infolge der früheren Übungen als völlig erfüllt vorangestellt werden muß, so ist dies Zusammenschließen von Addition und Subtraktion von vornherein möglich. Andererseits sieht man, daß der rechnerische Betrieb sich gar nicht sehr von dem vorher erläuterten Beispiele unterscheidet¹⁾. Es wird eben überflüssig das Ergebnis hinzugefügt, also — um das vorige Beispiel nochmals heranzuziehen: 30 Kinder gehen zum Fest; die letzten 3 (um das Zählen zu erleichtern) bleiben stehen, nämlich das 26., das 18. und das 15. Kind. Nun sind noch 17 beisammen. Beim nächsten Male bleiben 4 stehen, nämlich das 17., 16., 13. und 14. Kind; sind noch 13 beisammen. Nun mögen sich zwei hinzugesellen, sie bilden jetzt das 14. und 15. usw. Natürlich kann auch das 1., 2., 10. stehen bleiben, und

¹⁾ Das Beispiel kennzeichnet eigentlich schon die folgende Form, die wirkliche Ausführung der Operation an den Symbolen für die Dinge. An dieser Stelle wird es kaum nötig sein, die eigentlich gute Form, welche das Ausführen der Operation an Dingen verlangt, noch näher darzulegen.

es mag gelegentlich an angeführt werden. Aber dann nehmen eben andere Kinder die frei gewordenen Plätze ein. So gelangt das Kind — wiederum nicht sprunghaft, sondern allmählich — zu der Erkenntnis, daß es sich bei den betreffenden Zahlenangaben nicht um eine unabhängige Reihenfolge der Eindeutigkeit handelt, sondern immer nur um die Gre der Gesamttheit.

Eine bedeutsame Einscheidung tritt dabei ins Auge. Während bei den bisherigen Übungen überall die Grundzahlen ausreichen, treten hier die Ordnungszahlen hinzu. Grund- und Ordnungszahlen gleich zu Anfang in kurzen Durcheinander zu bieten, das kind wiederum, zwei Schwierigkeiten auf einmal zu überwinden verlangen. Hier aber ist eine passende Stelle, um die Ordnungszahlen einzuführen, undal in Zahlensinnung und Operationsbegriff genügend vorbereitet sind. Stten wird überdies noch berücksichtigt durch die einzelnen Teilsten, in welche wir die Behandlung der Addition und Subtraktion gliedern.

a) Addition und Subtraktion von 1 bis 4 (8) an Dingen und Symbolen.

Es erfolgt zunächst und längere Zeit hindurch lediglich zählend, und zwar aufzählend und abzhlend. Damit ist zugleich gegeben, daß diese Übungen sich zunächst alle in der Zahlenreihe bewegen. Endlich geht aus der Gre der Operationszahl, die zu übersteigen ist, und aus dem erkennbaren Auf- und Absteigen hervor, daß die bersteigerung des Zählers hier gar keine Schwierigkeiten macht, das unbedenklich mit hinzugesprochen werden kann. Damit werden Schritte, denen im bisherigen Rechnenunterricht eine außerordentliche Wichtigkeit beigegeben und denen daher eine lange Übung gewidmet wurde, zu einem Teile fast spielend bewältigt, zum andern in zweckmässiger Weise vorbereitet. Einige Beispiele mögen Gang und Eingliederung veranschaulichen.

1. Die Mutter hat Geburtstag. Gode holt von der Wiese einen roten Blumenstrauch, und weil sie schon gut zählen kann, zählt sie die Blumen, die sie pflückt: 3 weiße Margaretenblumen — die maßen wir, aber nicht so groß, und alle in eine Reihe — und 3 kleine Glockenblumen ... (Kinder: Nun hat sie 6) ... und 2 rote Nelken ... (nun hat sie 8) ... und 3 gelbe Butterblumen ... (nun hat sie 11) ... und 4 Vergifteniusch ... (nun sind es 15) ... und noch 3 Nelken ... (die Kinder maßen ganz schmerzhaft — es genügt bei späteren Übungen auch Striche oder Ringe! — und weisen jedesmal das Ergebnis) ... o, da findet sie noch 3 Stengel Frsegras ... und noch 2 Glockenblumen ... und noch 3 Vergifteniusch ... (da hat sie 20 Blumen im ganzen). Kimm's? Zählt

nach! Wer möchte auch einen Blumenstrauß pflücken? Und die Kinder bilden nun selbst solche Aufgaben.

2. Hans hat eine Sparbüchse bekommen, und der Vater hat ihm 3 ganz neue goldige Pfennige gegeben, damit er sie hinstellen kann ... Malen! ... Die Mutter findet auch noch 3 ... (Regeln nach jeder Änderung!) ... Hans ist sehr froh; er zeigt die neue Sparbüchse der Tante, die hat auch 1 Pfennig Strig ... er geht für die Nachbarin einen Weg und bekommt 2 Pfennige ... er kauft ein Schreibbuch für den großen Bruder, und weil der auch den alten Umhang hat, kauft er noch 3; den Pfennig, den er wiederbekommt, darf er behalten ... Erzählt weiter! ... Nun kommt Marins Sparbüchse dran.

3. Fritz hat seine Soldaten aufgestellt, 22 Stück. Mal sie! (in Strichen.) Er hat eine Ehrenkranze und schließt: 3 sind gefallen (die Kränze wir nicht weg, die steichen wir noch aus, damit wir uns nicht versehen) ... beim nächsten Schuß fallen 2 ... beim nächsten 4 ... beim folgenden noch 1 ... Schließt weiter! Nun kommt ein anderes Regiment dran.

4. Lotte hat eine Tüte Haselnüsse bekommen, 36 Stück. Mal sie! (in Ringen und — je nachdem die Gruppen dagewesen sind — rhythmisiert.) Sie gibt dem Vater 3 ... (Regeln feststellen.) und der Mutter 2 ... dem Max 3 ... und 3 hat sie selber. Dem nächsten Tag kriegt jeder 2, also zwei der Vater ... dann die Mutter ... dann der Max ... dann die Lotte. Nachmittags kommt die Frieda, die kriegt auch 2 ... dabei noch Lotte auch 2 oben ... Erzählt weiter! Seht eine neue Partie her!

5. Auf dem Spielplatze spielen 6 Kinder am Sandkasten. Mal sie! (Schematisch, Striche mit Köpfen.) ... Da kommen noch 4 Mädchen und spielen Ball ... 3 Jungen bringen ihre Ratten ... Nun kommen noch 8 Kinder mit dem Kröchel ... Vom Sandkasten laufen 3 fort ... Ein Mädchen hat sein Taschentuch vergessen ... Dann kommen 4 Kinder, die wollen Soldaten spielen ... 2 stehen miteinander und laufen nach Hause ... Erzählt weiter!

6. Die Mutter hat große Wäsche. Martha hilft mit aufhängen. Zuerst kommen 10 Taschentücher dran. Mal sie! Dann 10 Strümpfe ... dann 8 Handen ... dann haben noch 3 Handtücher Platz ... Nun kommen 4 Betttücher hinein ... dann 4 kurze Strümpfe und 4 lange Strümpfe usw. Eine Menge Wäsche hängt nun schon auf dem Trockenplatze, aber noch nicht alle. Von den Taschentüchern sind 3 trocken geworden ... An dieser Stelle haben 4 Strümpfe und 2 Handtücher Platz ...

7. Die Kinder spielen mit dem Schitten (mit Legestöckchen oder Strichen dazustellen). Es kommen 4 Jungen und stellen ihre Schitten den Berg hinauf ... dann kommen 3 Mädchen dazu ...

Sie wollen anschauen, was raum sehen soll, aber Karl setzt sich, und halt geht's los... Nun kommen noch 2 herunter... (da sind oben noch 4, unten 3)... Kommen noch 2 Kinder durch mit ihren Schritten... 2 fahren herunter... 2 ziehen hinauf... 2 marschieren von drüben herüber und stellen sich oben dazu... auf.

8. Als die Straßenbahn unten am Einsteiger abfährt, sitzen 6 Leute drin. An der Mathildenstraße steigen noch 4 ein... (Eingehende), am Kreuz noch 3... an der Kaiserin-Augusta-Straße wieder 2... an der Kirche 4... an der Kreuzprinzenstraße steigen 3 aus... an der Albertstraße noch 4... Der Schaffner will sehen, ob sein Geld stimmt. Er zählt 19 Örschen. Stimmt's? Wie kann das rechnen helfen? (Die Ausgestiegenen darf er jetzt nicht vergrüßeln, die haben noch bezahlt.)

Wie man ohne weiteres sieht, sind die Beispiele 1 und 2 von der Formel $a+b+c\dots$, die Beispiele 3 und 4 von der Formel $a-b-c-d\dots$, die Beispiele 5–8 endlich von der Formel $a+b-c+d-b\dots$, wobei Abänderungen möglich sind in der Weise, daß zwei verschiedene Summen in Wechselwirkung zueinander gebracht werden (7) oder daß die positiven oder die negativen Glieder allein noch eine weitere Aufgabe bilden (8).

Die vorherigen Übungen bewegten sich immer noch in der Zahlenkette, wenn auch die Zählung überall, wo es angeht, sich rhythmisch gestaltet. Nehmen wir an, daß inzwischen die Übungen im Annehmen von Zahlen mittels des Überblickens und im entsprechenden Darstellen eingeübt haben und ein gutes Stück gefördert worden sind, so steht nichts im Wege, dann auch die Additions- und Subtraktionsübungen nicht nur in der Zahlenkette, sondern auch im Zahlbild zu versetzen zu lassen. Wir können da noch längere Zeit bei solchen Übungen verweilen, wie sie durch die obigen acht Beispiele angedeutet worden sind. Und doch bringt das Hartnäckig mit den Zahlbildern einen neuen Zug in diese Übungen. Es besteht in der ungleichlichen Betzung des Zehners. Wenn die Rechnung verlangt $18+4$, so bleibt gar nichts anderes übrig, als zunächst nur 2 Hunderter, d. h. den Zehner voll zu machen. Und ebenso ist es bei der Aufgabe $22-8$; hier können zunächst nur 2 Punkte entfernt werden, d. h. wir gehen auf den Zehner zurück.

Die technische Ausführung der Addition und Subtraktion ist leicht zu bewerkstelligen, solange wir in der Zahlenkette verbleiben. Die einfache und selbst die rhythmisierte Haltung von Rechenaufgaben, das ruhende Darstellen von Strichen und Ringen als Darstellungssymbole erhöht so much, daß der Zeitaufwand nicht ins Gewicht fällt. Anders bei den Zahlbildern. Hier ist rasches


Überblicken in nicht geringem Grade abhängig von der klaren und deutlichen Darstellung der Rhythmisierung. Gerade die Erfahrung, daß kleinere Kinder diese Schwierigkeit nur mit viel Zeitaufwand und in nur bedingter Weise zu bewältigen vermögen, hat bewirkt, daß in unserer Praxis ein sonst vorzügliches Rechenaufhelfsmittel, das wirkliche Geld, mehr und mehr zurückgegriffen ist. Sie hat wesentlich dazu beigetragen, den Kindern fertige Zahlbilder in die Hand zu geben. Am geeignetsten erwies sich für den vorliegenden Zweck folgende Form. Die Hundertertafel wurde auf Karten gedruckt, und zwar zwei Stück für jedes Kind. Diese beiden Tafeln wurden von verschitten, so daß 4 mal das Zahlbild der 20, 8 mal das der 10, 8 mal das jeder Zahl von 9 bis 1 entstanden und also jedem Kinde in die Hand gegeben werden konnten. Damit lassen sich alle Additionen und Subtraktionen im Zahlenraum bis 100 mit wenig Griffen ausführen. Bei der Aufgabe $27+4$ hat das Kind mit 3 Griffen das Zahlbild der 27 hinglegt. Dann muß es, um den Zehner voll zu machen, die fehlende 3 hierauflegen — eine 4 an dieser Stelle paßt gar nicht in den freien Raum und würde auch sonst das ganze Bild stören — und endlich ist noch die 1 anzusetzen. Soll es aber von diesen 27 z. B. 3 wegzunehmen, so deckt es zunächst 8 zu, „denkt“ sich dann 3 weg, entfernt die 7 und legt sofort eine 4 hin. Wird verlangt, von 20 eine 4 wegzunehmen, so muß tatsächlich „gewechselt“ werden: das Zahlbild der 20 wird abgeworfen, ausgewechselt gegen die drei der 10, der 5 und der 4. Nun kann die 4 wirklich weggeworren werden.

Jedes Kind ist dabei tätig. Diese Ausführung, und zwar selbsts aller Kinder zu gleicher Zeit, ist ja das bestimmende Hauptstück. Nicht das Sehen, auch nicht sehr eifriges Sehen hat diesen Erfolg wie das Greifen, das ja das Sehen zur Voraussetzung hat. Aber es ist für das Kind eine völlig andere innere Lage, ob es nur sehen, nachsehen soll, ob ein anderes es richtig bringt, oder ob es die geforderte Leistung selbst liefern darf. Es ist nicht uninteressant, den Unterschied der kindlichen Seele und Gedächtnisrichtung und der des gebildeten Erwachsenen auch in dieser Beziehung zu sehen. Für den gewöhnlichen Typus des höher gebildeten Erwachsenen ist die „Inspektion“ das weitaus mehr Gefühlbetonte und darum höher bewertete, man denke an inspirierende Funktionen auf allen Gebieten menschlicher Tätigkeit, an Direktoren aller Art, Inspektoren, Offiziere u. v. a.¹⁾ Dem Typus des normalen Kindes kann aber die inspirierende Tätigkeit nicht zu sagen, es will selbst schaffen. Im Selbstschaffen entwickelt es

¹⁾ Wenn natürlich nicht ausgeschlossen ist, daß es alle neben der inspirierenden auch schlichte Funktionen liebt. Hier die beiden sind vereinbar zu sehen.

eines Taktts, im Selbstschaffen ergibt sich auch der höchstnützliche Lernerfolg. Es kommt darum überall darauf an, daß wir Tätigkeiten schaffen, welche dem Kinde Gelegenheit zum Selbstschaffen geben und jene inspirierende Tätigkeit an rechte Stelle rücken. Und für den vorliegenden Fall bewegt auch die Entlohnung eine wesentliche Erleichterung und Förderung der Lernfähigkeit durch die Einrichtung, den kleinen Zählhölzer in die Hand zu geben. Wir können uns eigentlich nur darüber wundern, daß dieser einfache, auf der Hand liegende Gedanke nicht längst verwirklicht worden ist.

In dieser Stelle sei auch bemerkt, daß diejenigen Methodiker sich im Irrtum befinden, die von dem Zählhölzern eine völlig starre Ansicht verfolgen, die z. B. den Bernischen Zählhölzern vorwerfen, sie seien weniger gut brauchbar, weil beispielsweise das Zählholz der 5 einmal so , gelegentlich aber auch so  aussähe, während es in anderen Zählhölzern die unverrückbare

Form  hätte. Gerade die praktischen Erfahrungen mit den angegebenen Zählhölzern haben uns gezeigt, daß das Drehen und Wenden der von uns verwendeten Zählhölzer — wie es bei den tugendsten Zahlen sich nötig macht — tatsächlich ein gewisser Vorzug ist, der die Beweglichkeit der Vorstellung noch erhöht.

Wiederholt sei betont, daß die Nachprüfung aller solcher Rechnungen immer nur durch Anzahlen möglich ist, daß aber das Anzahlen je nach der kindlichen Kraft sich immer mehr rhythmisiert und verkürzt.

K) Addition und Subtraktion von 5 bis 10 an Dingen und Symbolen.

Es ist leicht einzusehen, daß wir schon bisher unter die Zahlen, welche zugezählt oder weggenommen werden sollten, in geeigneten Fällen auch Fördern rechnen können. $25-5$ macht eben gar keine Schwierigkeiten, auch $21+5$ geht auch, ist aber schon anders geartet. Gerade diese beiden Beispiele zeigen, daß die nächste Übungsstufe schon höhere Anforderungen an das Kind stellt als die vorige, auf der wir mit überblickbaren Operationszahlen hantierten. 5 ist ja noch so überblickbar, aber eine Zusammenstellung mit 5 schon nicht mehr so leicht. Da wir daher dazu übergehen, auch 6 bis 10 und größere Operationszahlen in unsere Additions- und Subtraktionsübungen einzuführen, ist es nötig, ein Zwischenglied zu treiben das Zerlegen und Vergleichen. Beide Tätigkeiten sind, wie wir uns erinnern, nicht in demselben Sinne operativ wie Addition und Subtraktion; wir nannten sie deshalb ruhende Beziehungen. Darum hat ja auch die Mathematik keinen beson-

deren Ausdruck für sie und befaßt sich mit den Ausdrucksformen der Addition und Subtraktion. Aber sie haben ihren großen Eigenwert in ihrem durchaus selbständigen logischen Charakter. Es ist deshalb ein Fehlgriff mancher Methodiker, wenn sie das Zerlegen z. B. als umgekehrte Schreibung der Addition auffassen lassen wollen. Dadurch bringt man nicht Klarheit in die Köpfe, sondern Verwirrung. Diese beiden Hilfsoperationen besprechen wir nun für die Addition und Subtraktion der Zahlen oben von 5 an.

Man könnte sagen, wir hätten sie eigentlich schon früher gebraucht, und eine geistreiche Rechenerthodik hat sich begibt, auch die Zahlen 2, 3 und 4 in vielen Übungen vorlegen zu lassen. Unsere Erfahrungen haben uns gezeigt, daß Übungen wie „3 Äpfel esse, einer und noch einer“, wertlos sind, weil sie Wirkungen bleiben auf der Stufe, der die Auffassung der abschließbaren Zahlgrößen noch Schwierigkeiten macht, auf der folgenden aber Langeweile erwecken, und zwar beiden, weil weder dort noch hier das Kind in diesen Übungen einen praktischen Zweck zu entdecken vermag, nur das: es muß es lernen. Aber die Zerlegung von 2 bis 4, teilweise auch noch von 5, läßt sich nach den bisher dargestellten Übungen voraussetzen, ohne daß sie besonderes Unterrichtsmittel gewesen wäre.

Wie gestalten sich nun die Zerlegungsübungen für die folgenden Zahlen? Sie machen nicht die geringsten Schwierigkeiten, wenn wir als Erzieher von hier aus über Art, Bedeutung und Gestaltung, den Kindern gegenüber aber sie als gewissermaßen notwendig herauszuheben lassen von den bisherigen Übungen, der Addition und Subtraktion von 1 bis 4, die allerdings — wie wir voraussetzen müssen — sie zu einer gewissen Sicherheit geführt worden, sind. Wenn das der Fall ist, können wir ohne weiteres beginnen mit Aufgaben wie $10 + 4$. Die Kinder legen die 10 aus 10 und 8, sie machen (wie vorher bei $10 + 4$) und dem Lehrer voll und fügen noch 4 hinzu. Der ganze Unterschied gegenüber den früheren Übungen besteht darin, daß der Zerlegungssatz noch besonders zum Ausdruck kommt und angefügt wird. Z. B. „10 Kinder stellen sich an ... 10 und noch 8; nun sollen sich noch 4 dazustellen; da kommen hierher noch 2 und die anderen 4 hier hinüber; zu 4 gehören 2 und noch 4.“

Auf diese Art bekommen die Zerlegungsübungen Sinn; ihre Zweckmäßigkeit und Notwendigkeit wird unmittelbar erkannt, kommt sogar schon den Kindern dieser Stufe beim vom Bewußtsein. Folgende Beispiele vertreten jeweils die ganze Übungsgruppe bis zu 100:

- a) $9 + 5$ (dann auch $10 + 5$, $20 + 5$, $30 + 5$ usw.)
 $8 + 5$
 $7 + 5$
 $6 + 5$

b) $9+6$	c) $9+3$	d) $9+8$	e) $9+9$
$8+6$	$8+7$	$8+8$	$8+9$
$7+6$	$7+7$	$7+8$	$7+9$
$6+6$	$6+7$	$6+8$	$6+9$
$5+6$	$5+7$	$5+8$	$5+9$
	$4+7$	$4+8$	$4+9$
		$3+8$	$3+9$
			$2+9$

Durch sind 300 Übungsbeispiele gegeben, die der Lehrer allerdings überblicken muß, um die Übung in geeigneter Weise zu leiten. Sie sind zu dem Zwecke in diese übersichtliche Zusammenstellung gebracht, die etwa so gekennzeichnet werden kann: Sie stellt eine Art monographischer Zahlenbehandlung dar¹⁾, indem erst die 9, dann die 8 usw. in allen möglichen Zerlegungen auftritt. Eine andere Zusammenstellung würde sich ergeben, wenn man die gleichen Ergebnisse in Betracht zieht, also

$9+5$ ($79+5$, $59+9$. .)	oder $8+5$	$7+5$
$9+6$	$8+6$	$7+6$
$9+7$	$8+7$	$7+7$ usw.
$9+8$	$8+8$	$7+8$
$9+9$	$8+9$	$7+9$

Mit diesen beiden Zusammenstellungen ist nicht gemeint, daß der Unterricht so, wie sie hier stehen, seinen Gang nehmen müsse; das scheint allerdings die Annahme mancher Rechenbuchverfassers zu sein. Vielmehr werden die einzelnen Unterrichtsbeispiele sich ergeben aus der Sachbetrachtung, der psychischen Entwicklung der Kinder und dem reinen Überblick des Lehrers über den Stoff, wobei das Moment der künftigen Entwicklung die Bedingung der Stoff-Überblick die Ausführung, die Sachbetrachtung die Verknüpfung und das höhere Nehmen der Übung darstellt. Dabei ist wiederum nicht ausgeschlossen, daß man auch ganze Teile der Reihen zu Übungszwecken verwendet.

Einem scharfsinnigen Leser mag es vielleicht auffallen, daß wir nicht auch die Zahlen vorlegen lassen, was doch das Allernötigste sein müßte. Wer aber unsere Ausführungen sich recht plastisch vorstellt oder sie praktisch nachprüft, wird merken, daß wir besondere Übungen für die Zerlegung des Zahners gar nicht nötig haben, weil wir ja ununterbrochen dem Zahner — allerdings nicht so oft vorlegen, als vielmehr immer und immer wieder ergänzen lassen. Wer die obigen Reihen in diesem Sinne prüft, wird sehen,

¹⁾ Oder vielmehr das von beiden Gesichtspunkten betriebe Goldmanns der monographischen Methode.

daß wir bei 500 Aufgaben 60 mal die 5 zehnten hatten, 50 mal die 4 usw., aber jedesmal, d. h. 500 mal, die 10. Die Zerlegung des Zehners erfüllt also die notwendige Einteilung mit dem für geübtenen Gerichte.

Sind also mit den angegebenen Beispielen Übungen der zweiten Hilfsoperation, des Vergleichens und Ergänzens, eigentlich schon in genügender Ausdehnung gegeben, so soll doch noch darauf hingewiesen werden, daß sie auch selbständig auftreten können. Einige Beispiele werden hier gelogen: Wir besuchen 6 Kinder an jeder Ballabteilung, hier sind erst 41 Oder: Sind alle Kreidestückchen abgegeben? Zählt sie! 37, Wieviel Kinder waren da? 39, da fehlen noch 2. Oder: Nehmt die Zahlenbilder zur Hand! Wir stellen 17 Soldaten auf, darunter 19. Vergleich! Oder: Vergleich! die 35 mit der 38, die 35 mit der 55, die 12 mit der 60, die 18 mit der 33. Hier können auch die Nachbarn verglichen, was jedes auf seiner Hunderttafel aufzeichnet hat.

Mit der Behandlung der Hilfsoperationen des Zerlegens und Vergleichens haben wir uns eigentlich schon immer in dem Übungsbuch bewegt, das wir in diesem Abschnitt darzustellen beabsichtigen. Doch soll noch an einige Beispiele gerührt werden, in welcher Beziehung die hierher gehörigen Rechenaufgaben typisch sind. Da lassen sich zunächst alle die Beispiele des vorigen Abschnitts — und jedes Beispiel vertritt doch eine große Anzahl gleichartiger und ähnlicher — verwenden, wenn man die entsprechenden größeren Zahlen benutzt. Also das mit dem Blumenstrauß wie das mit der Spardösche, das mit den Soldaten wie das mit dem Nüssen. Auch das Beispiel von der Wäsche ist leicht für größere Zahlen einzurichten. Ähnliche Rechenvorstellungen liefern uns die Sachgebiete der Feuerwehr (Feuerwehrleute, Schutzhunde, Radfahrer kommen und gehen, Feuertöpfe stellen sich dazu...), der Schiffschakalen, des Eisenbahnzuges, des Karussells usw. Besonders reichhaltig ist auch das Würfel-, das Domino-, das Kegel- und das Kartenspiel. Wie bei allen derartigen Rechnungen werden die Operationen in Zahlenworten dargestellt, fast alle solche Spiele können auch wirklich eingeführt werden. In 3 Kinder würfeln in bestimmter Reihe; wer zuerst die 40 erreicht — nicht darüber hinauskommt —, kann bestimmt werden, hat gewonnen. Ebenso, wie von 60 (oder 80 oder 100) ausgegangen, zuerst bei Null oder 1 oder 20 ankommt. In derselben Weise lassen sich Dominozettel verwenden. Natürlich können es auch statt Gruppen von 3 Kindern mehrere weitläufige Abteilungen sein. Es ist das eine Form des Wettrennens, bei der keine zu schnell wegkommt. — Um das Kegel- in ähnlicher Weise zu einem Wettbewerb zu gestalten, braucht man nur 2 Hütchen mit den Ziffern 1 bis 9 — auch

4 und 10 kann man Marschen —, die man von den einzelnen Kindern nach Art der Lotterie aus einem Kasten gezogen werden und als umgedrehte Kegel geben. Zwei Abteilungen geben gegeneinander, jedes Kind darf einmal oder dreimal zogen. Welche wird gewinnen? — Das Kartenspiel wird ganz so gestaltet wie das Würfel- oder Dominospiel, nur daß jetzt auch 7, 8 und 9 als Werte gezählt werden. Mit der 10 und der 11 reicht es zwar (in den nächsten Übungsschritt hinein, aber wir wollen nicht der Pedanterie anheim auf so ungewisse Übungen verzichten, zumal da auch hier „alles fließt“ und kein Martialis die Entwicklung der Zahnraddition von der Zehnraddition trennt.

Auf ein Gebiet, das fast unerschöpflich ist, wäre noch hinzuweisen, das sind die Erlebensmomente der Geldtausche oder des Einkaufs. Jede Bezeichnung ist von Leben, sie gestaltet, die Addition und Subtraktion mehr Sachhaltender zu werden: Apfelsinen, Wasserkress, Hühner, Radieschen, neue Schuhe, Petersilie, Flaschenbier werden beim Grünwarenhändler geholt, Papier, Bleistift, Gummi, Federn, Federhalter, Buntstifte, Rechenzettel, Schreibhefte beim Buchbinder. Darzwischen hinein und die Mutter so und so oft aufrufen, und sie tut es natürlich so, daß „ein schweres Kreuzel“ daraus wird!).

c) Addition und Subtraktion größerer Zahlen.

Für diesen Lehrschritt kann die Addition und Subtraktion reiner Zehner eine Vorstufe bilden, die aber mit einem anschaulichen und handgreiflichen Hilfsmittel, insbesondere der beschriebenen Handertafel, leicht überwunden ist⁷⁾. Es mag dabei darauf hingewiesen werden, daß Aufgaben dieser Art sich auf verschiedene Weise lösen lassen. Die Aufgabe $17+10$ (selbstverständlich zuerst konkretisiert) kann das Kind so lösen, daß es erst den

⁷⁾ Lang macht aus dem Vorstieg, mit Hilfe der Kinder Pyramiden in der Erde zu bauen zu lassen, für alle möglichen Dinge, die in den Gesichtsbereichen der Kinder leben. An dem Beispiel der 1 Pfennig-Pyramide sagt er sehr klug, wie seine Kinder mehr als 100 verschiedene Dinge nach und nach ansetzen wollten, die alle 1 Pf. geholt hätten. Dieser Vorstieg, den wir auch sehr gerne unterstützen, läßt den Hauptgehalt des körperlichen Rechnens, die blinde Wahrnehmung mit Fingerbeachtung und Sparsamkeitsanpassungen schon früh und immer wieder an die Kinder herantreten. Er findet sich in dem trefflichen Werke „Zehner-reiniger Rechenunterricht“ von Umsetzung von selbsttätigen Kindern von allen Seiten der menschlichen Lebens als Hilfsmittel für das Rechenunterricht aller Schulen. Verlag Köhner, Hannover. Es ist nicht ein Aufgabensatz, sondern mehr ein ständiges Rechenbegriff, der seine Aufgaben nicht nach Unterrichtszeiten, sondern nach Bedürfnissen löst.

⁸⁾ Daß wir Anschauung selbstbegreifen werden muß, wenn bei späterer Veranschaulichung irgend eine Unklarheit oder Unschärfe sich bemerkbar, ist ein allgemeines didaktisches Gesetz, das für alle Gebiete, darum natürlich auch für dies hier gilt.

Zehner auffüllen, also $17+8+7$ rechnen; ein anderer kann sagen: Ich rücke die 7 fort, setze die 10 darüber und füge die 7 wieder an, gibt 27. Oder $45-18$. Da nehme ich erst die 5 weg und dann noch 4, bleiben 36. Und das andere: Ich rücke 40 und 4 auseinander, nehme von der 40 die 10 weg, bleiben 30, und die 4 dann gibt 36. Sollen wir hinaufsehen und nur den einen Weg für gut und richtig erklären? Das sei ferne. Gerade durch die Mehrzahl der Wege werden dem Kinde die Beziehungen klarer. Überdies ist es ja dann, wenn mehrere Wege überblickt werden können, nicht schwer, durch das Können Anspruchslos oder durch einen Widerspruch die Richtigkeit und Sicherheit der Wege verglichen zu lassen.

So selbstverständlich das Obige erscheint, so bildet es doch mehrere Fingerzeige für die Behandlung der Additions- und Subtraktionsaufgaben mit größeren Zahlen. Bei 48—15 sind also zwei Möglichkeiten vorhanden: Zuerst auf den Zehner zurückgehen, also zu rechnen $48-8-5$; oder die 48 zuerst zu zerlegen in $40+8$ und nun von der 40 die 10 und von der 8 die 5 abziehen, hier wirklich wegnehmen. Mancher wird geneigt sein, jene erste Form als Zeitersparnswegung anzusehen. Das ist aber nicht richtig, es ist vielmehr eine heilsame Übung, bei der die Zerlegung der 18 in 8 und 10 wieder ins Bewußtsein tritt. Wirkungen für die Entwicklung des Urteils und des Willens sind, wie wir gezeigt haben, Abstraktionen, die man sich selbst erworben hat. Sollen die Kinder fühlen, daß der zweite Weg kürzer ist als der erste, so würde das ein gefühlbetontes Erlebnis sein, während die Normalverfahren des Lehrens gleich kurz- oder langweilig sind, d. h. keine Gefühlsbetonung erfahren.

Einige Beispiele mögen das noch zeigen. $38+24$. Erst den Zehner auffüllen¹⁾: $38+7+10+7$. Das scheint sehr unübersichtlich; es schadet aber nichts, wenn die Kinder so zu rechnen vorschlagen. Um so größer wird die Befriedigung sein, wenn als bequemer Weg gefunden ist: $38+2$ und dazwischen hinein $20+4$; oder $38+20$ (entsprechend der Vorstufe) $=58$, $+4=62$; oder $38+4=42$, $+20=62$.

$56+27$. Erst den Zehner auffüllen: $56+4+23$; oder gliedert wie im vorigen Beispiel $50+6+20+7=70+13=83$. Oder $56+20=76$, $+4+3=83$; oder $56+(8+1)=64$, $+20=84$. Man sieht, hier ist der erste der eleganten Weg und zudem derjenige, der am meisten dem Vergleichen der Teile und Gleichungenhinein entgegenwirkt.

$35-12$. Erst zum Zehner aufsteigen: $35-5-10-2=8$. Hier kann man auch die 17 gleich vom wegnehmen, bleiben von 3

¹⁾ Das würde nach der bisherigen Übung des Kindes am nächsten liegen.

Zehner noch 3, und die Maßende 5 gibt 8. Oder $25 - 19 = 16$, $- 7 = 9$; oder $25 - 7 = 18$, $- 10 = 8$; oder $25 - 15 = 10$, $- 2 = 8$.

69 — 32. Erst vom Zehner zurückgehen: $69 - 8 = 30 - 4 = 26$. Oder $40 - 30$ und $8 - 2 = 30 + 5 = 35$; oder $68 - 30 = 38$, $- 2 = 36$; oder $68 - 2 = 66$, $- 30 = 36$.

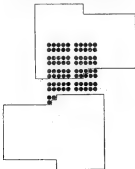
81 — 63. Erst vom Zehner zurückgehen: $81 - 1 = 80$, $- 60 = 20$, $- 4 = 16$. Oder $81 - 60 = 21$, $- 1 = 4 = 16$; oder $81 - 1 = 4 = 76$, $- 60 = 16$; oder $81 - 81 = 0$, $- 4 = 16$.

Allgemein: Wir wollen kein Formalverfahren den Kindern aufzwingen. Nicht darauf kommt es an, daß das Kind einen bestimmten Weg mit Sicherheit gehen lernt — das streben wir an bei der Gewöhnung der Pferde —, sondern daß es seinen Weg allein zu suchen und zu finden weiß. Bei der Menge des Stoffes und der „richtigen Wege“, will sagen der allein gültigen Normalverfahren für die vielen Einzelprobleme, bei der zur Verfügung stehenden Zeit und bei den Köpfen der Kinder kann jeder einzelne Weg gar nicht zu der Mechanisierung gelangen, die ihn vor dem Versagen oder Verwechseln vollkommen schützt. Darum ist es besser, wir rufen das Kind mit den mathematischen Köpfen (Größen- und Operationsgefühlen u. s. w.) an, die es zu jedem selbständigen Wagnisse befähigen. Sehen wir also, daß ein Kind einen ungeschickten Weg einschlägt, so wollen wir beobachten, wie die kleine Seele sich reißt, die Zielvorstellungen und die Zielvorstellung festzuhalten, um langsam zu das Ziel zu gelangen. Stören wir sie nicht! Sie hat noch mit manchem Kämpfe zu kämpfen. Wer hinführen will einem „So kommt“ oder „Falscher Weg!“ würde das Kind nur ins Irre machen und das auch noch die Sicherheit nehmen, wo es gar nicht irren kann. Selbstverständlich ist damit nicht gesagt, daß man die Kinder sich gewöhnen lassen solle an Umwege, im Gegenteil, sie sollen nur so lange Umwege gehen dürfen, bis ihnen ein starker Gefühl für die Unannehmlichkeit des krummen Weges möglich ist. Dann kann man ihnen, wenn sie nicht von selbst darauf kommen, gelegentlich sagen: „Kinder, ich bringe es viel lieber: bei dieser Aufgabe rücke ich mit die 68 von dem Zehner weg ...“ Später gesagt dann schon die Anfrage: Wer kann es anders?

Es dürfte ersichtlich sein, daß es dem Geiste des Kindesgemäßen Rechenunterrichts völlig widerspricht, Regeln einlernen zu lassen, etwa: Erst nehmen wir die Zehner von den Zehnern weg, dann die Einer von den Einern; oder: Erst addieren wir die Einer zu den Einern, dann die Zehner zu den Zehnern; oder gar: Wenn die Einer 10 oder mehr ergeben, machen wir aus den Zehnern noch u. s. w. Aus der Sache und dem Einzelbild heraus muß das Vorhaben wachsen, das am besten und dabei sicher zum Ziel führt. Das Kind aber, das darüber noch nicht verfügt, überblickend und rückend,

das mag zunächst den Weg geben, den es überhieses kann nach der bisherigen Entwicklung seiner Kräfte. Gerade im Gefügen des Vorraths werden diese wachsen; und der Blick auf den Nachbar, der „es anders kann“, wird auch Schwächere dazu anleiten, solche Versuche zu wagen. Einer Aufgabe aber aus zwei Seiten beizukommen können, heißt nichts anderes, als die Herrschaft über sie in ganz erheblichem Maße vergrößern. Sollen wir schärfer sagen: Die Beherrschung wächst im Quadrat der Anzahl der gefundenen Wege — oder ist diese Zahlengabe noch zu klein?

Samtliche Aufgaben dieses Abschnitts können handgreiflich auch an dem anstreichelbaren Hundertertblatt dargestellt werden, wenn man noch ein zweites Deckblatt zu Hilfe nimmt, das so groß und genau so gestaltet wie das erste, aber aus durchsichtigem Papier ist (oder Zelluloid oder Gelsinec). Dieses zweite Deckblatt wird für den oberen Teil der Hunderterttafel benutzt. Bei 25 + 25



zeigt das Kind zuerst von oben her mit dem durchschimmernden Deckblatt die 50, addiert, über die folgenden Ringel hindurch, 5, dann 30 und zuletzt 3 und zeigt von das Ergebnis mit dem ersten Deckblatt. Mit diesen zwei Deckblättern kann man also erst eine in Betracht kommende Zahlgröße abgrenzen, ohne daß damit der Überblick über den anderen Teil des Handsterblasses verloren geht.

Bei der Aufgabe 52-55 decken die Kinder erst mit dem durchschimmernden Blatt von oben her 30 ab und rechnen was 40: 30 und 5 ist 70, und 40 ist beinahe 80, nur drei fehlen dazu. Andere



könnten es anders: Ich denke mir, es wären bloß 20; dann 40, und 70; und die 5 und die 3, sind 77.

Bei der Subtraktion liegt man mit dem undurchsichtigen Deckblatt von unten an. Bei 56-59 wird erst von unten her ab-



gedeckt, so daß nur noch 40 zu sehen sind. Dann werden 20 überblühend „weggenommen“, nämlich erst 5, dann 20, dann 5; und das Ergebnis 20 wird mit dem durchschimmernden Blatt bedeckt.

Bei 58-59 rechnen die Kinder: Wenn ich gleich 20 wegnehme, bleiben 30, so aber 12. Andere: Von 60 nehme ich 30 und von 5 die 4 weg, da bleiben 22.



Dieser ist bei dieser Art der rechnerischen Betätigung der Kinder von Bedeutung: Daß die Operationen von jedem Kinde ausgeführt werden; daß jedes Kind jederzeit die genannte Operation von Anfang bis Ende überblicken und sich darüber aussprechen kann; daß es aber nurmehr genötigt ist, das Hinsetzen und Wegnehmen bloß mit den Augen, überblickend, auszuführen, so daß es nur Anfangs- und Endzahl bestimmt.

Aufgaben für die abstraktionsfreie oder gruppenweise oder bilaterale Betätigung der Kinder brauchen ja nicht gestellt zu werden. Doch sei darauf hingewiesen, daß auch jetzt noch Würfel, Dominosteine und Spielkarten verwendet werden können, wenn man statt des einen gleich zwei oder drei nimmt und durch sie die neue Aufgabe bestimmen läßt.

§ 26. Multiplikation und Division.

Für die Operationen der zweiten Gruppe, das Malnehmen, Teilen, Zerlegen in Faktoren und Einheitszerlegung sind eigentlich schon drei Arten von Vorrichtungen vorhanden: Übungen der Zahlenauffassung und Darstellung in den verschiedensten Formen bis zur ExORhythmisierung, sodann die Übungen der ersten Operationsgruppe (Addition usw.), sodann die Übungen zur Einführung in den Sinn der Multiplikation und der übrigen Operationsformen, wie wir sie S. 146 ff. dargestellt haben. Auf Grund dieser Vorrichtungen ist es nun möglich, die Operationen dieser Gruppe verhältnismäßig leicht zu bewältigen.

Wenn man versucht, das ganze Gebiet zu übersehen, so kommt man zu dem Ergebnis, daß es sich im wesentlichen um das kleine Elementare und seine Umkehrungen handelt, ein Gebiet, von dem jedes rechnermethodische Werk behauptet, daß es die Grundlage und die wichtigste Übungsforn alles Rechnens sei, besonders aber dasjenige, das der Wirtschaftsführung des kleinen und mittleren Haushaltes dient. Wenn man sich nun noch bemüht, diesen Gedanken an den verschiedensten Beispielen nachzuprüfen, so erkennt man, daß stündliche Beispiele, welche das Elementare anwenden, Beispiele sind aus der sogenannten Schlußrechnung; d. h. bei all diesen Aufgaben schließt man von der Einheit auf die Mehrheit oder von der Mehrheit auf die Einheit und bei den zusammengeordneten Formen von der einen Mehrheit auf eine andere. Da nun diese Schlüsse völlig primitiver Natur sind und wir aller Rechenstärke in ihrer logischen Richtigkeit sich aufdrängen, so ist es eigentlich nicht recht verständlich, warum unsere Rechenbücher fast durchgehends die „Schlußrechnung“ etwa im

1. Schlußjahr vorliegen. Selbstverständlich hat man dort bedeutende Fälle und Formen der Schlußrechnung im Auge. Aber man sollte sich Bewußtsein und Absicht auch die einfacheren Formen mit dieser Rechnung bringen. In diesem Sinne ist die Schlußrechnung die Grundlage für die Operationen der zweiten Gruppe. Wir gliedern die in Betracht kommenden Übungen in drei Teilstufen, da wir nochmals zwei Operationsformen zuzurechnen beabsichtigen.

a) Das kleine Einmaleins als Malnehmen und Enthaltensein.

Der Satz 6-6-68 ist eine Abstraktion, der alle jene konkreten Fälle zugrunde liegen, in denen die Einheit 6 mehrfach gesetzt wird. Wir werden nun, wie schon gezeigt wurde, am besten zu dieser Abstraktion führen, indem wir das Kind gewöhnen, jederzeit den konkreten Fall im Hintergrunde des Bewußtseins zu haben. Angesichts der überragenden Bedeutung, welche der kindlichen Wirtschaftsführung als Anwendungsgebiet des Rechnens vor dem anderen Anwendungsgebieten zukommt, können wir die Einstellung des kindlichen Bewußtseins diesem Gebiete zuwenden und die erste und immer wiederkehrende Hauptfrage in den Übungen dieser Stufe so formulieren: Was werden kosten...? An dieser Frage lernen also unsere Kinder das kleine Einmaleins in der Form des Malnehmens. Und neben diese erste Hauptfrage stellt sich sogleich selbst die zweite: Wieviel Stück bekommt man für...? Sie beruht die ständigen Übungen des Enthaltenseins. Beispiele mögen das weiter klären.

Vater, Mutter und 4 Kinder fahren auf der Straßenbahn. Was kostet es? 60 \mathcal{L} . Rechne vor! Das sind 6 Leute, jede Person kostet 10 \mathcal{L} , sind zusammen 60 \mathcal{L} . Hast du merkwürdiges Gefühl? Nein, ich will es anwendig. Rechne, wieviel 4, 3, 2, 1 Personen bezahlen! Macht selber solche Aufgaben!

Übungs: wieviel können für 50 \mathcal{L} fahren! Für 30 \mathcal{L} ? Kann man das auch mit dem Hundertschilling zeigen? Gibt auch selbst solche Aufgaben! Stellt die Geldaufgaben und die Personenaufgaben durcheinander!

Ende hat der Schaffner einen Zehner in die Tasche getan. Wieviel Pfennige geben die? Wer recht schnell rechnen will?, der sagt 9-10 sind 90. Wiederholt! —

¹⁾ Neben dieser Hauptfrage gibt es selbstverständlich noch viele andere Fragen, aber im ersten Jahre wird dem Kinde die Zahl als Einheit am liebsten entstehen müssen.

²⁾ Die Kinder können und wollen dies selbstverständlich; es ist dies nur eine kindliche Äußerung, auf die folgende, auf die heute mathematische Form zu achten.

Das nächste Mal genügt die Aufforderung: Macht Straßenbahn-exempel! Wenige Minuten der Übung genügen für beide Operationen. Dann kann man fortfahren: Der Vater hat einen Brief geschrieben. Hole mir eine Briefmarke, sagt er. 1, bringe gleich 3, damit man ein paar im Hause hat. Was kosten die? Rechnet: $3 \cdot 10 = 30$ \mathcal{A} , 5 solche Briefmarken? Macht selber Briefmarkenaufgaben! Kind: Es gibt auch welche zu 5 \mathcal{A} und zu 3 \mathcal{A} . Lehrer: Stimmt, aber heute braucht der Vater nur rote. Hole für 60 \mathcal{A} ! Für 40 \mathcal{A} ! Rechne vor! Du kannst sagen: 10 steckt in 40 4 mal¹⁾. Wiederhole! Zeige dabei auf deinen Hunderterzettel! Hole nun für 20 \mathcal{A} , für 40 \mathcal{A} ! Rechne vor! Macht selber solche Aufgaben! So wird das Hinschreiben der Zeile gewonnen, oder vielmehr: nach all unseren Vorlesungen ist es schon da. Und wenn doch einmal ein Kind stehen würde oder sonst die geringste Unsicherheit verspürte, dürfte es, müßte es sein Hunderterzettel beschreiben und selbst nachprüfen, auch die Lehrer abkündend. Es dürfte auch Zehepfenniger ablesen und was der passenden Anschauungsaufgaben mehr sind. Aber notwendig zu lernen in dem Sinne, daß die Worte, der Wortlaut eine Stütze für das Gedächtnis wäre, das hat es nicht nötig, das soll hier nicht sein²⁾. —

Heute soll der Postkarten haben, 10 Stück. Kinder: Die kosten 30 \mathcal{A} . 3, 4, 5, 9 Stück! Ach, ich habe ganz vergessen, daß ihr das Hunderterzettel dazu nehmen sollt³⁾. Also zeigt die erste 3, die zweite, die dritte 5 usw. Zeigt, wieviel 4 Postkarten kosten, 8 Postkarten! Rechnet das mit „mal“! $8 \cdot 3 = 24$ \mathcal{A} . Geht auch selber solche Aufgaben! Rechnet vor! Zeigt dazu!

Hole für 30 \mathcal{A} Postkarten! Für 24 \mathcal{A} ! Macht jetzt solche Aufgaben! Rechnet vor! Zeigt dazu! Jetzt beide Aufgaben durcheinander: Wieviel kosten... mal: Wieviel bekommt man...!

Weitere Übungen folgen mit Bleistiften, Federhaltern, Radiergummis, Appellanten, Zitronen usw., die alle 5 \mathcal{A} kosten⁴⁾. Die Kinder stellen die Aufgaben selbst, man muß sie daran gewöhnen. Auch an die beiden Hauptfragen. In dieser Weise werden sich die Übungen oft abspielen können. Bei schwächeren Kindern oder Klassen, die mit ungewohnten Abstraktionen geschränkt haben, wird man noch mechanischer verfahren müssen, z. B.: Hunderterzettel! Heute denken wir uns wieder Fünfeige auf unserem Zettel,

¹⁾ Es ist eine künstliche mathematische Form; später kann sie abgelöst werden von der anderen „es enthält in“...

²⁾ Auf beschreiben werden wir bei passender Gelegenheit kommen.

³⁾ Das hat man natürlich nicht „vergessen“, sondern man versucht von Zeit zu Zeit, ob die Kinder verständig rechnen. Vergl. die Seiten der Lehrerberatung: zu Sagen, zu Schreiben, zu lesen, verständig usw. S. 107.

⁴⁾ Der Schluß geht nach dem letzten und fünften Textabschnitt, die für die Wahl der Beispielsätze durchaus maßgebend sind.

hundert Pünzige. Die erste Apfelsine kostet 5 \mathcal{A} . Zeigt die 5 \mathcal{A} ! Deckt sie zu!¹⁾ Die zweite Apfelsine kostet auch 5 \mathcal{A} . Zeigt diese 5 \mathcal{A} ! Deckt sie auch zu! Erzähle von beiden! Rechne! Rechne mit „mal“. 5-5 \mathcal{A} sind 10 \mathcal{A} usw.

Weiter ist folgendes Hilfsmittel zu empfehlen. Damit die einzelnen Pünze auf dem Hunderttafel noch besser in die Augen fallen, haben wir die voneinander gelötigten Ringe „zusammenklappen“ lassen mit dicken Tiefenstrichen in folgender Weise:



Es ist auch vorgekommen, daß ein Kind die Pünze so zusammenklapte:



Das schadet nichts. Sollten wir darauf dringen, daß nur das alte Zahlbild der Pünz im Bewußtsein bleibe? Das hieße doch, das Wachsen der Kräfte unterbinden.

Vielmehr ist es erwünscht, daß die einzelnen Pünzen sich noch deutlicher voneinander abheben. Dies läßt sich leicht dadurch erreichen, daß wir die zweite Pünz jedes Zehners mit Tiefe oder mit einem dunklen Farbstift²⁾ ausmalen. Beide Mittel zusammen: Bindestriche und farbige Unterscheidung, ergeben dann etwa folgendes Bild auf dem Hunderttafel:



Man wird nicht Kinder und Klassen haben, denen das alles leicht vorkommt. Die kann man gewöhnen lassen, wenn sie sich gegenseitig Aufgaben stellen wie 12-5, 17-5 usw. Wir haben gefunden, daß es auch die Schreibübungen anregt, und daß das ununterbrochene Abklopfen der geschriebenen Einheiten und der Vergleich der Gesamtsumme mit dem Systembild der Zehner und Hunderter so recht erheblichen Reiz ausstrahlt.

Das Pünzrechnen ist natürlich auch in besonderen Übungen mit dem Zehnerrechnen zu vergleichen. 3 von Briefmarken

¹⁾ Mit dem durchgehenden Bindestrich, von dem oben (S. 237) die Rede war.

²⁾ Die gelbenstrichenen Markierungen haben zu hell und zu schwach für den vorliegenden Zweck. Der Bleistift, nach der Methode, wie er auf dem Schreibbuche gebraucht wird, hat eine wesentlich bessere Wirkung.

kosten soviel wie 8 grüne; 3:10—30, 6:5 auch. 4 rote soviel wie 8 grüne; 4:20—40, 8:4 auch. Nach einiger Übung — nicht etwa im ersten Augenblick — entdecken die Kinder: „Das ist aber fein, je einmal Doppelt soviel!“ Und der Lehrer: „Sich einmal so, ob ihr herauskriegt, warum das so ist!“ So schon einfachste mathematische Probleme aus. Das kann nun wieder getübt werden mit einfachen Postkarten und Antwortkarten, mit großen und kleinen Apfelkuchen, mit billigen und teuren Heftstiften uaf. Ebenso tritt überall die Umkehrung hinzu: Wieviel große Apfelkuchen bekommt ihr? Wieviel kleine? Peches vor! 10 steckt in 30 3 mal, aber 5 steckt in 30 6 mal.

In ähnlich grundlegender Weise wie die Zehner- und Fünferreihe wird nun die Zweierreihe behandelt. Ein neuer Buchstabenstempel wird folgendermaßen eingerichtet:



Noch hier werden die beiden Klare mit Tintenstrichen von den Kindern nur 1 verstanden und außerdem die Zwölfe abwechselnd farbig ausgefüllt. Wenn es besser gefällt, der kann auch, statt jede erste 1 weiß zu lassen, sie mit einer andern Farbe versehen. Auch das ganze Buchstet statt der ersten 2 oder 4 Zehner in dieser Weise zu zerlegen und auseinander zu setzten, soll den Kindern unbenommen sein. Es wird nicht verlangt, es wird aber erst recht nicht verboten, es wird erlaubt denen, die dem Sachverste führen, daß sie die erste oder daß sie auch die zweite Zweierreihe betrachten. Man wird staunen, wie bald 7-jährige Kinder heraus haben, daß z. B. 36:3 12 ergibt. Sie lesen es ab, aber das schadet nicht, es nützt vielmehr; sie sollen es noch gar nicht auswendig wissen, sie sollen vielmehr mit der 36 und der 72 eine Raumvorstellung verbinden. Zeit genug werden ihnen auch die Beziehungen dieser beiden Zahlen bekannt und geübt werden. Und warum soll man auf die Lost und den Würfeler verzichten, der hilft, wenn einige weitergehen „Alles“! So wird der Einscheit der 8 gelernt weit über die 16 hinaus, aber ohne jedes „Memorieren“, ohne jedes „Ausprägen“, ohne jene gewaltsame Befestigung, die auf der Klang- und Sprachbewegungsverstellung allein bauen zu können verneint. Es prägt sich vielmehr in immer wiederholter Anschauung von selbst ein. Selbstverständlich wird alles konkretisiert. 3.3 kostet also 1 Regen Papier, 1 dicker Luchschel, 1 Müchschel, 1 altherrnort Brotchen, 1 Linsenblatt, 1 großer Briefumschlag, 1 Schokoladenkugeln für den Christbaum usw.

Für die Zweierreihe wie für die übrigen gilt immer wieder das gleiche: 1. Ein Kind, das nicht nach dem Ergebnis hat, darf nicht nur, sondern es muß — aber ja nicht etwa als Strafe! — das Zettel fragen und genau nachsehen. Das Arbeiten ohne Zettel wird nur selten gestattet, die ihre Sicherheit nachgewiesen haben. 2. Überhaupt sind immer wieder Nachsetzungen einzustreuen, die durch Stricken erfolgen.

In die Zweierreihe schließen wir die Viererreihe an. Wenn man den Hunderterstel mit den Zweien beaufen will, so werden auch noch zwei benachbarte Zweien mit Strichen verbunden, so daß folgendes Bild entsteht:



Will man lieber einen neuen Zettel nehmen, so empfiehlt es sich, ihn gleich für die Fierer- und Achterreihe einzurichten, etwa so, daß man die Fieren so verbindet läßt:



Die nach rechts oder die nach links offenen Fieren können dann auch noch fertig ausgestaltet werden. Wenn man die Fieren beispielsweise weiß und gelb oder weiß und hellgrün nimmt und gegeneinander abwechselnd, so kann man sie nicht nur zu Achsen schließen, sondern jeder zweiten Achse dunklere Fäden geben lassen, etwa blau und schwarz. Die Achterreihe würde dann folgendes Bild bekommen:



Die ausgestreckten Fingerstriche zeigen an, daß noch ein Stück an der betreffenden Acht fehlt⁵⁾.

Hier wie überall auf diesem Gebiet werden die Übungen um die beiden Fragen gruppiert: Wieviel werden kosten...? und: Wieviel bekommt man für...? Hier wie überall werden konkrete Sachverhältnisse unter dem Zahlenbilden gedacht: für 4 $\frac{1}{2}$ bekommt man 1 Apfelzine, 1 Bündel Radierchen, 1 Federhalter, 1 Pfefferkuchen, 1 Amerikaser... 8 $\frac{1}{2}$ kostet ebenfalls 1 Apfelzine, 1 Stück Nag, 1 Flasche Bier, 1 Notizbuch, 1 Pfefferkuchen usw.

Glaubt man, mit der Übung der Achterreihe so weit fertig zu sein, daß man weitergehen kann, dann empfiehlt es sich zunächst, wiederholt die Vierer- und Achterreihe, die Zweier- und Viererreihe, endlich die Zweier-, Vierer- und Achterreihe miteinander in Beziehung zu setzen: $5 \cdot 5 = 25$, $10 \cdot 4$ auch, $20 \cdot 2$ auch; $3 \cdot 8 = 24$, $6 \cdot 4$ auch, $12 \cdot 2$ auch... Für 88 $\frac{1}{2}$ bekommt man 4 große Apfelzinen zu 8 $\frac{1}{2}$, oder 8 kleine zu 4 $\frac{1}{2}$ — „oder 16 halbe“, sagte ein Kind schneidhaft hinzu⁶⁾.

Ein weiteres Handrechenmittel dient der Dreier- und Sechserreihe, von denen wie bisher jede erst eine Zeile für sich allein geübt wird, dann mit der andern in Beziehung tritt. Verbindung und fertige Gliederung läßt folgendes Bild der Dreierreihe entstehen:



⁵⁾ Nachdem wir die Achterreihe in dem Maße behandelt haben, nachfolgt die Kinder völlig selbstständig die Zwanzigerreihe: „Die erste, dritte und fünfte 20 wird von der 8 nicht voll gemacht, jede stellt die Hände aus und berechnet noch eine 4.“ „Die zweite und vierte 20 geht gerade vor 8, die sind richtig, die brauchen nichts mehr.“ Die sechste 8 stellt es auch in Ordnung, bei 120 geht es, das ist 12 \cdot 10.“ Schließlich: „Die sechszehn Fehrer passen niemals vor 8, auf das ganze Mittelfeld von oben bis unten streichen sie die Hände aus.“ Kinder, die solche Redensarten selbst setzen, stehen auf dem rechten Wege zu mathematischen Fortschritten hin.

⁶⁾ „Ja, wenn...“ entgegnete ich, und andere Kinder bestärkten sich, das Bestreben: „wenn der Quotientenkleiner halbe verstanden.“ Und andere bestärkten: „Aber richtig wäre es ja.“ und ich stimmte ganz zu. Ich sollte ihnen damit Gelegenheit zu haben: der Beziehung von Wirklichkeitszahlen und der Beziehung zu mathematischen Fortschritten, die sich ganz nach einem über die Wirklichkeit hinwegsetzen.

Die Verbindung zur Sechserreihe kann ähnlich der Achterreihe gestaltet werden,



so daß die Beziehung zur Dosierrreihe leicht hervorgeht. Sie kann aber auch diese Gestalt annehmen, die leichter zu überblicken ist:



Endlich wird sich noch je ein Zettel nötig machen für die Siebener- und Neunerreihe. Diese gestaltet sich so:



Die Rechenreife aber nimmt mit Vorteil zwei Formen an¹⁾:



Beide Formen fordern geradezu zum Anschauen von Beziehungen heraus, und die Kinder waren — nachdem sie zunächst die Zettel fertig gestellt hatten — freudig überrascht über den „finken Zettel“. Sie überboten sich eifriglich darin, Beziehungen zu finden; z. B. bei jener ersten Form: „Die weißen Hais nehmen gerade ab: 3, 7, 8, 3, 1.“ Warum wohl? „Die weißen rechts nehmen gerade zu: 2, 4, 4, 8.“ In der Mitte ist es umgekehrt.“ Wer kann herausfinden, warum das so sein muß? ... Oder bei der zweiten Form: „Hier sieht man, wie eigentlich an jeder 10 bloß eine fehlt.“ „Da kann man denken, 4-9 wäre ja nahe 40, bloß die 4 schwarzen weg, 36.“ Manche Leser wird uns verstehen, wenn wir angesichts solcher Erfahrungen sagen, wir streben nach mathematischer Bildung.

Wenn die einzelnen Reihen so in bedächtiger Fortschritt bewirkt sind, ist es nötig, auch solche Reihen im Wechsel zu üben, die weniger Berührungspunkte miteinander haben; z. B.: Heute rechnen wir mit Zitronen, erst mit kleinen zu 4 1/2 das Stück, nun mit größeren zu 7 1/2 ... Zeigt, wo die großen und kleinen zusammenpassen! ... Heute rechnen wir mit großen und kleinen Briefmarken usw.

Weiter kann sich die Rechenfertigkeit der Kinder auch andere Dingen anwenden, die sich zur Multiplikation eignen. Man wolle

¹⁾ Da mit beiden so sparsam, geben wir jedem Kind einen vor Rechenreife, gestalten aber zur verschiedenen Ausführung vierer nebeneinander stehender Kinder; also von beiden sollte die erste, das andere die zweite Form bestehen. Warum das Rechenreife wurde je nachdem für eine oder andere sehr leicht gemacht. Durch geeigneten Anstoß der Rechenreife wird sich sehr leicht mit Zetteln sparen, falls man dem geneigt ist. Das Kind berechnet z. B. das mit Zetteln und Rechenreife, sein Handlar den mit Zetteln und Anstoß. Freilich ist es ein Mistake, aber jeder Fortschritt ist besser als nichts.

sich aber helfen zur Aufgabe wie: 1 Kegelstumpf hat 9 Kegel, 8 Kegelstübe wieviel? Diese Aufgabe dürfte höchstens im Kragbüchse am Platz sein, wo die fertiggestellten Kegel zu neu in Schachteln verpackt werden müssen. Die meisten der übrigen deutschen Kinder werden wohl nie Veranlassung haben, sich 8 Kegelstübe vorzustellen oder nach der dabei in Betracht kommenden Kegelschl. zu fragen. Ebenso zweifelhaft ist es, die Beine von 7 Fliegen zu berechnen. Wer sich 7 Fliegen vorstellt, kann nur mit größter Anstrengung an die 48 Beine denken. Und gar in der Anzahl der Beine (was soll mit diesen Beinen geschehen?) ein mathematisches Problem zu sehen, wie es deutlich doch in jeder Preisangebots zu erkennen ist, das ist unangenehm. Kein Mensch fragt im Leben danach, wieviel Beine 4 Spinnen haben. Man ist völlig zufrieden, wenn man weiß, daß jede 8 hat. Ebenso ist es mit den 7 „Blüthen“ des Bodenkulturbauers, mit den 5 Stühlen eines Stimmers und ähnlichen gerechneten Aufgaben. Sie bieten vermeintlich einen anschaulichen Hintergrund oder eine „Anwendung“, sie sind aber keines von beiden, sondern weil sie den Problemschaltz enthalten — mathematische Spiegelscheitern.

Völlig verkehrt sind auch Aufgaben wie die: Ein Brotchen kostet 3 A. Wieviel Brotchen kannst du dir für 2, 15, 22, 18, 15, 80 A kaufen? Denn jeder der in Betracht kommenden Kinder hat schon für 3 A 2 Brotchen holen müssen, kann also schwerlich ausschließen, daß man für 15 A 5 Brotchen bekommt.

Bruchstücke dagegen sind solche wie: „Wieviel Tage sind 4 Wochen? Das „rechnet“ auch zweifellos noch der Erwachsene aus, zumal, wenn er 4 Wochen mit dem laufenden Monate zu vergleichen beschäftigt. Ebenso die Umkehrung: Noch 40 Tage; wieviel Wochen müssen wir da warten? u. v. a.

Mit diesen wenigen Beispielen — es gäbe noch tatsächlich so Guter: Stille diese Andeutungen — wollen wir nur sagen, daß die arithmetische Grundlage der Einkaufslehre nicht Plausibilitätsprinzip sein sollte, sondern solche Aufgaben, die im Zusammenhang mit dem wirklichen Leben erkennen lassen. Diese sind gefühlbetont, jene mathematische Hopfen! jedoch nicht. Darum könnten wir auch als Hauptfragen — nicht als starre — jene beidenustellen: Wieviel kosten...? und: Wieviel Stück bekommt man für...?

Und der Rückblick auf das Verfahren selbst zeigt anschauliche überflüssige Gewinnung der Einkaufslehre, absehbare Nach-

¹⁾ Die Aufgabe ist natürlich einem viel geübteren Rechenbeobachter zuzuschreiben. Es schließt fast, als stünde die Schule von der Gewinnung und von dem Systemen vieler von Leben keine Kenntnisse abzuholen.

prüfen, Gelbafgeworden durch wiederholten Umgang und Vergleich, Aufgabebilden selbsts der Kinder.

h) Das kleine Einmaleins als Verteilen.

Dieser Aufgaben bringt uns eigentlich dieser Abschnitt: die Operation des Verteilens, angewendet auf Zahlen, ein nochmaliges Durchlaufen der gewonnenen Einmaleinsreihen, und endlich ein Weiterführen der Schlußrechnung. Hier lassen sich nicht ein paar Hauptfragen von der überragenden Bedeutung der heißen vorigen forschbaren. Denn das Verteilen von Nüssen und anderen Kinderdingen ist bald erledigt, und das Verteilen von Dividenden geht die Kinder noch nichts an. Jedem andere bloße Verteilen ist aber entweder selten oder nicht lebenswahr. Dagegen kommt das Verteilen in Verbindung mit dem Malnehmen oder in Verbindung mit dem Enthaltensein wiederum durchaus lebenswahr vor. Aus diesen beiden Verbindungen besteht nämlich die gesamte Schlußrechnung:

Für 3 Äpfelchen hat mein Bruder 18 A gezahlt, ich möchte meiner Mutter 5 solche vom Geburtstag schenken — das ist das Elementarbeispiel sowohl für die Schlußrechnung als auch für das Verteilen in Verbindung mit dem Malnehmen. Oder: 18 A hat mein Bruder für 3 solche Äpfelchen gezahlt; wieviel könnte ich mir kaufen für meine 40 A ? Das Beispiel bezeichnet die Verbindung des Verteilens mit dem Enthaltensein. Demnach können die in Betracht kommenden wichtigeren Fragen so ausgedrückt werden: Wieviel kosten die Stücke, die ich wünsche? und: Wieviel Stück kann ich für mein Geld haben?

10 Stück Nektar hat die Mutter mitgebracht für 50 A . Da kommt die Großmutter zu Besuch. Schnell, hole auch 4 Stück! Rechnet! Kinder: Wenn die 10 Stück 50 A gekostet haben, so kostet 1 Stück 5 A ?, 4 Stück kosten dann 20 A . Ein anderes Kind: „Ja, wenn man aber bloß 4 Stück kauft, wird der Großvaterbater wohl mehr verlangen.“ Lehrer: „Du hast recht; darum sagt die Mutter dann: Sage, ich hätte neben von ihm schon 10 Stück mitgebracht.“ Kind: „Dann hat sie eigentlich 14 gekauft.“

10 Äpfelchen kosten 50 A , wieviel 2? Rechnet vor! 10 Weinböcher kosten 80 A , ich brauche aber nur 2; rechnet! Die würden sicher 10 A kosten. Aber wenn sich einige Kinder zusammensetzen und einer kauft für sie gleich 10 Stück, dann kostet jedes nur 8 A , und 2 Stück kosten dann 16 A ; dann hat jedes Kind 8 A geparkt. — Macht selbst solche Aufgaben, die mit 10 anfangen!

§ Die mathematische Form: ich will „da 10 durch 10 teilen“ empfehlen wie etwas anzukerkennen, denn bei der Zerlegung, will das Teilen in wenige Teile die Kinder zu größerer Regelmäßigkeit des Verteilens nötigt.

Nun eine andere Art: 10 Zitronen kosten 70.5, heute für 20.5! Nachher viel! Wenn 10 Zitronen 70.5 kosten, dann kostet eine 7.5; für 30.5 müßte ich dann 4 Stück bekommen und 2.5 zurück. Es kann aber sein, daß der Kaufmann sagt: Wenn du noch 4 kauft, kosten sie 30.5? Macht selbst solche Aufgaben! Eine Zeilung wollen wir fügen: Wieviel kosten die, die ich haben will? Dann eine Zeilung: Wieviel bekomme ich für mein Geld?

In solcher Weise werden die Elementarreihen durchgenommen. Dies kann im ganzen in derselben Weise geschehen, wie es der vorige Abschnitt gezeigt hat. Auch hier kann die Reihenfolge eingegeben werden: 10, 3, 2, 4, 5, 3, 4, 9, 7. Der nahe liegenden Voraussetzung, über die einzelnen Übungsaufgaben nach hinwzupragen, wolle man widersprechen. Auch dieses Teilen bedarf des ständigen Vorbehalts, ob der Zustand einiger Bekanntheit eintritt. Glaubt man, eine Reihe werde vollkommen beherrscht, so möge man lieber die Sachgebiete wechseln. Man kann hierzu die gesamte Schlussrechnung benutzen, soweit sie sich im Gebiete des kleinen Elementars bewegt und direkte Verhältnisse zeigt.

Besondere Betonung wird aber hier die Herausarbeitung der inneren Beziehungen zwischen den einzelnen Aufgaben und Aufgabengruppen erfahren. Diejenigen Zusammenstellungen, wo man von der Angabe 10 n auf das Ziel 5 n gelangt, werden den Kindern nach einzuzeichnen, z. B. 10 Eier kosten 80.5, wieviel 5? Die Hälfte. Denselben Wert aber haben Verbindungen wie 10 n und 5 n, 6 n und 4 n, 8 n und 4 n, 10 n und 11 n, 4 n und 3 n, 7 n und 8 n, 7 n und 8 n usw., d. h. alle die nebeneinander liegenden Produkte, von denen sich immer das geruchte an das gegebene anlehnt; also 7 Bleistifte kosten 55.5; 4 wieviel? einen Pfater weniger. 9 solche Süßes! einen Pfater weniger als 10, nämlich 45.5. Außerdem sind diese Übungen dahin zu erweitern und zu vertiefen, daß auch bei gegebener Einheit so verfahren werden kann. Die bekanntesten Beispiele hierfür finden sich im Gebiete des großen Elementars. Aber nichts hindert uns doch, dahin Anlässe zu untersuchen, im Gegenteil, das Kraftausdrücken und das Vorwärtstreiben wird ständig angeregt; z. B. nachdem die vorigen Übungen vorgegeben sind: 5 · 12? Kind: 10 · 12 = 120, die Hälfte ist 60, 12 mehr ist 72. Natürlich geht das nach einiger Übung bald viel schneller, als man es hier lesen kann. Wir gehen in dieser Richtung noch weiter und helfen zusammenstellen: 10 n und 5 n, 10 n und 12 n, 3 n und 7 n, 6 n und 3 n; z. B. denkt auch, ihr könnt 3 · 8 verpassen und selbst es anrechnen: 10 · 8 = 80, — 10 = 70. Macht

§ 2a läßt sich dem System, wie dem Leben gerecht werden in der mathematischen Behandlung der Wirklichkeit.

selbst solche Aufgaben! $7 \cdot 14$! $5 \cdot 12 =$ die Hälfte von $140 = 70$, und 28 ist 56. Ja, die Kinder verfolgen auch sonst diese Richtung selbständig weiter und rechnen $27 \cdot 3$ so: $30 \cdot 3 = 90$, 3 Dingen davon weg sind 81. Das bedeutet also Wiederholung des Einzelreins, aber auch schon eine Erweiterung und Vertiefung der Selbstrechnung in dem Sinne, daß von der Mehrheit wohl auf die Einheit zurückgegangen wird, daß aber dann nicht immer mit der neuen Mehrheit zusammengekommen werden muß, sondern je nach Lage des Falles das Multiplizieren durch Addieren oder Subtrahieren ersetzt werden kann, wenn dies die Schnelligkeit und Sicherheit der Rechnung erhöht.

In dieser Richtung kommt noch eine andere Gruppe von Zusammenstellungen in Betracht: $9 \cdot 4$ und $3 \cdot 4$, $4 \cdot 7$ und $8 \cdot 7$, $8 \cdot 6$ und $4 \cdot 6$ nebeneinander gestellt in derselben Aufgabe, so ähnlich wie bei dem obigen Beispiel $10 \cdot n$ und $5 \cdot n$ (das aber wegen seiner größeren Bedeutung vorausgenommen werden muß). Hier handelt es sich darum, daß die Kinder nicht über die wirkliche Einheit schlafen lassen, sondern eine höhere Einheit suchen. Gelegentliches Vornehmen genügt dabei; entwickelt aber mehr schätlich. Nach den angegebenen Vorbeugen muß die Anregung geschehen: Wer kann es anders? noch anders? oder: Wer kann es strecken? Eigene Entdeckungen der Kinder müssen diese Zusammenstellungen werden, wenn sie die erwünschte Wirkung haben sollen. Weitere Übungen in dieser Richtung bieten die Zusammenstellungen $5 \cdot n$ und $4 \cdot n$, $12 \cdot n$ und $9 \cdot n$, $10 \cdot n$ und $4 \cdot n$ usw.

Die Benutzung des Hundertertels tritt schon merklich zurück. Wo man förmlich Unsicherheit oder Wortverwirren bemerkt, da ist er am Platze. Seine Verwendung gestaltet sich dann etwa so: 24 geteilt durch 3! Das Kind sieht, daß es 30 leicht durch 3 teilen, d. h. in 3 Teile zerlegen könnte, und schließt aus den bisherigen Erfahrungen mit dem Hundertertel, daß bei der Verteilung von 24 auf jeden solchen Teil etwas weniger als 10 kommen müsse. Ein Probieren mit 9 und 8 ergibt 3²). $7 \cdot 8$ kann dann auf dem Hundertertel ausgemacht werden, der die Achtstunde enthält. So unmittelbar aus jenen Teilen und deren Ausmaßen ist, so notwendig ist es doch für diejenigen Kinder, die die betreffenden Assoziationen noch nicht in Raumvorstellungen gebildet haben²⁾. Gerade die Unvollständigkeit des Verfahrens ist was eine wirksame

¹⁾ Dieser Vorgang spielt sich nun in den meisten Fällen nur halbwegs ab und wird nach und nach selbst so vollständig überwiegt, daß der Bruchteil, der bei einem Kinde bemerkt, genügt ist, das Kind für beschriebt zu halten. Das öfter Aussehen, die 24 im Mikrometer beschreibt, dieses Ausstellungs-vorgang.

²⁾ Wir wissen ganz hinlänglich, daß das Verfahren nur in Ausnahmefällen nötig war.

Geld für diese Arbeit. Auch das schwache Kind strebt danach, diese Unzufriedenheit zu umgehen und macht die in Betracht kommende Assoziation oft selber sich zu eigen, als man erwartet²⁾.

Eine besondere Verwendung findet der Hunderttafel in diesem Abschnitt nicht nur bei den Schwächeren, sondern gerade auch bei den Begabteren. Sie rechnen die Zweierreihe ja nicht nur bis nur 20 oder 40; sie führen vielmehr ständliche Reihen vollständig bis zur 100 fort und sehr oft und mit großer Freude auch darüber hinaus. Man läßt sie gewöhnen, prüft gelegentlich, ob der „Belühigungsbuch“ verbracht werden kann, und hilft zurück, wo die Wünsche des Kindes sein Können übersteigen. Immer gilt: Wer seine Sache gut macht, darf vorwärts gehen. Dem wird man solchen Kindern auch eine gelegentliche Anregung mitzuteilen lassen: 3 Stück amerikanische Äpfel kosten 20.5; wieviel würden 5 kosten? Oder die ungepöngestrzte Art: 8 Stück Mandarinen sollen 20.5 gekostet haben; wieviel bei diesem Preise 23 Stück? Oder beide Aufgabenarten im Sinne unserer zweiten Frage: 3 solche kleinere amerikanische Äpfel kosten 20.5; wieviel bekäme ich für 1.45? Wieviel von jenen Mandarinen bekäme ich für 70.5? Solche Aufgaben sind mit dem Hunderttafel nicht nur zu lösen, sondern auch oft sehr leicht zu lösen.

c) Das kleine Einmaleins als Vorläufer in Faktoren.

Das ist eine zwar nicht unbedingt notwendige aber doch recht wirkungsvolle Ergänzung der bis dahin angeführten Übungen. Ebenso wie wir bei den anderen Operationen die Kinder auf die Hauptfragen einlassen (Wieviel kosten ... Stück? Wieviel bekomme man für ... 5?), Wieviel kostet die von mir gewünschte Stückzahl? Wieviel bekomme ich für mein Geld?), so läßt sich auch hier in Beziehung auf das Hauptgebiet des Rechnens, das der häuslichen Wirtschaftsführung, eine Hauptfrage formulieren: Wie kann ich verschiedene einkaufen? Z. B. wie kann ich Äpfelchen einkaufen bei 48.5? 4 Stück zu 2 oder 3 Stück zu 6 oder 12 Stück zu 4 oder 4 ganz große zu 12.5. Ähnliche Aufgaben bilden die Kinder bald selbst.

Ein wesentlicher Fortschritt besteht nun darin, daß man Produkte und Summen gestaltet: Für 20.5 bekomme ich 10 Stück zu 2, 7 Stück zu 4 und 2.5 zurück, 6 Stück zu 3, 2 Stück zu 6, 4 Stück zu 7 und 2.5 zurück, 3 Stück zu 8 und 4.5 wieder usw. Ein weiterer Fortschritt läßt auch Differenzen zu: Für 75.5

²⁾ Teilweise ist der Vorgang bereits zu berücksichtigen; die Hauptbedeutung — die Selbstverpflichtungen — ist bei der Assoziationsarbeit erst ein Ergebnis, während die Stufe völliger Kopplung nur zunehmend herantritt.

bekomme ich 12 Stück zu 8 und 1 $\frac{1}{2}$ Meist, 10 Stück zu 7 und 2 $\frac{1}{2}$ Meisten zurück, 9 Stück zu 6 oder 8 Stück zu 5 und je nachdem 1 $\frac{1}{2}$ zurück, 7 Stück zu 10 und 2 $\frac{1}{2}$ Meisten Rest, 6 Stück zu 11 und 7 $\frac{1}{2}$ Meisten Rest oder 7 Stück zu 11, wenn ich noch 4 $\frac{1}{2}$ drauflege, 6 Stück zu 12 und 1 $\frac{1}{2}$ Rest; will ich 6 Stück zu 13 haben, so muß ich noch 2 $\frac{1}{2}$ drauflegen, bei 5 Stück zu 15 noch 2 $\frac{1}{2}$, bei 3 Stück zu 20 ebenfalls.

Auf eine besondere Übung in dieser Gruppe sei noch hingewiesen. Man wird hier auch das Problem behandeln, warum $4 \cdot 9$ 36 sei und $7 \cdot 4$ noch. Für diesen Zweck empfiehlt es sich, daß man als Anschauungsmittel⁷⁾ einige Tafeln herstellt, welche ein paar Beispiele in nicht-rhythmischer Darstellung enthalten, wie etwa das folgende, das der $4 \cdot 2$ und $8 \cdot 4$ entspricht.



Selbstverständlich läßt sich die Sache auch so gestalten, daß man in jeder Stunde ein anderes passendes Beispiel nach an die Wandtafel stellt. Das hat noch den Vorteil, daß die Kinder die Entstehung sehen, und wenn man ihre Aufmerksamkeit beispielsweise den waagrechten Reihen lenkt, sagen können: einmal 2, noch noch einmal 2 usw. Diese Wirkung kann durch eingeschaltete Pausen noch erhöht werden. Wenn man aus den 4 Reuten von 2 Vierern machen will, muß man die Tafel vor den Augen der Kinder um 90° drehen, so daß die waagrechten Reihen von 2 Vierern enthalten.



Ohne diese Drehung glauben es die Kinder dem Lehrer ja auch; es ist aber interessant, die Freude zu bemerken, wenn das Kind infolge des Drehens zu der Überzeugung kommt, daß $4 \cdot 2$ wirklich $2 \cdot 4$ sein müsse.

Auch mit wirklichem Gelde — 2 Rollen mit Klappmünzstücken.

⁷⁾ Nicht als Schillingstafel für die Hand der Kinder! Es kommt hier nur eine einmal zu gewinnende Anschauung, nicht eine in eigentlicher Übung zu erwerbende Apperzeption in Betracht.

reichen weit — haben die Kinder selbst gruppenweise solche Übungen vorgenommen. Darstellungen, wie die in dem ersten Beispielreihen dieses Abschnittes gezeigt wurden, ergaben sich ganz von selbst. An der dargestellten 26 löst sich die unterste 2 in 2 Dreien zerlegen, die man dann als Dreierreihen an der einen Sechsecke angliedern kann. Es zeigt sich, daß III auch aus 12-2 besteht, und, wenn man an die andere Seite des Tisches tritt — das Kind legt eine Teilung Wert auf diese Voraussetzung — auch aus 3-12 auf.

Der Handstrkerzettel, an dem auch die eingangs dargestellten Zerlegungszhungen vorgenommen werden können, besaß, besonders im Sinne einer Nachprüfung, ebenfalls noch eine andere Übung, nämlich die Umwandlung der Produkte von der zuletzt dargestellten Form der rhythmisierten Reihen in Systemzahlen. An zwei Beispielen soll das kurz gezeigt werden. Wir decken z. B. 4-8 ab in dieser Form:



Dann benutzen wir soweit als möglich unsere Deckplatte; nur für das Abdecken der rechts oben befindlichen 4 Ringe brauchen wir unser durchscheinendes Abdeckblatt oder in Ermangelung dessen ein Stück dünnes Papier, durch das wir hindurchsehen, oder eine Zelluloidplatte oder eine Glascheibe²⁾. Diese Art der Darstellung ist recht wirkungsvoll. Die Kinder erkennen selbst, daß die letzte Reihe vorhanden  nach rechts hinauf unter das dünnere Papier rücken können, daß dann der 2. Zeiler voll wäre, und daß dann das bekannte Zahlbild der 28 zu sehen sein würde. Genau so kann das Abdecken bei 6-7 vor sich gehen.



Wenn man sich die beiden vorhandenen Sechsen hinaufgedrckt denkt, erscheint das bekannte Zahlbild der 28, 9-4, 8-3 usw. be-

²⁾ Als photographische Platten eignen sich ganz gut auch. Reflektierungen wegen schwarzer Teilungen benutzt man nicht zu liegen.

handelt man in der Umkehrung, indem man die Vierer, Dreier usw. als entsprechende Reihen erscheinen läßt.

Das gesamte Kindesleben läßt sich auf diese Weise darstellen. Das geschieht mit immer größerem Einblick in die Zahlen, mit immer größerem mathematischen Gewinne.

Einige allgemeine Bemerkungen mögen diesem Teil über die Gewinnung der Operationen schließen.

1. Grundsätzlich gilt, daß jedes Rechenergebnis im Überblick gewonnen, aber sühnd nachgeprüft wird. Jenes Überblicken soll die durch Rechenproben angedeuteten Zahlproben immer sicherer und schneller zu erfassen suchen; das Abzählen, das nach und nach in Zehner-, ja in Zweizeiger- und Hundertserhythmen erfolgt, übernimmt die Kontrolle und die Gewähr für die Richtigkeit jenes Überblickens.

2. Der innere Werdegang jeder Übung gestaltet sich in 4 Stufen so, daß sie zuerst an wirklichen Dingen, dann an dinglichen Symbolen, dann an Zahlensymbolen (Zählhilfen usw.) angeführt wird, und daß endlich der Vorgang an den Zahlensymbolen nur vorgestellt wird. Es braucht dabei kaum betont zu werden, daß Anfangs die erste dieser 4 Stufen stark hervortritt, während etwas später die zweite das Hauptgewicht hat. Die darauf folgende Zeit, in der die dritte Stufe die herrschende Stellung einnimmt, ist beinahe typisch für diese Übungen, indem, als alle Rechenvorgänge angeführt werden an den Zahlensymbolen. Falls die geringste Unsicherheit sich zeigt, wird sofort zur Ausführung mit wirklichen Dingen oder dinglichen Symbolen zurückgekehrt. Andererseits wird nun immer öfter der Versuch gemacht, eine Anzahl Übungsaufgaben nur vorstellend lösen zu lassen. Es bedarf wohl kaum eines Hinweises, daß hierbei nicht die Wortvorstellung, auch nicht die Ziffernvorstellung gemeint ist, sondern daß der Vorgang an den vorgestellten Zahlensymbolen sich vollzieht.

3. Stetliche Aufgaben sollen gegenständlich aufgeführt und gedacht werden. Es wird also immer mit Pfenzen, Äpfeln, Federn, Briefmarken usw. gerechnet, auch dann, wenn die Benennung wegfällt. Wir lassen die Benennung, wie bald absichtlich weg, stand zum Zwecke der Zahlenparade, dann auch, um die Allgemeingültigkeit unserer Rechnungen im Bewußtsein der Kinder anzubahnen. Dies Anbahnen ist selbstverständlich keine vollendete Abstraktion. Wir sind uns dessen bewußt, daß zur vollendeten Abstraktion ein langer Erfahrungs- und Übungsweg führt. Daraus läßt die Sachanstellung unseren Kindern schwach im Bewußtsein, auch dann, wenn wir die Benennung weglassen.

Darum gestehen wir die Kinder, jederzeit in der Lage zu sein, die vorgelesene Benennung hinzuzufügen. War das verstanden, so wird die Schale in sich selbst zerlegen müssen, wenn einige seiner Kinder später kleine Rechnen mit mehreren Maßzahlen mit erschreckender Regelmäßigkeit die Sorten verwechseln. Zu diesem Zwecke ist es weiter nötig, die Kinder darin zu üben, daß sie zu irgend welcher Aufgabe, die ihnen nur in Zahlen entgegentritt, selbst eine geeignete Benennung, eine passende Sachlage sich vorstellen.

4. Von Anfang an wird darauf gehalten, daß die Kinder selbst Aufgaben bilden, und zwar nicht nur so, daß einige befähigte Kinder dazu gelegentlich mit betriehten werden, sondern so, daß die ganze Klasse im gegenseitigen Stellen der Aufgaben geübt wird. Das kann paarweise geschehen oder gruppenweise, oder so, daß die Mädchen den Jungen, die eine Seite der anderen Seite Aufgaben stellt, wobei die eine Rand, die andere kontrollierend tätig ist.

4. Abschnitt des Lehrverfahrens:

Die Fortführung der Operationen im Bereiche der Systemzahlen.

§ 27. Die Aufgabe der Stufe.

Die Fortführung der Operationen in einem weiteren Zahlenraum und mit Betoning der verschiedenen Systemeinheiten scheint keine wesentlich neue Aufgabe zu stellen, sondern sich mit der weiteren Bearbeitung derjenigen Aufgaben zu begnügen, welche in den bisherigen Lehrabschnitten schon zur Behandlung standen. Daß eben nach und nach mit größeren Zahlen gearbeitet wird, darin glaubt man zur verständnismäßig geringe, vor allem aber keine neuen Schwierigkeiten sehen zu dürfen. Denn wenn die Operationen an den Zahlenmaßen des ersten Hundertens ausgeführt werden können, so macht es für ein Kind, das einen verständigen Rechenunterricht genommen hat, nichts aus, ob es 1 Einer oder 3 Zehner oder 5 Hunderte oder 3 Tausender mit 4 multiplizieren hat. Es genügt in jedem Falle die III mit der entsprechenden Bezeichnung. Die Schwierigkeiten beginnen erst, wenn mehrere Einheiten zusammenzufassen, und hier liegt tatsächlich die nicht geringe erschwerend-mathematische Bedeutung des ganzen Abschnitts. Sie ist darin zu finden, daß jetzt an das Kind die

Anforderung herabsetzt, zugleich mit dem Aufgabebewußtsein größere Zahlen im Gedächtnis zu behalten. Die Mäherigen waren zweifelhafte, von kleinen dreistellige im Betracht, das ist eine Steigerung der Leistungen um 50%. Und da überhaupt bei 6 die Grenze des Zahlenumkehrumfanges und die Grenze des unmittelbaren Behaltens — eine unterstützende Faktoren — liegt, so bedeutet dieser Abschnitt die Steigerung der Leistungsfähigkeit des Zahlengedächtnisses bis zur normalen Höchstleistung. Diese Leistungsfähigkeit erscheint erst dann im rechten Licht, wenn wir uns vergegenwärtigen, daß es sich ja nicht nur darum handelt, mehrere Zahlen bis zu 8 Stellen zu hören und nachzusagen, sondern auch darum, mit ihnen zu rechnen. Das erfordert aber die Bewältigung einer ganzen Reihe von Teilaufgaben, die in der Übersicht klar erfüllt werden und während der ganzen Arbeit im Blickfeld des Bewußtseins bleiben müssen, während außerdem die Ergebnisse der jeweils erledigten Teilaufgaben im Gedächtnis zu behalten sind. Größere Aufgaben dieser Art zu lösen, wären auch wir nicht imstande, wenn uns nicht eine ganze Reihe unterstützender Faktoren zur Verfügung stünde, wie Bekanntheit der einzelnen Zahlbegriffe, Rhythmus, nachfolgende oder formale Assoziationen, gegebenenfalls die Ziffern usw. Für das Kind kommt als wichtiger Hilfsfaktor in dieser Beziehung die Raumvorstellung in Betracht.

Daß auf dieser Stufe nicht die volle Leistungsfähigkeit erreicht wird, ist selbstverständlich. Sie stellt sich erst nach weiteren Jahren der Übung ein und ist stark abhängig von individuellen Verschiedenheiten, vom Unterricht und insbesondere von der besonderen Gewöhnung an einen oder mehrere dieser Hilfsfaktoren. Hier soll nur hervorgehoben werden, daß es die Sonderaufgabe dieser Stufe ist, diesem Ziele nachzustreben, also das Zahlengedächtnis zu üben, nachdem auf den vorigen Stufen die Zahlaufassung — bis zur Erlassung der verschiedenen Systemstufen und ihrer gegenseitigen Größenverhältnisse — und die Operationenauffassung, jede mit der ihr entsprechenden Darstellung, soweit ausgebildet worden ist. Daß die neue Aufgabe zu dem alten hinzutritt, sie nicht eines ablöst, ist wohl so einleuchtend, daß der Hinweis darauf genügt.

Mit der Klarheit über diese Aufgabe haben wir nun auch die Gesichtspunkte gewonnen, nach welchen die Arbeit, die Anordnung wie der Betrieb unserer Übungen sich richten können. Sie lassen sich zusammenfassen in die Worte: Steigerung der Anforderungen an das Zahlengedächtnis bei Vermeidung von Schwierigkeitshäufungen. Dazu macht sich eine Übersicht über die in Betracht kommenden Übungen nötig.

§ 28. Addition und Subtraktion.

1. Addition und Subtraktion reiner Zehner.

Im Zahlenraum bis 100 ist öfters schon mit reinen Zehnern gearbeitet worden bei Aufgaben wie $17+10$, $36+20$, $43-20$ usw. Jetzt kommen dreistellige in Betracht, die wir aber zunächst als zweistellige behandeln wollen.

$$\begin{array}{rcl} 17 \text{ Zehner} + 3 \text{ Zehner} & & 47 \text{ Zehner} - 4 \text{ Zehner} \\ 17 & + 14 & 47 & - 17 \\ 31 & + 45 & 32 & - 28 \end{array}$$

Jedes Beispiel kennzeichnet, wie leicht erreichbar ist, eine ganze Aufgabengruppe. Der Fortschritt ist jedenfalls erkennbar: zunächst werden einstellige Zehner hinzugefügt und abgezogen, dann zweistellige ohne, schließlich zweistellige mit Überschreiten der nächsten System Einheit.

Diese Zehner werden Anfangs als wirkliche Zehner, d. h. als Zusammenfassungen von 10 Einern, vorgestellt. Bei Benutzung der Handrechenblätter z. B. wird die 1. Additionsaufgabe so gelöst, daß die Kinder das erste Blatt herausnehmen mit den Worten „10 Zehner“ — sie sehen ja die wirklichen Zehnerreihen; darauf das zweite mit den Worten: „20 Zehner.“ Man zeigt sie auf dem 3. Blatt noch 5 Zehner und spricht: „35 Zehner“ usw. Etwas später — die Blätter reichen nicht aus, oder die Frage taucht auf, ob es nicht besser sei, oder die Kinder kommen selbst darauf — werden die Aufgaben auf einem einzigen Handrechenblatt vorgenommen. Allerdings: wo ein Ringel ist, wo wir uns also bisher einen Pfennig gedacht haben, müssen wir einen Zehner hinlegen, fünfier Marke Zehnfemiger auf das Handrechenblatt. Eine Kumpfsache, die nicht übersehen werden darf, ist bei diesen und allen folgenden Aufgaben nach jeder Ausrechnung die Verwandlung der Großen in Pfennige, der Zehner in Einer.

2. Addition und Subtraktion von Zehnern und Einern.

$$\begin{array}{rcl} 37 \text{ Zehner} + 9 \text{ Einer} & & 36 \text{ Zehner} - 3 \text{ Einer} \\ 37 & + 49 & 36 & - 27 \\ 86 & + 62 & 44 & - 76 \end{array}$$

Während die erste Additionsaufgabe nur die genaue Beschaffenheit der jeweiligen System Einheit und das Verwandeln der Zehner in Einer verlangt, fordert die zweite bereits ein Umwandeln der Zehnpfennig in zweierlei Einheiten. Dabei soll natürlich nicht ausgeschlossen sein, daß die Kinder auch den Weg des Resolvierens

gehen⁷⁾, also auch die erste Zahl von vornherein als Einer aufzufassen und rechnen: $130 + 45$. Bei der wenig verwickelten Aufgabe $63 \text{ Zehner} + 45 \text{ Einer}$ kann man dann zeigen, daß sie statt der 7 Hundertblätter, die man bei Eineranfügung brauchen würde, ein einziges ausreicht, wenn man eben in Zehnern denkt und selbst 5 Einer hinaufzählt⁸⁾.

Die Übungen dieser Gruppe gehören zu den bedeutungsvollsten und müssen immer und immer wieder vorgenommen werden, und zwar bei der geringsten Unsicherheit mit unserem Zehnerbillet zu den Hundertblättern oder anderen Rechenmitteln.

3. Addition und Subtraktion reiner Hunderten.

4 Hunderten + 5 Hunderten. 9 Hunderten — 5 Hunderten.

Diese Aufgaben scheinen wegen ihrer großen Leichtigkeit keinen Zweck mehr zu haben, aber sie müssen doch einmal so gelöst werden, daß die Kinder tatsächlich Hundertblätter herauswerfen. Sie sollen nämlich eben „Begriff“ davon bekommen, daß ein Hundert in Wirklichkeit doch etwas anderes bedeutet als Einer und Zehner, und daß es gar keine so leichte Sache sein würde, auf die bezeichnete Weise 45 Hunderten und 88 Hunderten zusammenzustellen. Daß man sich aber diese Arbeit außerordentlich vereinfachen kann, wenn man sich die Ringel als Markstücke denkt. Dann kommt man für die meisten Aufgaben mit einem Blatt aus. Als Aufgabengruppen kommen die unter 1 angeführten auch hier in Betracht, selbstverständlich mit je einmaliger Veranschaulichung der Hunderten des Ergebnisses in Einer.

Die Behandlung derselben Aufgaben mit Veranschaulichung der Mark in Zehnpfenniger, der Hunderten in Zehner, führt zur folgenden Übung:

4. Addition und Subtraktion von Hunderten und Zehnern.

7 Hunderten + 3 Zehner. 8 Hunderten — 5 Zehner.

Die weiteren Gruppenbeispiele entsprechen denen bei 2, nur daß statt Zehner und Einer jetzt Hunderten und Zehner gesetzt werden. Auch hier arbeiten die Kinder erst kurze Zeit mit den vollen Hundertblättern; dann werden die einzelnen Ringel als Zehner (Zehnpfenniger) angesehen, der hundertste Zehner also jetzt als Hunderten.

⁷⁾ Die Anzahl der Hunderten und Zehneren gibt dem heutigen Geschichte mehr und mehr abhanden gekommen. Man braucht ihnen keine Töne nachzuweisen.

⁸⁾ Interessierte Kinder, die den Sinn dieser Form verstanden haben, sagen dann wohl: „Aber die 5 Pfennige müssen wir uns in einem Strichem auf dem nächsten Ringel sagen denken, und eigentlich gehören noch 4 dazu.“

Endlich rechnen sie — weil das „für den Geübtesten am bequemsten“ ist — mit beiden Einheiten auf einem Zettel zugleich — ganz entsprechend den Ausführungen von E.

3. Hunderter, Zehner und Einer.

Aufgaben wie 500+50 sind nicht nötig, obwohl man beobachten kann, daß die Kinder in allem Ernste „rechnen“: Fünfhundert und dreihundert sind fünfhundertdreihundert. Es mag das daher kommen, daß unsere Kinder dadurch an das Ziffernrechnen gewöhnt sind und sich infolgedessen gar nicht bewußt sind, daß das Stellen einer solchen Aufgabe ja schon ihre Lösung enthält¹⁾. Diese Art von Aufgaben unterscheiden sich übrigens für das Kind ganz wesentlich von dem 1. Beispiel der Übungsreihe I, das man wohl gesagt sein könnte, in gleicher Weise zu verstehen, wie die vorstehenden Aufgaben. Für den gebildeten Schüler ist die Aufgabe in beiden Fällen die, Systemzahlen verschiedenen Stellenwertes einfach miteinander zu verbinden, ohne Umwandlung. Das Kind aber nicht in der Umkehrung der Wörter abhängig und wenn es nennensweise eine besondere Schwierigkeit, die ihm bei der ersten Aufgabe der jetzigen (3.) Übungsreihe nicht begegnet.

a)	$540 + 30$	$450 - 30$
	$540 + 84$	$630 - 54$
b)	$640 + 320$	$850 - 630$
	$470 + 380$	$790 - 440$
c)	$690 + 18 \text{ Zehner}$	$680 - 34 \text{ Zehner}$
	$340 + 26 \quad "$	$790 - 38 \quad "$

Bei jeder der beiden Zahlen einer Aufgabe kommen 2 verschiedene Systemeinheiten in Betracht; August und Minusend enthalten immer Hunderter; im ersten von zwei Beispielen wird der Hunderter nicht überschritten, im zweiten geschieht dies. Bei a) besteht die zweite Zahl aus Zehnern und Einern, bei b und c aus Hundertern und Zehnern, bei c in einer Bemerkung, die natürlich eine Umwandlung erfordert.

d)	$504 + 60$	$473 - 30$
	$675 + 80$	$387 - 40$
e)	$425 + 68$	$677 - 34$
	$573 + 54$	$329 - 85$
f)	$325 + 510$	$386 - 450$
	$363 + 430$	$625 - 370$

¹⁾ Es ist uns wiederholt begegnet, daß unser Minusend auf diese Weise kein Kind ein leichtig verstanden „Ach ja!“ erwiderte.

In diesen Beispielen tritt die erste Zahl dreigliedrig auf, die zweite Zahl bei a in einer, bei b und c in 2 Systemeinheiten.

g) $451 + 313$	$564 - 313$
$538 + 359$	$838 - 426$
$374 + 473$	$738 - 558$
$487 + 395$	$984 - 567$

Hier erscheinen endlich beide Zahlen dreigliedrig, die Gedächtnisleistung ist von all den Übungsschritten nun am größten. Dabei steigern sich die Anforderungen an das Behalten während einer immer längeren Rechenarbeit: beim ersten Beispiel findet keine Überschiebung statt, beim zweiten nur die schon länger geübte Zehnerüberschiebung, beim nächsten Hundertüberschiebung, beim letzten endlich Zehner- und Hundertüberschiebung.

§ 29. Multiplikation und Division.

1. Die Zehnerreihen.

a) $9 \cdot 50$; 50 in 450 .

Konkretisiert: 9 Boote zu 50 \mathfrak{A} kosten ... kurz ausgesprochen: $9 \cdot 50 = 450 \mathfrak{A} = 4,50 \mathfrak{M}$. Für 4,5 erhält man ... solche Boote; kurz ausgesprochen: 50 \mathfrak{A} in 450 \mathfrak{A} ist 9 mal.

Hier empfiehlt es sich, die einzelnen Reihen in der Gegenüberstellung des Malnehmens und Enthaltenseins durcharbeiten, wiederum — wie die Beispiele andeuten — mit Betonung der Hauptfrage: Wieviel kosten ... Wieviel erhält man für ... und mit Hinzufügung der mathematischen Form. Wie die 50er-Reihe, so werden die der 20, 40, 60, 80, 60, 90 und 70 durchgezogen.

b) $(160:8) \cdot 7$; $(350:5)$ in 400.

Konkretisiert: 8 Stück ... kosten 1,60 \mathfrak{M} ; wieviel 7 Stück? und 5 Stück kosten 1,50 \mathfrak{M} , wieviel bekomme ich für 4,5?

Diese zweite Gruppe bringt also das Verteilen in Verbindung mit dem Malnehmen einerseits, mit dem Enthaltensein andererseits. Auch hier empfiehlt es sich, die Reihen der 20, 30 usw. durcharbeiten.

c) $600 = 20 \cdot 30 = 20 \cdot 30 = 15 \cdot 40 = 15 \cdot 60 \dots$

Als Ergänzung zu diesen beiden ersten Gruppen tritt das Zerlegen in Faktoren mit der Hauptfrage: Wieviel kann ich kaufen? Z. B.: Wieviel Pfund Reis kann ich kaufen für 3 \mathfrak{M} , das Pfund zu 20, 40, 50 \mathfrak{A} usw.? Wieviel Meter Band für 7,50 \mathfrak{M} , das Meter zu 40, 70, 80, 90 \mathfrak{A} ?

$$d) 4 \cdot 50 = 7 \cdot 100.$$

Die voranstehenden Rechen sollen miteinander verglichen werden, die der 50 und 100, der 50, 40 und 80, der 30 und 60. Hierbei kann das Untersuchen der Faktoren, eine weitere Kabildeterung finden durch Hinweis auf die Freiheit des Sprachgebrauchs. Während wir früher zeigten, daß $2 \cdot 4 = 4 \cdot 2$ sein müsse — vgl. S. 129 — so können wir jetzt darauf hinweisen, daß ich mir mit 50 vorstellen kann, und wenn das geschehen ist, so sagt einer: stimmt sie mal 8! Es ist aber auch so möglich, daß ich erst höre: 8 mal . . . und nachher: 40. Dies führt nach und nach zu der Erfahrung, die aber durchaus nicht in eine Regel gebildet zu werden braucht, daß es begünstiger ist, sich einige große Zahlen vorstellen, als viele kleine, begünstiger als 8 Sechziger, als 60 Achten. Doch soll jede solche Vorstellung mit Bewußtsein vorgenommen werden, nicht als Produkt der Nachahmung des Lehrers.

2. Multiplikationen zweistelliger Zahlen mit einstelligigen und entsprechende Divisionen.

$$a) 70 \cdot 4. \quad 66 \text{ in } 264.$$

Wie bei 1a kommt das Maßnehmen und das entsprechende Einheitsmaße zunächst in Betracht. Jenes verursacht keine sonderlichen Schwierigkeiten; es handelt sich eben um die Teilrechnungen $70 \cdot 4$, $2 \cdot 4$, $280 + 8$; dies ist dem Kinde, das bisher richtig hat arbeiten dürfen, selbstverständlich und längst bekannt. Eher könnte es etwas stutzen bei der zweiten Aufgabe, die ihm allerdings konkretisiert geboten wird: 66 $\frac{1}{2}$ kostet ein Pfund Backpfeffern; ich kenne für 2,64 $\frac{1}{2}$. Doch ist ihm sofort die Beziehung klar, und die Ausführung erhebt nur zum Bewußtsein: Ich muß schätzen: 66 $\frac{1}{2}$ ist etwas mehr als 60; wenn 1 Pfund 60 $\frac{1}{2}$ kostete, so bekäme man für 2,40 $\frac{1}{2}$ 1 Pfund; und nun probiere ich 66 $\frac{1}{2}$, d. h. das Kind multipliziert aus, prüft nach.

$$b) 9 \text{ Stück kosten } 2,35 \frac{1}{2}; 7 \text{ Stück wieviel?}$$

$$7 \text{ Stück kosten } 2,35 \frac{1}{2}; \text{ wieviel erhält man für } 4 \frac{1}{2}?$$

Die Division als Verfahren entspricht im übrigen der Form unter 1b.

$$c) \text{ Wieviel Pfund Zucker bekommt man für } 5 \frac{1}{2}, \text{ wenn das Pfund } 24, 25, 26, 28, 30, 32 \frac{1}{2} \text{ kostet? Zerlegt die } 160!$$

Das Zerlegen in Faktoren, wobei eine zweistellige Multiplikation oder eine einstellige Division die Anlauf bildet, entspricht sonst der Form 1c.

3. Multiplikation dreistelliger Zahlen mit einstelligen und entsprechende Division.

a) Reine Hunderter sind schon vielfach in leichteren Formen bearbeitet worden, z. B. 600-2; 500 in 2400. Doch bringen die Hauptfragen des Verstellens neue Übungsgelegenheit; z. B.

4 Pakete Papier wiegen 2800 g. 7 Pakete wieviel?

3 Sack Kartoffeln enthalten etwa 1800 Stück, 4000 Stück gehen in wieviel Säcke?

Daneb schließen sich Zerlegungsaufgaben wie: Zerlegt 4800 in verschiedene Hunderterzahlen!

b) Hunderter und Zehner:

400-8. 360 in 1800.

4 kg Kaffee kosten 12,40- \mathcal{M} ; 7 kg wieviel?

7 kg Kakao kosten 22,40- \mathcal{M} ; wieviel kg bekommt man für 21- \mathcal{M} ?

c) Hunderter, Zehner und Einer:

234-6. 234 in 1400.

5 kg Speisewöl kosten 8,75- \mathcal{M} ; 3 kg wieviel?

6 Ein. Kartoffeln kosten 17,10- \mathcal{M} ; wieviel Ein. erhält man für 21,35- \mathcal{M} ?

Bei allen diesen Aufgaben können für das Erhaltensein große Maßzahlen, für das Teilen zunächst nur einstellige Teiler in Betracht.

4. Multiplikation zweistelliger Zahlen mit zweistelligen und entsprechende Division.

27-28. 28 in 600.

Von hier aus kann man die Übung in freierer Weise fortsetzen. Erhaltensein und Teilen, das bisher singenmäßig scharf auseinandergehalten wurde, gehen unmerklich in der Praxis ineinander über, wenn natürlich nicht ausgeschlossen werden soll, daß ab und zu immer wieder der Sinn jeder der beiden Operationen festgesetzt und ihre Beherrschung geübt wird.

Über zweistellige Multiplikationen hinauszufragen, hat keinen Zweck. Kein Erwachsener rechnet 687-35 im Kopfe. Kopfrechnen aber ist es, was bisher in Betracht kam.

Die vorstehende Übersicht soll nicht etwa schematisch maßgebend sein. Man kann sie sich vielfach anders zusammenstellen je nach den Verhältnissen, unter denen man arbeitet. Insbesondere wird die Rücksicht auf frühere Gewöhnung der Kinder stark mitzusprechen. Auch braucht man gar nicht eigentlich alles durchzuarbeiten; auch dies wird von dem besonderen Umstände abhängen.

Aber es ist nicht selten dem Lehrer erwünscht, den Aufgaben der Kinder bestimmte Richtlinien zu geben; dazu sollen die obigen Beispiele dienen. Sie haben den Zweck, die einzelnen Schwierigkeiten zum Bewußtsein kommen zu lassen, damit sie von den Kindern auch und nach Überwinden werden können.

Die Behandlung dieses Abschnitts ist der des vorigen ähnlich in der gegenständlichen, später mindestens skizzenhaften Aufzeichnung und in der darauf zunächst einsetzenden symbolischen Darstellung. Dabei ist auf klaren Darlegen des eingeschlagenen Weges zu halten, Schriftbilder der Aufgaben selbst der Kinder ist fortgesetzt zu thun.

Die Behandlung dieses Abschnitts unterscheidet sich aber auch von der des vorigen in gewisser Beziehung. Neben der symbolischen Darstellung wird das bloß vorstellende Rechnen mehr und mehr gelöst und setzt sich — wo man soweit gehen kann — auch und auch an ihre Stelle. Damit hängt zusammen, daß auch die Benennung mehr und mehr wegfällt kann, so daß in etwas langsamen Fortschritten auch ohne die Notigung zu dinglicher oder symbolischer Vorstellung gerechnet werden darf. Allgemeines Ziel einer Klasse kann das aber nicht sein, sondern nur ein Zugewinn der an solche Kinder, die jederzeit in der Lage sind, ihre Befähigung zum Konkretisieren nachzuweisen; mit andern Worten: Wir lassen die Abstraktion keine zu, aber nur die selbstverwirklichte, nicht die aufgeschriebene, die formalisierte.

Endlich hat der vorstehende Abschnitt eine besondere Bedeutung. Während seiner Behandlung wird sich der Gebrauch der Ziffer immer dringlicher gestalten. Damit ist die Stelle gegeben, an der sie neben dem Zahlwort zur Stellvertreterangewandtheit des Zahlbegriffs verlor. In einem späteren Abschnitt soll das noch ausführlicher dargelegt werden. Hier sei nur noch dies hinzugefügt, daß durch die wachsende Bedeutung der Ziffer nicht etwa die vorstehende Bedeutung der Raumvorstellung zurückgedrückt wird.

Ehe wir weiter fortfahren in der Beschreibung des Lehrverfahrens, insbesondere zeigen, wie die Operationen auf der Oberstufe im Gebiete des Bruchrechnens und der übrigen Rechenarten durchgeführt werden, müssen wir erst, um das Bild des elementaren Rechenunterrichts möglichst zu vervollständigen, einige zusammenfassende Ausführungen bringen über Gedanken, die sich auf alle die bisherigen Bildungsstufen beziehen, daher bei den einzelnen nicht behandelt werden konnten. Sie betreffen zunächst allerdings nur die äußere Ausgestaltung. Die nach unserer Meinung ungefähr

wichtigeren Ausführungen über die innere Gestaltung unseres künftigen Rechenunterrichts müssen wir zurückstellen, da wir nach dem Lehrverfahren der elementaren Rechenunterricht der Oberstufe dargelegt haben.

5. Abschnitt des Lehrverfahrens:

Zur Äußeren Form der bisherigen Bildungstufen.

§ 30. Die Hilfsmittel des elementaren Rechenunterrichts.

Es kann nicht die Aufgabe dieser Darlegungen sein, eine Übersicht über die vorhandenen Lehrmittel zu geben oder ihre größere oder geringere Zweckmäßigkeit zu erörtern. Das würde bei den ungefähr 400 verschiedenen Rechenmaschinen, die gegenwärtig auf dem Markte zu sehen, ein recht umfangreiches Unternehmen werden, denn der ständige didaktische Gewinn nicht entspräche. Es kann sich vielmehr hier nur darum handeln, das Wesentliche herauszuheben, die inneren Beziehungen herausstellen und die Grundzüge zu formulieren, die für die Beurteilung wie für die Beschaffung der Rechenmittel maßgebend sind.

Aus der großen Zahl der Rechenmaschinen seien nur einige vorgeführt. Hierbei leitete uns der Gedanke, durchaus verschiedene Typen auszuwählen. Von den Entwicklungsformen dieser Typen können selbstverständlich aber nur solche in Betracht, die etwas in ihrer Art Vortreffliches darstellen.

Die Bayerische Rechenmaschine vertritt die Gruppe der „russischen Rechenmaschinen“, die bewegliche Zählkörper an Drähten erscheinen und hin- und herziehen lassen (s. Seite 348 und 349).

Hüllers verheisener Rechenkasten ist eine Form des „Tischschen Rechenapparats“, der die Zahlen darstellt in rechteckigen Säulen mit Würfelförmigkeit (s. Seite 352).

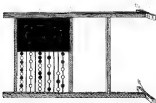
Das Nürnberger Rechenbrett von Trußbach ist ein Vertreter derjenigen Gruppe von Apparaten, welche feste Zählkörper mit Zählkörpern ausfüllen (s. Seite 344).

Geidels Münzrechenbrett endlich zeigt, wie die Gegenwart nach neuen Wegen sucht und wie sie dabei Einzelaufgaben, wie der Einführung des Zehnersystems, eine besondere Bedeutung beizulegen (s. Seite 345).

Was diese Lehrmittel — und alle die Hunderte von ähnlichen — getrieben, nicht getrieben will, der muß ihnen Eins verstehen. Der kann ganz allgemein so ausgedrückt werden: In den Rechenlehnmitteln des Elementarunterrichts sollen Zählkörper die wirk-



Modell eines Schiffes (Schiffmodell)



Modell eines Schiffes (Schiffmodell)



Größe Mikroskopie.



Einzelteil
von Rechenmaschine.



Das Kärntner Rechenbrett von Trudlitz.

hohen Dinge vertreten und darstellen. Dabei soll die wesentliche Gleichheit der Zählkörper die Kinder dazu führen, auch bei den rechnerisch zu behandelnden Dingen von jeder individuellen Verschiedenheit absehen. Weiter soll die Zahlenstellung durch die Vertauselung von einer Raumvorstellung begleitet und gestützt werden. Damit bekommen aber die Zählkörper überall einen symbolischen Charakter.

Die wichtigste Folgerung aus dieser Erkenntnis ist nun die, daß es notwendig ist, den Kindern diesen symbolischen Charakter zum Bewußtsein zu bringen, daß es also ein schwerer Irrtum ist, den Kindern gegenüber diesen Charakter zu verlangen oder nicht genügend zum Ausdruck zu bringen. Dies geschieht aber überall dort, wo die Zählkörper gewissermaßen als die schulgemäßen Rechenleramittel behandelt werden, hinter denen keine andere Wirklichkeit steht. Ein solches Verfahren ist nicht wesentlich verschieden von dem Verhältnisse der früheren Jugendzählung, bei dem auch das Wortsymbol als ausreichend zur geistigen Erwerbung der Sache angesehen wurde. Ein solches Verfahren kann wohl die Kinder dazu führen, mit Rechenblättchen oder Kapseln „rechnen“ zu können; es läßt sie aber vermissen, wenn sie mit Gersten und Pfastersteinen, mit Blumen und Geld rechnen sollen. Eine solche Erziehung führt dann leicht zu der Ansicht, daß die Abstraktion nicht ausreichend berücksichtigt worden sei, warum sich die Forderung ergibt, die Abstraktion viel mehr zu pflegen. Diese Forderung läßt sich aber auf in die andere, von diesen Rechenlehramitteln möglichst bald loszukommen. Die Entstehung dieser Forderung ist ein kennzeichnendes Beispiel dafür, wie Unklarheit in der Erkenntnis psychischer Vorgänge und der tatsächlichen Zusammenhänge zu aussehend ganz richtigen, in Wahrheit aber zu den verkehrtesten Folgerungen führen kann.

Psychologisch liegt die Sache aber so, daß es erste Aufgabe des Unterrichts sein muß, die Kinder in die mathematische (d. h. hier zunächst: abstrakte) Erfassung der Wirklichkeit einzuführen. Die symbolische Darstellung der Wirklichkeit bedeutet schon eine höhere Stufe, bedeutet in der Tat eine Abstraktion, mit der selbstverständlich nicht begonnen werden, sondern die erst nachfolgen darf.

Auf die durch das Rechenschemittel zu gewinnende Raumvorstellung, welche die Zahlvorstellung unterstützt, ist bis jetzt noch nicht viel Wert gelegt worden, als nötig ist. Wir haben das wiederholt an anderen Stellen angeführt und können darauf verweisen (s. S. 162, 170, 188, 218 usw.).

Der symbolische Charakter der Zählkörper und die mit ihnen gegebene Raumvorstellung stellen nun das Gemeinsame der römischen Rechenschemittel dar. Dem gegenüber scheinen die kennzeichnenden Unterschiede der einzelnen Gruppen noch auf wichtige innere Bedeutung hinzuweisen. Folgendes wäre hervorzuheben. Während die römische Rechenschemittel den Ton legt auf die Auffassung der einzelnen Zählkörper, hebt der Türkische Rechenkasten die Auffassung der Einheit der zu einer Zahl gehörigen Teile hervor. Jene ist mehr analytisch wirksam, dieser mehr synthetisch. Das bedeutet, daß jeder der beiden Typen vor dem andern einen Vorzug, zugleich aber auch einen nicht geringen Nachteil dem andern gegenüber hat. Denn Analyse wie Synthese der Zahlentastung sind beide gleich notwendig. Allerdings ist der Nachteil nicht allen bedenklich, wenn der Lehrer sich klar ist über die Eigenart des zu seiner Verfügung stehenden Apparats. Denn dann wird er eben sehr Augenmerk darauf richten, diesen Nachteil durch besondere Übungen oder auf irgendeine andere Art auszugleichen.

Gemeinsam freilich ist beiden Gruppen von Rechenapparaten noch der andere Nachteil, daß sie auch den noch Ungeübten das Überblicken längerer Reihen bis zur 10 nursten. Das ist der eigentliche Grund, welcher als Gegenwirkung gegen diese beiden Typen die ganze Gruppe der Zahlbilderapparate entstehen und große Verbreitung gewinnen ließ durch ihre in die Augen springende Erleichterung der Zahlenfassung infolge der rhythmischen Gliederung. Ähnlich wie bei den römischen Rechenschemitteln herrscht bei ihnen alles der analytische Charakter vor, was wiederum zu den mannigfachen Versuchen des Ausgleichs geführt hat.

Geidels Münzenrechenbrett vertritt alle die außerhalb der drei genannten Typen bestehenden Apparate. Es will insonderheit die starke Symbolisierung der anderen Rechenschemittel vermeiden, dessen Zählkörper doch möglichst qualitativen Einheiten darstellen

lassen. Dies erfordert natürlich dann einen Ausgleich, wenn die Aufgabe der Abstraktion dringlicher wird.

Aus dieser kurzen Andeutung der inneren Unterschiede der geistlichen Lehrmittel dürfte zweierlei hervorgehen: Zunächst dies, daß sie alle recht brauchbar sind; daß aber keines an in die Augen springende Vorteile dem andern gegenüber aufweisen kann, daß es als das beste bezeichnet werden dürfte. Daher möchte sich jeder Lehrer recht klar darüber werden, was sich mit dem ihm zur Verfügung stehenden Lehrmittel erreichen läßt, und nach welcher Richtung er zu ergreifen hat. Daraus schließt sich unmittelbar der andere Gedanke, daß es zweckmäßig ist, mit mehreren Nebenlehrmitteln zu arbeiten, vor allem mit solchen, die sich innerlich ergänzen. Dieser Gedanke wird auch nahe gelegt durch die Einteilung der Beherrschung der Abstraktion in Bezug auf Zahlenfassung und Operationen. Bei mehreren Anschauungsmitteln wird die Abstraktion gründlicher und sicherer erreicht.

Das weitere sei eines Nebenlehrmittels gedacht, um das die Methodiker in ersterer Stelle legen, das sind die Finger des Kindes. Es hat hier keinen Zweck, auf das Für und Wider näher einzugehen; es sei vielmehr als Ergebnis langer Erfahrung und Studiens folgendes hingeworfen: Die Finger sind als Rechtlehrmittel recht gut brauchbar in der Hand des tiefen blickenden Erziehers, der sich ihres symbolischen Charakters stets bewußt ist, ebenso der Mangelhaftigkeit ihrer symbolischen Wirkung, nämlich ihrer geringen Tragweite, die ja nur bis 10 reicht. In jeder dieser Beziehungen möchte für geeignete Ergänzung gesorgt werden. Demgegenüber haben sie aber zwei kaum hoch genug anzuschlagende Vorteile: Sie sind immer zur Hand, und jedes Kind kann mit ihnen arbeiten. Auf diesen Gedanken muß noch näher eingegangen werden. Zunächst sei als Ergebnis festgestellt: Die Finger sind ein gutes Rechtlehrmittel, sie dürfen aber nicht das einzige sein. Außerdem sind sie ihres symbolischen Charakters wegen für den Anfang nicht geeignet. Ähnliches gilt von Linsen, Steinchen, Perlen, Aprikosen- und Pfirsichkernen, Kastanien sowie von Strichstäbchen, Legestäbchen usw. Sie bilden mit den Fingern zusammen eine 6. Gruppe der Rechtlehrmittel. Die meisten von ihnen könnte man natürlich nennen im Vergleich zu den Gruppen der körperlichen. Die meisten sind auch fast kostenlos zu beschaffen, was in vieler Augen kein Vorzug ist. Gemeinsam mit den Fingern haben sie die symbolische Natur und den analytischen Charakter, überlegen sind sie ihnen darin, daß sie in ihrer Anzahl nicht so beschränkt sind, und daß sie beliebige Gruppierungen

zunehmen. Das sind immerhin einige Vorteile, denen freilich ein nicht unwichtiger Nachteil gegenübersteht.

Von allen den bisher besprochenen Rechenlehnmitteln erwarten wir, daß sie nicht nur der Zahlauffassung dienen, sondern daß mit ihnen auch die Operationen darzustellen sein sollen. Ja, der Forderung von gestern und der Lese sind geneigt, die Örtlichkeit und Zweckmäßigkeit eines Lehrmittels einzig nach diesem Gesichtspunkte zu beurteilen. Seine Bedeutung steht außer allem Zweifel. Man vergegenwärtige man sich, in welchem Maße die verschiedenen Gruppen der Lehrmittel dieser Forderung entsprechen. Da zeigt es sich, daß beim Zusammenzählen und Abziehen, beim Zerlegen und Ergänzen mit kleineren Zahlen wesentliche Unterschiede nicht auftreten, daß aber sofort ganze Gruppen ungünstig abschneiden, sobald es sich um etwas größere Zahlen handelt. Wenn an der russischen Rechenmaschine die 27 steht, so läßt sich die Addition $27 + 25$ mit 4 Griffen bewerkstelligen. Ebenso ist es beim Tülschenschen Rechenkasten und bei einigen Formen der 3. und 4. Gruppe. Die übrigen alle aber bedürfen dazu einer größeren Zahl von Handgriffen und infolgedessen einer beträchtlich längeren Zeit, nämlich überall dort, wo das Lehrmittel nur Einereinheiten und nicht auch höhere (Zehen-, Hunder-, Zehnerhunder-) bietet. Sowohl für die Auffassung wie für die Darstellung ist die Darstellung von Einereinheiten recht wenig förderlich. Das Vorhandensein größerer Einheiten fällt also besonders der genannten Gruppen stark in die Waagschale, und daraus erklärt es sich, daß insbesondere ein Vertreter der beiden ersten Gruppen sich gemeinhin auch in der einfachsten Schule vorfindet.

Es braucht ja eigentlich nur darauf hingewiesen zu werden, um den einfaltungsreichen Lehrer zu veranlassen, diesen Mangel, der sich vor allem bei den natürlichen Rechenmitteln findet, möglichst auszugleichen. Er wird Perlen mittels eines Fadens zu Fäden und Zahnreihen, Streichhölzchen und Legostäbchen zu Zahnreihen, Kastanien mittels eines Drahtes zu ebenen Reihen höherer Einheiten herrichten lassen. Das wird in vielen Fällen mit reicher Befriedigung geschehen.

Endlich kommen wir zu der wichtigsten Forderung, die an ein Rechenlehrmittel zu stellen ist. Wir haben sie schon andeutungsweise berührt. Es ist die, daß die Kinder damit arbeiten können. Die psychologischen Auffassungen über die Bedeutung der Tastungsfindungen für unsere Rasse, Zeit- und Zahlvorstellungen, über die Bedeutung des manuellen Tuns für die Gefühlsbetontheit, endlich über die Bedeutung der Eigenwilligkeit für die Erwerbung und Festigung von Vorstellungen und Begriffen brauchen hier nicht wiederholt zu werden. Es genügt der Hinweis darauf,

und schließlich die Festlegung, daß wir mit Rechenlehrmitteln für die Hand der Kinder vor allem nach demjenigen Anschauungstypen gerecht werden, bei dem das motorische Element stark hervortritt. Da der rein akustische Typus ganz selten, der akustisch-motorische dagegen recht häufig ist, so berücksichtigen wir mit Rechenlehrmitteln „für die Hand der Kinder“ alle diejenigen, denen nach ihren psychischen Anlagen das Anschauungsmittel nicht genügen kann.

Unter diesem Gesichtspunkte der kindlichen Betätigung gewinnen nun verschiedene Gruppen von Lehrmitteln, die vorher stark zurücktreten mußten, neuen Glanz gegenüber ihren Mitbewerbern. Denn dieser Forderung, daß die Kinder mit dem Lehrmittel arbeiten müßten, ist selbstverständlich nicht im mindesten genügt, wenn ein Kind verstehen darf, um an der russischen Rechenmaschine irgendwelche Operationen auszuführen. Alle diese Demonstrationsapparate, die nur in einem Stücker in der Klasse vorhanden sind, können eben dieser Forderung nicht genügen. Das ist nur möglich bei solchen Lehrmitteln, welche jedes Kind in seinem Besitze hat oder zu eigener Betätigung überlassen bekommt. Selbstverständlich sollen damit die Demonstrationsapparate nicht als wertlos bezeichnet werden, keinesfalls, aber sie bedürfen unbedingt der Ergänzung durch ein Lehrmittel für die Hand der Kinder.

Es jetzt haben wir versucht, unsere Ansicht über die Menge der verschiedenen Lehrmittel begründend und ableitend darzustellen. Es dürfte vielleicht nicht uninteressant sein, kurz zu zeigen, wie sich diese Gedanken entwickelt, diese Ansichten herausgebildet haben.

Wir sehen, wie die Rechenlehrer unserer Kinderjahre zum Teil recht gute Erfolge aufzuweisen hatten, obwohl sie nur mit einer russischen Rechenmaschine allerhöflichster Art und mit den Fingern arbeiten mußten. Wir erlitten weiter in eigener Praxis das jahrelange Unbehaglichkeit mit den erwiesenen Erfolgen und haben bei den Antagonisten dieselbe Not, die ihren Ausdruck fand in dem Streit des Zählens und Anschauens, in der Bekämpfung und Befreiung der Finger als Anschauungsmittel, in dem Erscheinen aller möglichen „Rechenübungen“ und in der Erfindung immer neuer und besserer Rechenmaschinen. Es war ausgemacht, daß die Punkte dazu, wenn sie nach 1000 oder 2000 neuen Rechenmaschinen erfunden haben würde, an dem Ziele angelangt sein könnte, so sagen: Jetzt haben wir die denkbar zweckmäßigste Form und Methode. Diesen langen Weg — es ist der der chinesischen Entwicklung — abzukürzen, dazu ist aber die Wissenschaft berufen. Und so mußten wir die Grundlagen zu erforschen, auf denen das Rechnen

überhaupt aufweist, und die auch das Wirken eines Rechenlehnmittels bedingen⁵⁾.

Diese Grundlagen waren wesentlich in der Kenntnis der psychischen Entwicklung des Kindes zu suchen, wie sie nicht eine Induktive, sondern eine Induktive *ex ante* Wissenschaft feststellt. Diese Studien führten — in fortwährender Wechselwirkung mit den durch sie veranlaßten Variationen und Beobachtungen der Praxis — zu den Ergebnissen, die in dem vorliegenden Buche niedergelegt sind. Im besonderen erwiesen sie die hohe Bedeutung der Rechenlehnmittel, deren die Grenze für deren Wirkungsbereich, nämlich die Grundstoffe, welche für die Beurteilung eines Rechenlehnmittels in Betracht kommen.

Diese letzteren mögen hier zusammengefaßt werden wie folgt: Es ist zu unterscheiden: 1. in welchem Maße seine Einheiten symbolischen Charakter haben; 2. in welchem Maße es der analytischen Zihlaufassung einerseits, der synthetischen andererseits Rechnung trägt; 3. in welchem Maße es rhythmisierende Zihlaufassung gestattet; 4. in welchem Maße es für die Ausübung der verschiedenen Operationen geeignet ist; 5. in welchem Maße es das Handeln mit größeren Zahlen gestattet; 6. ob es den einzelnen Kindern in die Hand gegeben werden kann; 7. ob es reichhaltig ist.

Hierauf soll noch folgendes bemerkt: Ein Lehrmittel mit stark symbolischen Charakter der Einheiten, wie das die Kugeln der Rechenmaschine oder die Zählbilder beugen, trägt weniger für den Anfang; es kommt eben das wirkliche Ding in Betracht. Erst wenn man die Dinge symbolisieren kann kann durch jene Einheiten, ist die Verwendung eines solchen Lehrmittels am Platze. Die überwiegend analytische Betrachtungsweise der Kugeln der russischen Rechenmaschine und der Knetkugeln der Zählbilder einerseits, die überwiegend synthetische der Zählbilden des Tüfchenchen Rechenkastens hat zu dem mannigfachen Versuchen der Abschwächung und Ergänzung geführt. In Bezug auf rhythmisierende Zihlaufassung sind alle Zählbildenapparate natürlich anderen ganz bedeutend überlegen, und ein Ausgleich ist hier vielfach unmöglich. Die Beweglichkeit größerer Einheiten läßt die künstlichen Lehrmittel vor den natürlichen einen beträchtlichen Vorsprung gewinnen; Versuche um dessen Einholung sind schon unternommen worden. — dies gilt für die beiden Punkte 5 und 6. Das „Rechen-

⁵⁾ Es ist auf allen Gebieten des Lebens so, daß die Praxis an ungeübter Leistungsfähigkeit in die Höhe schreift, wo sie sich dem Anforderungen der Wissenschaft fügt und ihren Anregungen nachgibt. Die gesamte Volkswirtschaft, Wirtschaftskunde und sozialpolitische Betrachtung des 19. Jahrhunderts ist dafür ein einziges glänzendes Beispiel. Nichts war der Wissenschaftler nicht war die Zeit, sondern auch die Grundlagen und Mittel der Praxis vielfach kennen, d. h. auf das vorliegende Gebiet angewandt, nicht nur Theoretiker oder Beobachter gewesen sein.

apparates gewollter haben die natürlichen wieder den durch nichts aufzuhebenden Vorrang der Eignetheit des Kindes und endlich auch den eben bedeutsamen der Wohlfelt. — Zusammengefaßt: kein Rechenapparat ist ein Universallehnmittel, weil in keinem die in Betracht kommenden Anforderungen gleichzeitig erfüllt werden können.

Denn Erkenntnis reichte uns nach Abhilfe zunächst an den bedeutsamsten Stellen. Zweit wurden die natürlichen Rechenlehnmittel stark hervorgehoben. Da weiter eine russische Rechenmaschine zur Verfügung stand, nahmen wir Führung mit den Eltern der schwächeren Kinder, und es gelang, daß diese und dann auch andere solche kleine Handmaschinen mitbrachten. Darauf war sehr viel gewonnen. Wie andersherum die Zehnreihen der Rechenmaschine in der früher angegebenen Weise zu Zehnerrahmeln. In vorichtig prüfender Weise gewonnen wir die Einsicht, daß die bisherigen Lehrmittel zu allernächst der Operationsauffassung zu dienen in der Lage seien, die Zahlauffassung nur in einem beschränkten Umfange, der Operationsumstellung und der Zahldarstellung überhaupt nur, soweit sie in den Händen der Kinder waren und mit kleineren Zahlen besetzten. Darauf zugleich bildete sich die Überzeugung von der Notwendigkeit der entsprechenden Betonung auch dieser anderen rechnerischen Betätigungen im elementaren Unterricht. Sie führte zur Herstellung des Hundsternzahlbildes durch die Kinder, später zur Abänderung der Form seiner Einheiten als Ringel und zu seiner Vorbereitung durch den Druck¹⁾.

Der größte Erfolg blüht in die Art und die Wirkungsmöglichkeit der Apparate, die Heraushebung der natürlichen Lehnmittel und die Hervorhebung der Handsternbilder waren nicht die einzigen Früchte dieser Studien in bezug auf die äußeren Hilfsmittel zur Einführung in die Welt der mathematischen Vorstellungen und Begriffe. Wir haben in ihrem Lichte vielmehr noch manchen andere Lehrmittel ersucht und erlitten auf einige hinweisen, deren Benutzung wir warm empfehlen können.

Dabei gehört in erster Linie das wirkliche Geld. Es hat denselben Nachteil wie die Fingerringe, die nur in beschränkter Anzahl vorhanden sind; auch von wirklichem Gelde kann man bei dem

¹⁾ Die Erfahrungen mit dem Hundsternbildern sind recht befriedigend. Ich bin die Anforderungen an Schulen aller Art, die unter den eben angegebenen Gesichtspunkten stehen und nachsehen zu wollen. Ich habe mir nicht weg, ein kleines Lehrmittel damit geschaffen zu haben. Daß ein solches notwendig ist, habe ich schon empfunden. Das zu bestimmter Stelle sollen die später dem Fünftklässer. Es sollen auch nicht die bisherigen Apparate verdrängen, sondern die sie ergänzen Wirkung hervorzubringen. Was die hauptsächlichste Wirkung, ist, zu viel kleineren und kleineren Zahlauffassung und zu vielfach vermehrter Eignetheit zu führen.

einzelnen Kinde nicht auf größere Summen rechnen. Aber 10 einzelne Kupferpfennige hatte jedes Kind bald gesammelt und hütete sie wie einen Schatz. Gerade in dieser Anschauung, in der allgemein starken Gefühlswirkung dieses Lehrmittels, liegt sein großer Vorzug vor andern. Rechnen mit richtigen Pfennigen, bei denen so und so oft festgesetzt werden muß, daß nicht etwa einer fehlt, heruntergegeben oder zum Nachbar hinüber gereicht ist, das ist etwas ganz anderes, als Rechnen mit Kupeln an der Rechenmaschine oder mit Klötzchen oder ähnlichen Dingen. Richtig bezahlen, richtig kaufen, richtig borgen und wiedergeben, gelegentlich auch einmal richtig verkaufen, das ist ein besonderes Zauber auf das kindliche Gemüt aus, selbst dann, wenn es weiß, daß am Ende der Stunde die früheren Eigentumsverhältnisse wieder hergestellt werden. Man darf behaupten, daß bei 5—7-jährigen Kindern das eigene Interesse für das Rechnen im allgemeinen noch nicht erwacht ist. Das hängt zusammen mit der Entwicklung der Zahlbegriffe, wie wir sie ja schon dargestellt haben. Es ist daran zu erinnern, daß das Kind verhältnismäßig wenig Gegenstände hat zu geübtem, bestimmter Beschäftigung mit den Zahlen. Ob 5 oder 7 Äpfelchen in Betracht kommen, sagt das Kind nicht eben auf, es bekommt ja weder die fünf noch die sieben, auch zu Hause nicht, höchstens eine auf einmal, in der Mäkelnahl der Fülle aber auch noch nicht dies, sondern nur ein Stückchen. Auch die Zahlenverhältnisse des übrigen Lebens erschließen sich erst nach und nach dem Kinde als wertvoll. Aber auch das 6-jährige Kind hat meist schon ein sehr lebhaftes Wertgefühl für das Eigentumsrecht an 10 Pfennigen, von denen die Mutter gesagt hat: „Daß du ja keinen verlierst“ und es gerät in mehr oder minder große Trauer, wenn dies dennoch geschieht. Hier ist also die Stelle, von welcher aus das Kind Verständnis für die Größenwerte des Lebens gewinnt, und darum möchten wir das wirkliche Geld als Rechenkenntnis der Unterstufe nicht missen.

Mancher Pädagog wird ja vielleicht Bedenken haben gegen ein solches Lehrmittel; er wird glauben, dabei sei die Veranlockung zur Unethiklichkeit in hohem Grade zu fürchten. Wir können ihn aus Erfahrung versichern, daß solche Bedenken gegenstandslos sind oder mindestens gegenstandslos gemacht werden können. Wir versetzen es so, daß im Anfang jeder Übung der Bestandstand eines jeden Kindes von ihm und seinem Nachbar festgesetzt wurde, und zwar so, daß die 10 Pfennige in der Form des glänzenden Zahlenbildes aufgelegt wurden. Erst wenn unter gegenseitigem Zeugnis festgestellt war, daß alles stimmte, begannen die Übungen. Und nachdem sie beendet waren, wurde wieder gezählt und kontrolliert. Auch in praktischer Hinsicht hatten wir dies Ungeschickten mit

Geld für wertvoll. Dem 7jährigen Kinde möchten wir doch auch außer der Schule 50 % oder später 1:50 anvertrauen können. Es ist schon vorzuziehen, daß Geld verloren worden wäre, und es hat sich regelmäßig wiedergefunden. Ein „Zählgeld“ von Griechen würde schon für einen längeren Zeitraum reichen bei wirklichen Verlusten. Dieses von vornherein anzuschließen, war natürlich unser eifriges Bestreben. Wir glaubten, dies damit verwirklichen zu können, daß wir eben schon frühzeitig und von vornherein die Kinder gewöhnen an unbedingte Gewinnhaftigkeit im Verkehr mit Geld. Wir haben beobachtet, daß im 6—7jährigen Kinde wohl das Gefühl für das Mein und Dein schon ziemlich ausgebildet ist, nicht in gleichem Maße aber das Gefühl für die Rechtlichkeit des Erwerbs. Nicht wenige Kinder dieses Alters stehen noch auf dem Standpunkte: Was ich dir weggenommen habe, das ist nun mein. An den Gedanken der Rechtlichkeit des Erwerbs aber gewöhnen wir die Kinder dadurch, daß wir ihnen recht oft Gelegenheit geben, dieses Gelingen zu betätigen. Daß wir sie in die Lage versetzen, mit fremden Gütern umzugehen, ohne sich an ihm zu vergreifen. Nicht die Bewahrung vor der Missetat ist der natürliche Teil, sondern die Gewöhnung an die ständige Tat selbst ist die einzig wirksame Form der sittlichen Erziehung. Und die wollen wir sogar im Bereich der Lehrmittel des Rechenaufbaus treiben.

Als Ersatz für Geld werden von manchen Methodikern Spielmarken empfohlen. Wenn sie auch bei weitem nicht die starke Wirkung des „wirklichen“ Geldes haben, so sind sie doch an zwei Stellen gut zu brauchen: für die Zählübungen bis zur 10 und die Operationen an ihnen, und dann für die Einführung ins System, wo wir die verschiedenartigen als Zehnpenniger, Fünfinger und Mark gegeneinander ausrechnen können.

In diese Gruppe der Lehrmittel lassen sich auch rechnen: Würfel, Perlmuttersteine, Spielkarten und Zählbilderblättchen, deren Verwendung wir an geeigneter Stelle schon gezeigt haben, und zwar nicht nur für Zahlenfassungsübungen, sondern auch für die Übung sinnlicher Operationen. Übrigens braucht man in der Schule meist nur die Anregung zu geben, um die Kinder diese Übungen zu Hause mit Eifer vornehmen zu lassen. Auch besucht es nicht weiter angeführt zu werden, daß Spielmarken und die eben genannten Lehrmittel erst als solche zweiter Linie in Betracht kommen.

Viel wichtiger wieder als sie ist als Rechenaufbau das Metermaß. Als Lineal möchte es in der Hand jedes Kindes sein, außerdem aber auch der größeren Länge wegen in der Gestalt des Bandmaßes, das in jeder Familie zu finden ist, und das man

in den Schrebergesellschaften schon für 10 J. bekannt. Über seine für den Unterricht zweckmäßigste Gestaltung haben wir schon gesprochen (S. 180). Es ist für das 2. und 3. Schuljahr ein ganz unentbehrliches Hilfsmittel. Die Kinder messen aus eigenem Antrieb bald alle Längen, die ihnen unter die Hände kommen. Dabei ist es zu empfehlen, dann und wann die Anregung zu geben zum Mäßen der Längen: „Wie lang war gleich dein Federkasten? Du hast es vergessen? Miß schnell noch einmal! Wer hat sich gemerkt, wie lang sein Klatschen ist? Meßt nach, ob es richtig war!“ usw. Und so werden alle Längen der Schultische — auch Buchentfernungen, Federstrecken, Höhe der Bänkestöcke und — und des Hauses möglichst genau festzustellen und zu einem guten Teil auch im Gedächtnis festzuhalten gesucht. Es ist selbstverständlich, daß wir dabei längere Zeit nur mit Zentimetern messen, und daß wir wesentlich später, jedenfalls erst nach Eintritt in das Spätere, auch Meter und Millimeter gebrauchen. Besonders günstig wird beim Metermaß, daß es der Zahlenreihe eine ihr völlig entsprechende Baumreihe an die Seite stellt. Wir wissen, daß diese Auffassung einseitig ist, aber ebenso auch, daß gerade diese eine Seite sehr berechtigt und notwendig ist. Für andere Auffassungsformen beraten wir andere Hilfsmittel. Auch für die ähnlichen Operationen der ersten Gruppe ist das Metermaß vortrefflich anzuwenden. Mit besonderem Nachdruck hängt sich dabei dem Kinde der Gedanke ein, daß es zweckmäßig sei, beim Zurechtstücken erst den Zehner auszufüllen, beim Abzählen erst bis zum Zehner zurückzugehen. Interessant für die Kinder und bildend ist auch das Verfahren, daß benachbarte Kinder mit ihrem beiden Mäßen zusammenarbeiten. Beim Addieren z. B. wird der erste Summand auf dem linken Maße gemessen, der zweite auf dem rechten und dies an dem Ende des ersten Summanden angelegt, worauf auf dem übrigen Stück des linken Mäßen sofort das Ergebnis abgelesen werden kann. Selbstverständlich ist hierbei nicht beabsichtigt, den Kindern das Rechnen zu ersparen, wie der oberflächlich Urteilende wohl meinen könnte, sondern ein Hinschleiten in die Fortgesetztheit der Zahlenreihe, von welcher wir mit unseren Additionen immer nur hinaus-, aber unmittelbar auseinanderstoßende Stücke in Betracht ziehen. Ganz ähnlich geht die Subtraktion vor sich, die Bemerkungen zwischen Subtraktion und Zulegen treten nicht klar zutage, und auch das Vergleichen und Ergänzen erhält eine neue Stütze ähnlicher Art. Daß natürlich solche Übungen nicht abstrakt und für die Kinder anscheinend zwecklos angestellt werden dürfen, sondern daß sie mit dem frischen Hüten- und Hütewerk kindlichen Lebens zu umgehen sind, dessen Gedankebedarf für den erfahrenen Erzieher keiner weiteren Ausführung.

Als weiteres Lehrmittel — auch für die Unterstufe — empfehlen wir angelegentlich, die Kinder auch mit der Waage hantieren zu lassen. Sie soll also nicht Demonstrations-, sondern Arbeitsgerät sein, und zwar in weitem Umfang. Das mindeste in dieser Beziehung möchte es sein, daß in jedem Schulzimmer eine Waage mit Gewichtsaufsatz sich befindet, auf der die Kinder wechselweise wiegen können, was ihnen unter die Hand kommt: ein Lesebuch, einen Federkasten, das Frühstück, einen Apfel, einen Urtel usw. Man muß es selbst erfahren haben, wie alles Einkorn von Kilogramm und Gramm, ja selbst wiederholte Demonstrationen auf der Waage und Gewichtstafeln, die im Zimmer hängen, einem Teil der Kinder nicht vor Verwechslungen schützt, die dem getreuen Lehrer fast unbegreiflich vorkommen. Man muß aber auch sich darauf besinnen können, wie man als Junge ungeübte Mäde den Wunsch gehabt hat, mit wiegen zu dürfen im Kaufmannsladen; und man muß endlich der eigenen Erinnerung oder der Beobachtung an den Kindern entnehmen können, welche prickelnden Reiz dem ersten Erlebnis des „Wiegensdürftens“ auslöst — um aus diesem zu erkennen, wie die Bekanntschaft des Kindes mit unseren Maßen leichter und langsam erworben wird durch Rezeption, durch akustische oder visuelle, dagegen rasch und sicher durch Handlung, durch Eigentätigkeit. Darum wären 3 Waagen besser als eine, und außerdem gehörte noch auf einen passenden hellen Platz des Schulzimmers eine richtige Decimalwaage.

Endlich gehört in jedes Klassenzimmer für die Zwecke der mathematischen Bildung eine Wanduhr. Sie mag an der Rückwand des Raumes sich befinden. Neben wird sie uns ablenkend, wie uns die Stuhlsuhr beim Arbeiten stört. Wir würden sie auch aus anderen Gründen gerne sehen. Denn die Zeit, in der der Schüler mit einem Blick nach den weit entfernten Fensterscheiben suchte: ist denn die Stunde noch nicht bald herum! ist hoffentlich nun bald vorüber. Wir erleben jede Woche mehrmals den entgegengesetzten Wunsch, und das Bedauern, daß die Stunde schon herum ist. Wir sind noch überzeugt, daß das eine notwendige Wirkung des neuen Geistes ist, der durch die Schulen weht, und daß das jeder Erzieher thermisch fühlt, der mit diesem neuen Geiste und mit warmem Herzen seinem Berufe lebt. Das ist's also überhaupt lieb, wenn die Schüler mit einem Blick nach der Uhr sagen: O, schon so spät! Ganz besonders wirksam aber haben wir es für die mathematische Bildung auch schon der Unterstufe. Das Gefühl für den Wert der Zeit läßt sich nur am Wertmesser erwerben, genau so, wie eine Beurteilung von Baumgrößen nur dem möglich ist, der laufend- und abtauschend sein Rotenmaß benutzt hat.

Wir können der Forderung nicht widerstehen, an dieser Stelle ein wenig den Propheten zu spielen. Wir blicken in eine Zeit, wo die meisten der schönen Rechenmaschinen der Gegenwart nur noch in Schulräumen den stummenden Blicken gezeigt und dem geschichtlichen Interesses erklärt und vorgeführt werden; wo die Schule auch in diesem Stücke die Verbindung mit dem wirklichen Leben gesucht und gefunden haben wird, daß sie rechnen lehrt an den Dingen, und daß die Maße der Dinge, Geld und Meterrnaß, Waage und Uhr, ihre wichtigsten Rechenlehnmittel geworden sein werden. Ob diese Zeit noch fern ist?

§ 31. Die mathematische Form.

Wenn wir hören: 15 durch 3, so tritt uns gleichzeitig das Ergebnis 5 ins Bewußtsein. Dabei sind die meisten von uns gar nicht imstande, zu glauben, daß in dieser Assoziation für das Kind irgend eine Schwierigkeit vorliegen könne; zumal, wenn vorausgesetzt wird, daß schon alter Fladen abgerollt wurde, daß die Summe 15 dabei ins Bewußtsein des Kindes trat, daß auch die Multiplikation der Fünf dazwischen sei, daß endlich sogar schon Verteilen und Messen geübt werden wäre. Und doch müssen wir uns darüber klar werden, daß das Kind wohl imstande wäre, auszurechnen: Wenn ich 15 Pfunde unter 3 Kinder verteile, so bekommt jedes 5 — daß es aber nicht ohne weiteres imstande ist, die Form zu verstehen: 15 durch 3 ist 5.

Dem pädagogischen Leser, der diese Behauptung immer noch bestreiden sollte, stellen wir folgende Erfahrungen zur Verfügung. Unsere Kinder arbeiten die Beispiele des Rechenbuchs öfter voran. Da ist es uns nicht selten begegnet, daß sie sagten: Rechnen kann ich jedes Beispiel, aber ich weiß nicht, wie ich's schreiben soll. Dies geschah bei folgenden Aufgaben: Wieviel Pfundige fallen an 1.4, wenn du einen Pfänder hast? Wieviel Zehner bekommt du für 30.3? Zähle 30.3 so, daß 3 Zehner dabei sind: Du sparst jede Woche 3.3; wieviel Wochen hast du gespart, wenn du 35.3 bekommen hast? Wieviel Bleistifte zu 10.3 kaufst du für 5 Pfänder kaufen? Welche Zahl ist die 4. Zahl in der Zahlenreihe? Wie oft kommt du 9 von 11 und 12 und 13 wegnehmen? Wieviel ist die Differenz von 37? Du schickst 5 Minuten vor 8 Uhr in der Schule sein und brauchst zu diesem Schulwege 10 Minuten; wann mußt du von

⁵⁾ An dieser Stelle, da die Rede gewesen ist vom eigentümlichen Erwerb der Zahl und Operationsbedingungen durch das Kind und von dem dabei in Betracht kommenden Hilfsmittel, möchten wir nicht unterlassen, zuverhuten zu wirken auf zwei Wege, denn: Erstens: wir zu den ungeschultensten Rechenmethoden der Gegenwart stehen: Gurlich, Von schönen Rechenstunden, 8. A., Leipzig, 1911 — und; Langemann, Handbuch des Rechnens, 2. A., Schulbuchverlag, 1913.

zu Hause festgeben? Wilhelm geht abends 8 Uhr zu Bett und steht morgens 8 Uhr auf; wieviel Stunden schläft er? (3. Schuljahr.) — Aus einer Klasse sollten zu Ostern 56 Kinder versetzt werden, 4 sitzen bleiben; wie stark war die Klasse? Eine Frau kauft für 10 $\frac{1}{2}$ Blumenbohnen und für 56 $\frac{1}{2}$ Kürbis; wieviel Pfennige erhält sie auf 1 $\frac{1}{2}$ zurück? Wie groß ist der Unterschied zwischen 24 und 43? Max wird 13 Jahre feiergefeiert; er war der 22. in der Klasse, der wievielte ist er nun? Wieviel ist der 3. Teil von 36? Wieviel Pfenniger kann ich für das Zweierstückstück einwechseln? (3. Schuljahr.)

Bei allen diesen Aufgaben waren die Zahlvorstellungen klar, ebenso die Operationsvorstellungen; die in Betracht kommenden Kinder konnten auch zeigen, wie sie zu dem richtigen Ergebnis gekommen waren. Aber die kurze mathematische Form, in der wir gefordert sind, einen Rechenfall schriftlich festzustellen, die war ihnen entweder unangenehm oder mindestens zweifelhaft. Und dabei waren es die besseren Schüler, die in solcher Weise vorzuarbeiten. Wir wollen damit zeigen, daß die mathematische Form der Lösung einer Rechenaufgabe (bei jenen Beispielen $100 - 90 = 10$; $50 - 3 - 15$; $28 = 10 + 10 + 5 + 2 + 1$; 5 in $30 = 7$ mal; $8 - 8 = 0$; 10 in $40 = 4$ mal; $45 = 5 \cdot 9$; $11 + 12 + 13 = 36$; 9 in $36 = 4$ mal; $\frac{1}{4}$ von $20 = 5$; 8 Uhr weniger 15 Minuten = $\frac{1}{2}$ usw.) für die Kinder eine besondere Schwierigkeit bildet. Dieser Schwierigkeit wird die pädagogische Praxis sich häufig nicht allein oft bewußt, weil sie von vornherein, man möchte sagen: vom ersten Tage an die mathematische Form gibt, schreibt und verlangt.

Denn und wenn auch sie häufig auch Erfahrungen, die ihr zu denken gegeben haben; etwa solche, wie die, daß viele Kinder die mathematischen Formen verwechseln, daß besonders Mädchen sich nicht irre machen lassen, daß Fortbildungsschüler auch sehr einfache mathematische Formen vergessen haben u. d. Im richtigen Gefühl für die Furchen dieser Rechenansage wurde bekanntlich die Lehre von den Proportionen allgemein aus dem Volksschulunterricht gestrichen; diese erschienen als mathematische Formen, für deren Erkennung die Kinder — wenigstens bei dem damaligen Betriebe — offenbar noch nicht reif waren. Klar wurde häufig jene Ursache nicht gesehen; denn angesichts der mangelhaften Ergebnisse wurde von allen Seiten darauf hingewiesen, daß Üben und immer wieder Üben dann doch die Hauptsache im Rechunterricht sein müsse, und man wurde auch die mathematische Form in demselben Maße wie bisher, nämlich mechanisch, weiter geübt.

Dem gegenüber hat es schon eine wertvolle schätzbare Erkenntnis, wenn wir uns dessen bewußt werden, daß ein Kind recht wohl einen Rechenfall vorstellend bewältigen kann, ohne zugleich

die mathematische Form zu beherrschen, in die wir diesen Rechenfall zu kleiden pflegen. Aus dem allen folgt für unser unterrichtliches Verhalten dreierlei: Zunächst, daß die mathematische Form nicht von Anfang an erscheinen darf; sodann, daß sie langsam eingeführt werden muß, nachdem eine gewisse Geläufigkeit in der Behandlung der bekannten Fälle erzielt worden ist; endlich, daß sie auch bei den späteren eingeübten Aufgaben nicht einfach vorausgesetzt werden oder angegeben werden darf, sondern als besondere Teilaufgabe jedes Rechenfalles auszusuchen und zu behandeln ist.

Jezt erste Forderung zufolge ist es durchaus nötig, im elementaren Rechenunterricht die Kinder eine Zeit hindurch sämtliche Aufgaben, die sie zu Hause haben, in ausgeführter, d. h. mit konkretem Darlegung versehen zu lassen, also mit vollständiger Benennung und ohne jede mathematische Form. Etwa so: Wenn ich 4 Schiefertafeln habe und schenke davon dem Karl einen, dann habe ich selber bloß noch 3. Wenn ich 10 3 in meiner Sparsbüchse habe, und meine Schwester bloß 8, dann habe ich 2 mehr. Wenn ich an dem einen Sonntag von meinem Vater einen Pfarrer kriege, und an dem andern Sonntag noch einmal einen, und dann noch einmal einen, dann habe ich 15 3. Wenn die Mutter von 12 Hühnern gibt zum Verteilen, dann kriegt jedes von uns 3 Kindern 4 Hühner. — Dabei muß bemerkt werden, daß diese Beispiele den Betrieb an wirklichen Gegenständen und mindestens auch dinglichen Symbolen schon voraussetzen; es sind — wie jeder sieht — Vorstellungsexempel, nicht Wahrnehmungsexempel (vgl. S. 981 unter 1).

Sodann unsere zweite Forderung, daß die mathematische Form langsam eingeführt werden muß. Hier erhebt sich die Frage nach dem rechten Zeitpunkt ihres Eintretens. Sie kann selbstverständlich nicht mit Zeitangaben nach Wochen und Monaten beantwortet werden. Allgemein darf man sagen: Lieber nicht zu früh. Es ist jedenfalls Zeit genug, wenn die Kinder das Bedürfnis spüren, sich kürzer zu fassen; wenn also die Expansion an Zeit, die in der kürzeren Fassung zunächst zum Ausdruck kommt — abgesehen von der Abstraktion — den Kindern zum Bewußtsein kommt. Das ist in den Anfängen schon möglich, wenn die Kinder noch mit dinglichen Symbolen rechnen, mit Fingern, Zählsteinen, Kastanien, mit dem Kugeln der Rechenmaschine usw. Gerade der Gedanke der dinglichen Symbole, das heißt ihr Eintreten für die eigentlich gemeinten Dinge — Kinder, Hühner, Hühner, die nicht vor Hand sind usw. — verlockt ja gerade zum Weglassen der eigentlichen Bezeichnung. Und damit wird eben die mathematische Form eingeführt. Wenn an Dingen und dinglichen Symbolen genügend gearbeitet worden ist: 10 3 und 3 3 sind zusammen 13 3; 9 3 und

2.3 sind zusammen 11.3; 13.3 und 4.3 sind zusammen 16.3 — selbstverständlich wechselnd auch an anderen Sachgeheimen — dann werden ohne Schwierigkeit die nächsten Formen lauten können: 11 und 4 sind 15.3; 3 und 3 sind 12.3; die Bezeichnung erscheint nur noch einmal, und außersprachliche Wörter bleiben auch sonst weg¹⁾. Und ein anderes mal wird man — mitten in der Übung — auch noch diese letzte Bezeichnung weglassen können, so daß damit die mathematische Form dieser Operation beinahe schon erreicht ist.

Eine ist hierbei noch wesentlich. Wollen wir unsere Kinder in den Geist der Sache einführen, so müssen wir sie von vornherein daran gewöhnen, daß die mathematische Form nur Mittel ist zum Zwecke der Kürze bei unverminderter Klarheit, daß sie also nicht Selbstzweck ist. Dies können wir nur dadurch erreichen, daß wir die mathematische Form nicht starr einlassen, sondern daß wir Änderungen gestatten, je zu solchen Änderungen selbst anregen. Daß hierzu die sehr einfachen Formen der Addition und Multiplikation wenig Gelegenheit bieten mit ihrem „und“ und „mal“, ist ohne weiteres klar und schadet auch nichts. Es sind noch genug andere Möglichkeiten da; z. B. in der Subtraktion: 5 Federn, eine weniger, nun sind's noch 3; 6 Federn, weniger eine (die Form fällt den Kindern mit an schwererem), dann sind's noch 5; 6 Federn, eine weg, sind 5; 6 Federn, weg eine, bleiben noch 5 usw. Man sieht, daß die Möglichkeiten der Abänderung vielfach gegeben sind und sich je nach dem Verständnis der Kinder vermehren lassen (mit Ausdrücken wie vermindern, verringern, abziehen usw.). Beim Teilen und Entnehmen ist es ähnlich.

Ein vorläufiges Ziel auf dem Wege zur Entwicklung der mathematischen Form, das heißt ein solches, bei dem längere Zeit stehen geblieben werden kann, zeigen folgende Beispiele: 5 und 7 sind 12; 12 weniger 3 sind 13; 12 sind 16 und 8; 17 sind 8 mehr als 16; 8 mal 4 sind 34; 5 in 20 geht 4 mal; 20 geteilt unter 5 sind (für jedes) 5; 40 sind 8 Achten (oder 5 mal 8).

Die dritte der oben aufgestellten Forderungen, daß die mathematische Form auch späterhin als besondere Aufgabe jedes eingeleiteten Rechenschlusses anzusetzen und zu behandeln sei, ist nicht weniger wichtig als die beiden ersten. Doch lassen sich die Darlegungen an dieser Stelle wesentlich abkürzen. Denn bei solchen Aufgaben kommt es nicht so sehr darauf an, den mathematischen Sachverhalt, als den allseitigen Teilzustand und seine Veränderungen, aufzufassen und mit Zahlenbeweisen zu verfolgen, sondern

¹⁾ Besonders bemerkenswert ist die von vielen Pädagogen längst geübte Art, die Gleichheitsausdrücke längerer Zeit „sind“ schreiben zu lassen, auch dann noch, wenn die Kinder schon so weit sind, die Gleichungen auflösen zu können, z. B. 50 und 10 sind 100. Erst später tritt an die Stelle des „sind“ die in diesem Falle allgemeinere Bezeichnung „ist“.

darnach, das Vorgestellte in die kürzeste und übersichtlichste Form zu bringen zum Zwecke der schriftlichen Aufzeichnung¹⁾. Dadurch nun, daß dieser neue Zweck hineinspielt, wird das Verfahren beschleunigt, und die Darstellung der Behandlung dieser Aufgabe verpflückt sich also an der entsprechenden späteren Stelle.

§ 32. Die mechanische Geläufigkeit.

Die Notwendigkeit der Eingprägung rechnerischer Sätze ist noch niemals bestritten worden. Alle Werke über Rechenerunterricht, alle Verordnungen der Behörden, alle Ratsehlagen der Erfahrenen weisen geradezu miteinander in der Empfehlung der „Übung“.

Durch diese Eingprägung und Übung soll eine völlig mechanische Geläufigkeit der elementaren Rechenartikeln erzielt werden, jener Rechenartikeln, die wir als Bedingungenartikel mit 3 Begriffen zusammen gefaßt haben: drei Zahlenbegriffen, dem Operations- und dem Gleichheitsbegriffe. Rechenartikeln solcher Art sind $7+6=13$, $7-6=1$. Ja, es ist nicht schwer, sich das Gesamtgebiet dieser Rechenartikeln zu vergegenwärtigen. Ein vorläufiger Überblick ergibt folgendes: Die Addition und Subtraktion einstelliger Zahlen, das kleine Einmalein, vielleicht noch die Multiplikation und Division mit 10 und 100. Doch braucht dies letztere noch nicht hierher gerechnet zu werden, sondern kann als Ausdruck der Systematisierung erscheinen. Alle diese Sätze sind dem Erwachsenen mit normaler Rechenfertigkeit so geläufig, daß ihm jeder einzelne Satz wie ein Elementargebilde erscheint, mit dem er handelt wie mit Gattungsbegriffen (Haus, Straße, Mann) oder Beziehungsbegriffen (auf, in, dem gegenüber), wo das Wort die Begriffsinhaltsvertretung übernimmt hat. Oder, um noch einen homöomeren Vergleich zu bringen: Diese Sätze sind so stielicher-Geläufigkeit in unserem Denken gelangt, wie sie etwa folgenden Umständen eigen ist: Wasser macht naß; Wenn ich den Stift in meiner Hand bekomme, fällt er zu Boden; Wenn die Pflanz naß, kann man nicht dem Vorgegessenen nachgeben — oder auch folgenden Ausdrücken des Umgangs: Wollen Sie so freundlich sein... Ich danke Ihnen vielmals... Es hat mich sehr gefreut... Ich bedauere lebhaft... usw. Genau so, wie unser äußeres und inneres Verhalten, unser Denken und Handeln diese mechanisierten Sätze kennt — die einen gewissermaßen als seine Voraussetzung, die anderen als seine Kleinanzeigen — und Ihnen genau sich gestaltet, genau so ist die Raschheit, Sicherheit und Leichtigkeit aller rechnerischen Tätigkeit bedingt von der mechanischen Beherrschung der

¹⁾ Darauf weisen ja auch die obigen angeführten Behauptungen hin, da die Kinder sich eben selber Hände reiben, das Beispiel in ihrem Buche schriftlich die prägnante Form zu geben.

einfachsten Rechenstoffe. Eine Hausfrau, die im Fleischerladen oder beim Kaufmann nachrechnen will, ob sie das richtige Gewicht erhalten hat, muß über die elementaren Operationsregeln nachdenken verfügen. Und wer Gleichungen auch nur 1. Grades nachrechnen will, dem müssen außerdem auch einfache Sätze der Algebra — z. B. der der Contrahenten $a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$ — im Schilde geläufig sein, und dies ist nicht bloßlich, sondern wörtlich zu nehmen. Allgemein: wenn wir unsere Aufmerksamkeit dem sachlichen Zusammenhang eines Rechenfalls zuwenden wollen, muß anbelangt die mechanische Geläufigkeit der Americanismen als Bewußtsein dahinter stehen. Ohne sie ist eine mathematische Sachaufklärung, die auch nur wenig über die Elementarstufe hinausgeht, nicht möglich. Und selbst das elementare Rechnen mit zweistelligen Zahlen setzt die Geläufigkeit jener einfacheren Rechenstoffe voraus.

Nachdem so Zweck und Ziel der Eingprägung klargestellt ist, wenden wir uns dem Verfahren zu. Vorher aber ist nötig, nicht bloß in einem summarischen Überblick den Stoff des Eingprägten zu kennen, sondern genau festzustellen, welche Zuerstung an den einzelnen mit dem Bewußtsein der elementaren Rechenstoffe gestellt wird. Das Ergebnis einer solchen Aufstellung ist recht bemerkenswert. Wenn wir folgende Voraussetzungen machen: 1. daß die Zahlenreihe als vorhanden angenommen wird; 2. daß die Zahlenstellung des Systems so weit vorgezeichnet ist, daß beispielsweise 27 als 7 und 20 und 30 als 3 Zehner aufgefäßt wird; 3. daß der Gedanke der Umstellung und Umkehrung (z. B. $7+2=9$, $2+7=9$; $5+3=8$, $3+5=8$) außerdem $2+2=7$ und 3 in 18 ist 6 mal) als geläufig angesehen werden kann — so würde zunächst folgende Gruppe von Additionen zu kennen sein:

$2+2=4$	$3+3=6$	$4+4=8$	$5+5=10$
$2+3=5$	$3+4=7$	$4+5=9$	
$2+4=6$	$3+5=8$	$4+6=10$	
$2+5=7$	$3+6=9$		
$2+6=8$	$3+7=10$		
$2+7=9$			
$2+8=10$			

10 Additionen;

dazu käme als zweite Gruppe:

$7+2=9$	$8+3=11$	$7+4=11$	$6+5=11$
$7+3=10$	$8+4=12$	$7+5=12$	$6+6=12$
$7+4=11$	$8+5=13$	$7+6=13$	
$7+5=12$	$8+6=14$	$7+7=14$	
$7+6=13$	$8+7=15$		
$7+7=14$	$8+8=16$		
$7+8=15$			
$7+9=16$			

20 Additionen;

endlich kann dann als dritte Gruppe, wobei zu beachten ist, daß die Verknüpfung einer Zahl schon in den Gruppen der Addition enthalten ist:

3-3=9	4-4=16	5-5=25	6-6=36
3-4=12	4-5=20	5-6=30	6-7=42
3-5=15	4-6=24	5-7=35	6-8=48
3-6=18	4-7=28	5-8=40	6-9=54
3-7=21	4-8=32	5-9=45	
3-8=24	4-9=36		
3-9=27			
7-7=49	8-8=64	9-9=81	
7-8=56	8-9=72		
7-9=63			

28 Multiplikationen.

Subtraktion, Teilen und Messen, additives Vergleichen sowie Zerlegen in Summanden und Faktoren fügen — wie schon angedeutet — nicht Neues hinzu, sondern beziehen sich auf die schon entsprechenden Zahlgrößen.

Diese 64 Sätze sind also der gesamte assoziative Grundstock, auf dem nicht nur das ganze elementare Rechnen der Schule, sondern auch das gesamte Rechnen des praktischen Lebens des Arbeiters wie des Geschäftsmanns, der Mager wie des Astronomen sich aufbaut, ja das auch aller berufliche Rechnen wie alle höhere Mathematik nicht entbehren kann.

Man hat gemeint, daß diese paar Sätze doch in kurzer Zeit zu lernen seien, haben wir doch in unserer Jugend mehr denn 700 Sprüche, dazu Gedichte, Lieder und sonst etwas gelernt. Und man betrachte hier wie da als einzigen Mangel der Eingeprägung die Übung und Wiederholung.

Sehen wir uns zunächst einmal diese beiden Begriffe an, die vielfach gleichgesetzt, vielfach auch ohne weitere Begründung nebeneinander gestellt werden. Dem Wortsin nach ist beides nicht dasselbe. Der weitere Begriff ist die Wiederholung. Er besagt lediglich, daß dasselbe psychische Erlebnis mehrfach auftritt. So bringt jeder Tag die Wiederholung des Aufkleidens, des Frühstückens, die Wiederholung des Schutzeugs usw. Erst eine Wiederholung, die dem besonderen Zwecke der Kraftsteigerung, der Kampfpertinenz, der Leichtigkeit, Schnelligkeit und Sicherheit des Vorgangs diene, und eine solche Wiederholung verdient den Namen Übung. Sie ist demnach eine Wiederholung zum Zwecke der Verwirklichung in Erleichterung und Differenzierung des Vorgangs⁷⁾.

⁷⁾ Demnach darf trefflich nicht verworfen werden, daß scholastisch der Ausdruck Wiederholung in einem anderen, viel engeren Sinne gebraucht wird,

Das Ten der alten Schule, das hier in Betracht kommt, läßt sich also beschreiben als Wiederholung mit dem Zwecke des Festhaltens einerseits, Übung der sofortigen Bereitschaft anderseits. Um diese beiden Zwecke, die in dem Ausdruck „mechanische Geübtheit“ sich zusammenfassen lassen, zu erreichen, verwendete sie als wichtigstes und zum größten Teil als einziges Mittel — bewußt oder unbewußt — die Klappprägung der Wortreihen. Täglichen Anhängen des kleinen Einmaleins war es in der Hauptsache, das teils allein, teils im Wechsel mit anderen assoziativen Übungen Jahre hindurch getrieben wurde. Diese Übungen haben nicht nur eine eigene Literatur hervorgerufen, sie haben auch eine Reihe von Lehrmitteln bewirkt, die lediglich diesem Zwecke der wirklichen Einprägung des Einmaleins usw. dienen sollten. Und als wir von der geringen Zahl der „zu Lernenden“ 64 Assoziationen bewußt wurden, trat da nicht auch an jeden von uns der Gedanke heran: Das müßte doch wahrhaftig von jedem Kinde zu begreifen sein — eben im Sinne des Wortesinn? Es war das Geist von allen Geist.

Von bei den Wortlernen zweifellos sehr Gutes geholt und sein Recht dazu, und es wäre glänzlich verfehlt, dies zu verkennen¹⁾. Daß das mechanische Wortgedächtnis einen gewissen Anteil bei an dem Gelfußwerden der Rechenstoffe, dafür bestehen zwei einleuchtende Gründe. Zunächst der, daß bei der Abstraktion der Begriffe, die bei den Zahlbegriffen früh schon einen ziemlich hohen Grad erreicht, dem Wort eine viel größere symbolische Bedeutung zukommt als bei Sachverstellungen, die gegebenenfalls ohne Wortsymbol bestehen können. Diese hohe Bedeutung führt von dem, daß das Wort für die meisten Menschen in einem gewissen Alter zur einzigen Vertretungsvorstellung der Zahl- und Operationsbegriffe wird, selbst dann, wenn sie einen Rechenunterricht genossen hatten, der zur Konkretisierung reichlich Gelegenheit bot. Die wichtigste Vertretungsvorstellung eines Begriffs ist aber selbstverständlich durchaus nötig, wenn es sich um sein Gelfußwerden handelt. Dazu kommt als zweiter Grund, daß die mathematischen Erlebnisse in der Regel eine wesentlich geringere Gefühlshenkenhaftigkeit haben als viele andere psychische Erleb-

nicht als Wiederholung einer geistigsehrlich betrachteten Vorstellung oder Wortreihe. In diesem Falle bedeutet der Begriff Wiederholung des Sinn, sich an den Unterrichtsstoff als Objekt zu heften, während die Übung im Gegensatz dazu mit Kritik, Fähigkeiten und Fertigkeiten sich befaßt. Im weiteren psychologischen Betrachtungen ist allerdings dieser Sinn des Wortes Wiederholung nicht zu beachten.

¹⁾ Auch der Heide Rine des Rechenzins hat ein zu weitläufig abgegrenztes Urden. Hierin, einem gegenüber Rechenzins, die sich als Mithrasch sehr überhöhen. Einmalige Auffassung, dass es sich ganz Gelfußzins darstellen. Ob das der Fall ist, kann nur eine sachliche Prüfung erweisen.

zines (z. B. die Erzählung einer Geschichte, die Schilderung einer Landschaft, die Betrachtung eines Bildes usw.). Sie bedürfen deshalb in höherem Maße als andere Inhalte des wiederholten Eintriffs ins Bewußtsein unter darauf gerichteter Aufmerksamkeit, um diejenige Beharrungs- und Wirkungsfähigkeit zu erreichen, die gefühlbetonte Inhalte haben. In der Form der Redefragmentassoziation erlangen sie nach und nach den Charakter und die Stärke von Bewußtseins, die zu unserer Verfügung stehen. In solcher Weise erwerben wir die Einzelheiten eines täglich zurückgelegten halbstündigen Wegs; in derselben Weise ist aber auch eine fest eingetriggte Wortreihe insofern, eine parallele Reihe von Sach- oder Wortvorstellungen zu stiften, die an sich des anschaulichen oder des inneren Zusammenhangs entbehrt. So sucht sich z. B. mancher durch das Merkvers „In Richters Ofen . . .“ die Reihe der Fasernummern zu erleichtern. In derselben Weise — nur ohne die Absicht, gleichzeitig entsprechende Sachvorstellungen zu erwerben — eignen wir uns die weiter oben als Beispiele angeführten Redemaarten an, sie und viele andere, die ausflagen sollen, aber völlig unverbundlich sind, namentlich in den Imperativen. In derselben Weise fallen beim Kinde Sprache und Sache auseinander. Ein kleines Kind, das die Redemaarten der Erwachsenen beobachtet, findet wir störrig, oder wir stehen über seine Fröhen; das haben wir nicht nötig, denn meist ist mit jedem Wort nur ein Schimmer von Verständnis verbunden. Es ist ähnlich, wie wenn ein 20-jähriges Kind erzählt, wie sein größerer Bruder sich ein lateinisches oder französisches Gedicht in vielfacher Wiederholung eingepäit. Es lernt dabei die Wortfolge, und diese Komoteie kann ihm eine Erleichterung sein, wenn es später sich vor dieselbe Aufgabe gestellt sieht. Auch bei den anderen Beispielen ist sich ein gewisser Zukunftszeit nicht leugnen.

Diese Bedeutung der Wortgeklügheit der Annahoboden, auch der mathematischen, ist von jeher bekannt. Sie ist es, die die Methodikbücher im Auge haben, wenn sie von der „Übung“, der „unabhängigen Wiederholung“, so Godes erwarten; sie ist es, die die Praxis unseres Rechensunterrichts mit den entsprechenden „Übungen“ zum größten Teil ausgefüllt hat.

Dam gegenüber dürfen wir nun aber nicht die Augen verschließen vor den Nachteilen einer bloßen Wortgeklügheit. Auf drei- und fünf Mal hat hingewiesen werden. Das mechanische Wortgeklügheit ist zunächst völlig wertlos. Das Kind, welches in solcher Weise ein Einmaleins „lernt“, ist mit demselben Reize ein: 7-8=54 und 8-9=55; es lernt ebenso leicht Richtiges als Falsches. Das ist beim Sprechenlernen etwas ganz anderes, wo die einzelnen Wörter durch den Sinn zusammenhängen und durch die Sachvorstellungen als notwendige Teile eines plasti-

sehen Bilden erscheinen. Von haben wir schon an anderer Stelle gesagt (S. 147), wie schwer es ist, eine falsche Assoziation, die sich schon bis zu einem gewissen Grade befestigt hat, wieder zu entfernen. Jedes Kindwerk kann die alte falsche Form noch neben der neuen richtigen aufbewahren. — Es sei weiter der Fall gesetzt, daß das mehrstreckte Einprägen der Worte ohne Felder vor sich gegangen sei und eine gewisse Festigkeit erreicht habe. Dann ist trotzdem die mathematische Assoziation noch sehr unzuverlässig. Das mag nicht in gleichem Maße von allen Wortassoziationen gelten, z. B. nicht von Liedern, Sprüchen und Geplätschen. Hier ist aber eben der Sinn dabei, der uns die „Sinn“-Sprüche unserer Dichter auch in ihrer Form getreu bewahren läßt. Oder es ist die Gefühlsbetontheit oder gar heikere Momente, wie Reim und Rhythmus, wie bei vielen Liedern, die auch das Behalten des Wortlauts unterstützen. Vom Sinn der mathematischen Sprüche wollten wir nach unserer Voraussetzung absehen. Und die übrigen Stützmomente finden sich nach unserer Erinnerung an die eigene Kindheit und nach den Beobachtungen der Praxis nur bei ganz wenig Schülern¹⁾. Die Unzuverlässigkeit der mathematischen Wortassoziationen zeigt sich darin, daß sich das Kind leicht irre machen läßt, z. B. wenn ihm von seinen oder einem anderen Kinde eine falsche entgegenstellt, die aber mit voller Bestimmtheit vorgebracht wird. Es hängt zusammen — wie man sofort sieht — mit jeder schon erwähnten Urteilslosigkeit. Es hat andererseits ihren Grund in der weiter oben angeführten Fortsetzung von Bauschberg (S. 148), daß „sich herrschende Inhalte und Vorgänge der Seele sich in ihrer selbständigen Entwicklung um so mehr röhren, je konkreter sie sind“; anders ausgedrückt: daß ähnliche Sätze zur Verwechselung neigen — wovon erklärt ist, daß auch fest eingeprägte Wortreihen „vergessen“ oder besser vermischt werden, wenn die Zeitraum geringerer Übung sich dazwischen schiebt, wie es die Fortbildungsschule allgemäin zeigt.

Ein dritter Nachteil der bloßen Wortgehilffigkeit ist endlich die Tatsache, daß sie durchaus aufrechenbar ist. Ein Kind kann deutsche oder fremdsprachliche Sätze auswendig lernen, ohne eine Ahnung von ihrem Inhalte zu haben. Ebenso kann man Schwachsinnigen das ganze kleine und große Elementarwissen einprägen, daß sie es mit unerschütterlicher Sicherheit „abgeben“. Aber für die mathe-

¹⁾ Eigentlich nur bei reinen Gleichungen, Radikalen und Rhythmen bei denen: „A + 4 = 20“ und diese Bedingung „auf“ ist hier ähnlich, weil also von dem Kindersprachen, die nicht angeblich die Form ist auch so häufig, und der Mann ist bekannt, ganz die Wahrheit hinter sich“. Und dann bei dem anderen: „A + 2 = 20“, wobei das Sprechen die nichtunterstützte Zahlenserie beachten soll. Letztes und dieses ist unverständlich. Auch hier ist es ein unvollständiges Moment, das das Behalten unterstützt.

maltisches Vorstellen, für die Rechenen ist diese Art von Assoziation wertlos. Denn nicht die Worte sind es, die den Anwandern in sich schließen, sondern die hinter den Worten stehenden Vorstellungen und Begriffe.

Ganz gewiß — so können wir dem Vertreter der alten Schule sagen — soll das Wortlernen nicht überhastet werden; aber ebenso wichtig ist es, seine Nachteile nicht zu überschätzen. Und er weist darauf hin, daß das „unreife“ in der Praxis doch keine Berechtigung habe, da man sich allenthalben bemühe, „von der Anschauung auszugehen“ und das Verständliche erst zu erzeugen; daß ferner dem „unverlässig“ durch ununterbrochene Übung vorgebeugt werden könne; daß endlich das „unreife“ doch nur für eine gewisse Zeit gälte — es habe sich so vieles, was zunächst nicht verwertbar schien, später als recht fruchtbar erwiesen. Und daß der Besitz des Gefühls des Erwerb des Inhalts erleichtere, sei ja schon von ihm selbst angegeben.

Darauf wäre folgendes zu erwidern. Mit dem ersten solcher Hinweise gibt der Vertreter der alten Schule unsere Behauptung vom Nachteil der bloßen Wortgeübtheit etwas weiches an. Dazu berufen seine Behauptungen über die Praxis auf dem Irrtum, daß mehrmaliges Vorstellen — vielen gerät nachfolgend einmaliges — eines konkreten Rechenstilles „Anschauung“ sei²⁾; und daraus geht wieder der andere Irrtum hervor, daß solche Anschauung das „Verständliche“ erzeuge. Um ferner die bloße Wortgeübtheit unverlässig zu gestalten, bedarf es eines solchen Aufwandes an Zeit, daß darunter andere wichtige Aufgaben, wie z. B. die Anwendung, zu kurz kämen, insbesondere, wenn es gilt, jahrelange Übungspausen zu vermeiden. Endlich: das „fruchtbar für später“ ist ein beliebter Grund aller Reformstunde. Sie halbiges bewußt oder unbewußt dem Grundsatze, daß das, was ihnen selbst nützt, nützt auch und wertvoll ist, Lerngut für die Jugend sein müsse, damit dessen Erhaltung gesichert bleibe. Kenntnis der Geschichte und der Psychologie würde als eines besseren belehren können. Und selbst wenn das „fruchtbar für später“ richtig wäre, würde sich die Frage nach dem entsprechenden Kompensationswand erheben. Über glauben sie ja, ihre starke Stütze zu haben an dem „Tatsache“, daß das Gedächtnis des Kindes weitaus stärker sei als das des Erwachsenen, daß es bis zum 14. Jahre zunähme und von da bereits wieder zurückgehe. Das hat aber die psychologische Forschung längst als Irrtum erwiesen³⁾. Das bloße Wortlernen ist also ein Energieverschleiß.

²⁾ Man vergleiche nochmals diese sogenannte „Anschauung“ mit der wirklichen und ohne weiteres, wie wir die S. 137—141 gekennzeichnet haben.

³⁾ Nach einer weit verbreiteten Meinung soll bei dem gesunden Menschen das „logische“ beim Ende des „psychologischen“ Gedächtnisses das stärkere sein. In der Tat stützt dieser Gedankengang bewußt unbewußt, als wäre in der Regel die

Und selbst der Hinweis auf das Bild des Gefäßes ist nicht angebracht; denn das Bild ist nur in einem gewissen Sinne richtig, in dem nämlich, daß, wo das Bedürfnis nach der Sache vorhanden ist, selbstverständlich auch für ein Gefäß für die Sache gesorgt wird. Umgekehrt aber für ein Gefäß zu sorgen, damit die Möglichkeit gegeben sei, es später zu füllen, wird jedermann — mit Ausnahme dieser Wortklopperinnen — für unvernünftig halten. Man denke an drastische Beispiele, wie, daß man einem Kinde eine umfangreiche Brieftasche schenken wollte für künftige Banknoten oder einen Stock gewandter Glasknoten für eine künftige Schenkerlingsanerkennung, oder einem vertriebenen Musikanten, damit es ein großer Künstler werde, oder wenn sich jemand 1000 Bogen Papier kaufen wollte, weil er vielleicht später einmal Lust bekommen könnte, ein Buch zu schreiben. —

Es ist also ein großer Irrtum, der bloßen Wortverprägung einen mehr als minimalen Wert beizumessen. Daß dieser Irrtum auch weite Kreise erfüllt, zeigt sich in der allgemeinen Empfehlung der „Übung“, welche den mangelhaften Erfolgen unseres Rechenunterrichts abeteln soll, einer Übung, welche nach den Gegebenheiten und Möglichkeiten der jeweiligen Praxis in der Hauptsache eben nur als Wortlernen erscheint.

Die Berücksichtigung des Wortbegriffs einerseits, seine Nachfolge andererseits lassen die Frage nach der rechten Würdigung oder besser nach der rechten Stelle seines Erscheinens auftauchen. Sie ist bald beantwortet. Die Wortverprägung wird nämlich nicht als Krone, eine Last, sondern eine Hilfe sein, wenn sie eintritt, nämlich, im mathematischen Bewußtsein der Kinder so weit in die Zahlenrichtung eingedrungen ist, daß ihnen eine gefühlsmäßige Schätzung zur Verfügung steht. Diese gefühlsmäßige Schätzung sagt dem Kinde, daß das Ergebnis der Rechnung 9 und 8 im 2. Zehner liegen wird; daß das Ergebnis der Rechnung 9 mal 8 aber eine ziemlich große Zahl ergibt, die fast die 80 erreicht; oder daß 8:7 bedeutend mehr ist als 8:8, daß dagegen 8:8 und 7:8 nicht weit voneinanderstehen werden, ebenso wie 2:4 und 3:2 oder 6:3 und 4:7 usw. Wenn dies gefühlsmäßig

einem künftigen mathematischen Bewußtsein sehr Interesse besitzt und daher überhaupt keine Hilfe damit verbunden, ihn sich auszuweisen, während das Kind ihnen gewogen wird. Es sich ist aber, wie gewogene mathematische Vorzeichen unter Befolgung gleicher sonstiger Bedingungen möglich, dann Aussehen haben. Vielmehr ist das Gedächtnis erwachsener Menschen hauptsächlich Leistungs-Mittel als das der Kinder, und dieser Versuch handelt sich sowohl auf diesem Material wie auf logisch-mathematischen Verbindungen. *Wacht, Gedächtnis* II, S. 4. S. 104.

Folgt dem auch der Ausgang von E. Ford in dem spätem Abschnitt „Die reine und die betonte Zahl“.

mäßige Taktieren auf Grund wiederholter, allseitiger, insbesondere auch handgrifflicher Anschauung und entsprechend eigenständiger Darstellung erreicht ist, dann mag man getrost das Anwendenlernen mit heranziehen. Der Satz $8+7=15$ ist, wenn er nun erst gelernt wird, vielfach von dem Unterrichtsverlaufe begleitet: Daß du es nicht verwechselst mit $9+6$ $9+6$ ist 6 weniger als 15. Die Wertempfindung ist nun keine Last mehr, sondern eine Hilfe, die aber nicht alles starker Belastung ausgesetzt wird, weil sie allenthalben über anschauliche und begriffliche Sicherung findet. Daraus geht hervor, daß sie eigentlich erst zu einer Zeit statthat ist, wo sie sich als sprachlicher Ausdruck der betriebliehen anschaulichen Erfahrung in den meisten Fällen schon von selbst assoziativ zu sichern beginnt. Sie gehört somit nicht auf die Unterstufe, hat dagegen auf der Mittel- und Oberstufe ihre Berechtigung. Der jetzige Unterricht aber hat sich nicht nur einer Überschätzung, sondern auch einer Verfrühung der Wertempfindung schuldig gemacht.

§ 33. Die Einübung der Rechenstärke.

Die Geläufigkeit der Association ist bedingt und wird darum mit wirklichem Erfolge angestrebt durch ihre Einübung auf anschaulicher Grundlage. Was darunter zu verstehen ist, haben wir schon in früheren Abschnitten angeführt: Auffassung und Darstellung der Operationstafel und ihrer im Dezimalsystem ausgedrückten Ergebnisse an wirklichen Dingen, dinglichen Symbolen und Zeichensymbolen; und zwar von selbst jedem einzelnen Kinde und selbstverständlich mit sprachlicher Darstellung und mathematischer Formulierung des Vorganges. Dabei ist zu betonen, daß die sich selbst aufdringende Wertempfindung nicht nur nicht gefördert, sondern manchmal geradezu gehindert werden möchte zugunsten der Sachvorstellung. Nicht an Wörter, noch nicht an Ziffern sollen die Kinder denken, wenn sie beispielsweise 50 zu 100 zu ergänzen haben, sondern sie sollen Dinge oder Symbole oder symbolische Raumvorstellungen vor sich sehen, wenn auch noch so schwach, und auf Grund dieser Vorstellung verstehen, daß in jenem Falle noch 50 Einheiten notwendig sind. Ein solches Verfahren gedankelosen, d. h. vorstellungsfreier Einprägung kann aus der Praxis heraus kaum empfohlen werden¹⁾. Später, wenn man mehr

¹⁾ Bei der Übung von Zahlenergänzungen wie $50+50$ habe ich stets gesagt: Wir wollen uns jetzt eine Waage mit zwei Schalen legen, Gewicht vorstellen. Fünfzig ist 5 Schalen? Und 5 Schalen? Gold es? Nun wurde keine Zeit gelikt, bald ohne Darstellung der Rechenung, „es wissen ja, was gemeint ist“. Da kam ein Kind dazu, was dem ich wollte, daß es dem nächsten Anwesenden mitteilt. Als es zum Beispiel sagte, sollte ich nachher noch ganz phlegmisch

und mehr zum Verlassen der Benennung übergegangen ist, soll doch jedes Kind jederzeit in der Lage sein, den gegebenen Rechenfall zu konkretisieren¹⁾.

Durch dies oft wiederholte anschauliche, greifbare und vorstellbare Auffassen und Darstellen der Rechenfälle erreichen wir noch und noch, was wir weiter vorn bezeichnet haben als adäquate Assimilation: eine Assimilation nämlich der, daß man einem Bekannten schon auf weite Entfernung mit unfehlbarer Sicherheit an seinem Gange erkennt; ein Erkennen also, das nicht mehr unklar allgemein urteilt; nicht mehr vermutet, nicht mehr irgend darüber groß, sondern das handfest mit Sicherheit das Richtige trifft. Dadurch gelingt es, das Unterbewußtsein der Beziehungsergebnisse, das sich allmählich gebildet hat, so weit zu befestigen, daß es geschäftlich schon wirkt bei der Auffassung des zu lösenden Problems. Die darauf folgende mechanisierende Reproduktion hat dann keine andere Aufgabe, als das Unterbewußtsein in eine Bewußtheit zu verwandeln.

Außer der einen Forderung, alle rechenstechnischen Übungen auf anschauliche Grundlage zu stellen, müssen wir, wenn die unbedingte Geläufigkeit der Rechenmasse unser Ziel sein soll, noch die andere erheben: alle rechenstechnischen Übungen so zu gestalten, daß das Kind durch sie zu immer größerer Klarheit über die Zahlverstellungen wie über die Zahlbeziehungen gelangt, daß es seine Zahlbegriffe zu immer vollständiger Durchsichtigkeit und Veredlung bringt. Ein ausgezeichnetes Mittel dazu ist es, wenn wir die Kinder auf Arbeitsmethoden — nicht auf Normalverfahren — einstudieren, die mathematisch besonders praktisch sind. Solche Arbeitsmethoden gelangen zur Ausbildung, wenn wir uns bemühen, die Zahlbeziehungen täglich untereinander in Verbindung zu setzen.

Klaus: Bestimmen. Daß das Kind wiederholte Bestimmen. Das war natürlich für andere andere ein Gedanke, und ich sagte Klaus: Was ist das? Klaus: Das ist, wenn man das nächste Mal vorantreten soll.

¹⁾ Angenommen, die die gleichen, die Kinder können nicht, von der Anschauung her, nicht verstehen, die die Überzeugung sind, daß es etwas gewesen. Alles das Rechen, „wie begrifflich“ von sich gehen können, kann man, Trübe gesagt, werden, daß die von ihnen gestellte Erklärung mit Sicherheit darstellt, je nach unserer Erklärung in das gesamte Bilden auch zu sich, und dies ist unsere Aufgabe in diesem Vorlesung. Was wir hierin verstehen, ist doch das Beste, da wenn wir im Durchschnittsstande eines Kindes stehen, von „Erklärung“ — und wie alle die ungültigen helfen — nicht schicklich zu sein. Das zu verstehen, sondern sich dabei vornehmen, wie es sich auf den Wegweg gesagt haben, oder wie die kleinen Menschen annehmen wird, oder wie Verstande sprechen gehen. Es ist darüber, was die Konstruktionsbewegung selbst, darüber, was deutsche Kultur von welcher unterscheiden: das nämlich Rept und ihre gebildet werden und nicht in einer Linie des Mensch.

Für die Addition und Subtraktion kommt hierbei am meisten in Betracht die Nachbarschaft zu bedeutungsreichen Systemwerten, das Prinzip der runden Zahl. Es sollte unsere gesamte Additions- und Subtraktionsübungen durchdringen¹⁾. Man muß lernen die Kinder in eigenartiger Erfahrung, wie vorteilhaft es immer ist, beim Zusammenzählen erst den Zehner, den Hunderter voll zu machen. Danach wäre zu rechnen:

$$73 + 29 \text{ so: } 73 + 7 = 80, + 22 = 102;$$

$$45 + 36 \text{ so: } 45 + 5 = 50, + 31 = 81;$$

$$63 + 34 = 100 + 15 = 115;$$

$$273 + 156 = (273 + 27 = 300) 300 + 129 = 429.$$

Es ist dies ja auch psychologisch leicht erklärlich. Bei dem ersten Beispiel sind 4 Systemgrößen zu merken, 7 + 2 Zehner, 3 + 3 Einer. Während nun zwei addiert werden in der üblichen Form, müssen die beiden andern gewissermaßen ruhend im Gedächtnis behalten werden. Wird aber gleich der Zehner aufgestellt, so gibt es keine ruhenden Zahlen, sondern alle sind in Beachtung, aber im nächsten Augenblicke fällt außerdem eine hinweg: 6 + 3 Zehner setzen 2 Einern sind nur noch zu merken. Außerdem fällt alles Verwandte fort. Viel deutlicher noch tritt diese Ersparsis bei dem letzten Beispiel zutage. Nach der üblichen Art sind folgende Rechnungen anzustellen:

1 Hunderter + 1 Hunderter = 2 Hunderter (dabei 4 ruhende Zahlgrößen: 7 und 2 Z., 2 und 3 E. merken),

7 Zehner + 5 Zehner = 12 Zehner (dabei noch 3 ruhende Zahlgrößen: 3 H., 2 und 3 E. merken),

12 Zehner = 1 Hunderter + 2 Zehner (denselbe dabei merken),

2 Hunderter + 1 Hunderter = 4 Hunderter (dabei 2 Zehner und die Einer, also drei Zahlgrößen merken),

2 Einer + 9 Einer = 11 Einer (dabei 4 Hunderter und 2 Zehner merken),

11 Einer = 1 Zehner + 1 Einer (denselbe merken),

2 Zehner + 1 Zehner = 3 Zehner (4 Hunderter und 1 Einer merken),

zusammen: 400 + 30 + 1.

Wenn man den Hunderter aufstellt, gestaltet sich die Rechnung so:

273 + 28 = 300 (dabei 158, das sind drei Zahlgrößen zu merken),

159 + 28 = 187 (dabei 3 Hunderter, eine Zahlgröße zu merken),

300 + 187 = 487 (dabei gar nichts zu merken).

¹⁾ Wie haben es schon an früheren Stellen angedeutet (S. 112f.), wenn auch unter anderen Gesichtspunkten.

Bei der Subtraktion empfiehlt es sich, dahin zu streben, daß die dem Ergebnis benachbarte runde Zahl möglichst bald erreicht wird:

$$\begin{aligned} 81 - 29 &= 60 - 8 \text{ oder auch } 80 + 2 = 82, \\ 194 - 78 &= 194 - 74 = 120, - 4 = 116, \\ 295 - 41 &= 200 - 4 = 196. \end{aligned}$$

Selbstverständlich erscheinen diese Beispiele zunächst in der Form $81 - 1 - 26 = 8$, $194 - 4 - 70 = 4$ usw. Aber das Streben geht doch dahin, möglichst viel wegzumachen, um zur runden Zahl zu gelangen. Außerdem ist in jedem einzelnen Falle zu prüfen, welches die zweckmäßigste runde Zahl ist. Bei $245 - 88$ kann gerechnet werden: $245 - 45 = 45 = 157$; nach einiger Übung aber werden die Kinder auch rechnen: $245 - 85 = 160, - 3 = 157$.

Die Berücksichtigung der runden Zahl gilt selbstverständlich auch für den zweiten Summanden wie für den Subtrahenden:

$$\begin{aligned} 392 + 97 &= 492 - 5 = 487, \\ 392 + 97 &= 392 + 5 = 397. \end{aligned}$$

Auch wo Annahmen vorkommen ($312 + 68$, $678 - 384$, $480 - 158$), wo es sich aber nicht empfiehlt, zur runden Zahl hinaufzu- oder hinunterzugehen, müssen es die Kinder selbst erkennen und begründen.

Werden diese Beziehungen zur runden Zahl von Anfang an betont, so gestalten sie sich zu einer beträchtlichen Erleichterung des Zahlenrechnens sowie der Lösung längerer Aufgaben und solcher mit größeren Zahlen. Die folgende Aufgabe läßt sich in der zweiten Form bequem im Kopfe ausrechnen:

$$\begin{aligned} 287 &+ 650 &+ 666 &= 2003, \text{ nämlich:} \\ 240 - 3 &+ 680 - 1 &+ 700 - 4 &= 2100 - 8 = 2092, \\ \text{Oder } 2976 &- 689 &- 626 &- 364 &= 1496 \\ \text{nämlich } 2976 &- (276 + 14) &- 626 &- (1000 - 36) \end{aligned}$$

$$= 2100 - 34 = 2066 - 40 = 1900 - 4 = 1496$$

Dieser Gedanke gilt auch für die übrigen Beziehungsverbindungen. Um nicht unnötig wiederholen zu müssen, sei gleich hier darauf verwiesen. —

Auch für die Multiplikation kommt zunächst die Nachbarschaft zu bedeutungsreichen Werten in Betracht. Während aber bei der Addition und Subtraktion diese hervorragende Bedeutung nur den Werten höherer Systemeinheiten zukommt, so ist im Gebiete der Multiplikation in diesem Sinne ein bedeutungsreicher Wert, was sich auf irgendeine Weise bezieht hat. Dahin gehören selbstverständ-

lick auch jene Systemwerte, aber nicht ausschließlich. Wenn wir z. B. von allen Potenzen der 2 (abgesehen von den ersten) notwendig wissen $2^{10}=1024$, so können wir ohne weiteres 9 als 512 bezeichnen. Oder wenn wir wissen $33^2=609$, so führen wir keine Multiplikation aus, um zu $34 \cdot 35=609$ zu gelangen.

Im elementaren Rechnen wird von dem Prinzip der Nachbarschaft¹⁾ vor allem vertrieben durch die Nennermultiplikation; z. B.

9-7=	fast	70,	nur	7	weniger,	nämlich	63,
9-4=	"	40,	"	4	"	"	36,
9-13=	"	120,	"	18	"	"	117,
9-34=	"	300,	"	36	"	"	264,
9-47=	"	470,	"	47	"	"	423,
9-89=	"	800,	"	80	"	"	720.

Einfache Multiplikationen mit 9 können in dieser Weise erledigt werden, selbst größere; $9 \cdot 1847$ liest man fast ab als 18088, allenfalls mit der Zwischenstufe 184 Hundert 70 weniger 14 Hundert 40 ist 170 Hundert 80. Daraus sind noch 4 Hundert 7 abzuziehen.

Andere Multiplikationen werden weniger häufig nach dem Prinzip der Nachbarschaft gelöst. Doch sind eine Anzahl Fälle unter gewissen Voraussetzungen dafür geeignet, andere sind wegen des mathematischen Einflusses, den sie gewähren, interessant. So wird auf der untersten Elementarstufe $6 \cdot 4$ meist leichter und früher beherrscht, und davon kann eine Zerlegung $6 \cdot 4$ und $6 \cdot 4$ abgeleitet werden. Und später rechnet man mit Vorteil $6 \cdot 24$ auch als $6 \cdot 24=120+24=144$ aus. Mit mathematischem Gewinn wird auch die Rechner- und Achternmultiplikation teilweise so vertriebt: $7 \cdot 4=20+2$, $7 \cdot 8=40+16$, $7 \cdot 6=20+12$, $7 \cdot 12=20+16$, $7 \cdot 18=20+32$, $7 \cdot 28=140+56$ usw.

$8 \cdot 8=80-16$, $8 \cdot 4=40-8$, $8 \cdot 7=70-14$, $8 \cdot 27=270-14$ usw. Ebenso kann natürlich auch gerechnet werden $18 \cdot 18$ als $20 \cdot 18=360-36=324$, $18 \cdot 14$ als $20 \cdot 14=280-32=248$, $18 \cdot 28$ als $20 \cdot 28=560-48=512$ usw.

Das Prinzip der Nachbarschaft zu bedeutungsreichen Systemwerten empfiehlt sich auch beim Blick auf den Multiplikanten. Hier kommt zunächst wieder das Nennermultiplizieren in Frage²⁾, aber auch das Einmaleins der 19 wird von den Kindern sofort bewilligt:

¹⁾ Auch die mit der Multiplikation häufigsten Verfahren, haben wir schon früher angegeben, wenn auch in anderer Zusammenfassung, z. B. S. 104 ff.

²⁾ Vergl. S. 102.

8-19	= fast 180, nur 8 weniger = 172
4-19	= „ 90, „ 4 „ = 76
7-19	= „ 140, „ 7 „ = 133
9-19	= „ 180, „ 9 „ = 171 und.

Aus eigenen Antrieb folgten die Kinder hinein, um könnten sie auch das Einmaleins mit der 22:

8-22	= fast 160, nur 8 weniger = 152
3-22	= „ 66, „ 3 „ = 67 und weiter:
7-22	= „ 154, „ 7 „ = 143
5-22	= „ 110, „ 5 „ = 105
9-22	= „ 198, „ 9 „ = 171
4-22	= „ 88, „ 4 „ = 88 und.

Auch größere Zahlen und andere als Neunzehner wurden leicht bewältigt:

8-248 = 1984 — 8, 7-58 = 406 — 14, 9-28 = 252 — 18, 4-598 = 2392 — 4, 5-295 = 1475 — 25, 7-497 = 3479 — 21 usw.⁵⁾

Hierher gehören auch — da 37 der 3. Teil von 111 ist — folgende Beispiele: 6-37 = 222, 18-37 = 666, 24-38 = 912 + 24, 27-38 = 1026 — 17 usw. —

Bedeutungsvoller fast noch als das Prinzip der Nachbarschaft ist für die Multiplikation das Prinzip der Verdoppelung. Einige Beispiele: 4-6 = 20, 8-6 doppelt soviel, 8-7 = 56, 8-14 doppelt soviel; ebenso 8-9 und 8-18, 9-6 und 9-12, 7-7 und 7-14, 5-8 und 5-16 usw. Es wird selbstverständlich an beiden Faktoren geübt, an Multiplikator und Multiplizand: 4-3 = 12, 8-3 doppelt soviel; 4-8 = 32, 4-6 doppelt soviel, 8-6 wieder doppelt soviel, 8-12 wieder. Das große Merkmal der 12, 14, 16, 18 lassen sich in gleicher Weise in kürzester Zeit gewinnen:⁶⁾ z. B. 3-12 = 3-6 verdoppelt, 4-12 = 4-6 verdoppelt, 5-12 = 5-6-2, 6-12 = 6-6-2, 7-12 = 6-2, 8-12 = 8-2, 9-12 = 12-2. Auch die Reihen der 12 und 17 lassen sich zum Teil so gewinnen: 2-12 = 24, 4-12 = 24-2, 8-12 = 24-2,

⁵⁾ Da über die höhere Symmetrie hinausgehenden Werte brauchen weniger betätigt zu werden; ihre Berechnung ist in den meisten Fällen mehr selbstverständlich als schwierig, so hat jeder ab 22-220 = 484, gegeben 48 Stunden 24. Einige Ausnahmen bilden Aufgaben wie 8-59 = 8-(60-1) = 500-8 = 492, 22-78 = 12-(20+8) = 264-16 = 248 und ähnliche.

⁶⁾ Ich habe früher auch gelehrt, da es noch einfacher Berechnung etwas mehr notwendig ist als das kleine Merkmal, noch selbst auch das große „lernen“ lassen. Das war ein Irrtum. Viel besser als „lernen“ des großen Merkmales ist ständiges Anwenden dieses aufgaben. Selbstverständlich wird im Laufe der Zeit der und zwar fast im Gedächtnis klagen haben. Es geht mir selbst so, nur wenige Jahre haben mir die Gedächtnis zur Verfügung, wie z. B. 7-22 = 154, die meisten anderen werden ich nur, allerdings schnell nach. Und mit dem Prinzip der Verdoppelung ist ein weiterer Weg zu diesem Ziele des geschulten und richtigen Klammern gegeben.

da $3 \cdot 13 = 40 - 1$, so $6 \cdot 13 = 80 - 2$; $3 \cdot 17 = 54$, $6 \cdot 17 = 54 \cdot 2$; $6 \cdot 17 = 51 \cdot 2$.)

Besonders wertvoll ist es, wenn durch Übung fortgeschrittener Verdopplung sich Reihen bilden wie 2, 4, 8, 16, 32, 64 bis 1024; 3, 6, 12, 24, 48 bis 672; die Fünftelreihe entsteht selbst in die Dreierreihe der 3 ein, ebenso die 20; zweckmäßig ist dann noch 7, 14, 28, 56, 112; 9, 18, 36, 72, 144, 288; 27, 54, 108, 216; die übrigen sind entweder schon vorhanden oder unzwecklich.

Mittels solch fortgeschrittener Verdopplung kann man gerechnet werden z. B. $16 \cdot 13$ als $8 \cdot 26 = 72$, 144, 288, $16 \cdot 36$ als $7 \cdot 12 = 84$, 168, 336, $12 \cdot 28$ als $6 \cdot 14 = 84$, 168, 336, $12 \cdot 24$ als $3 \cdot 12 = 108$, 216, 432 usw.

Ebenso sind dann weiter die Fälle, wo die Verdopplung wieder aufgehen wird durch entsprechende Halbierung:

$6 \cdot 6$ ist die Hälfte von $10 \cdot 6$, $15 \cdot 7$ die Hälfte von $30 \cdot 7$, $25 \cdot 6$ die Hälfte von $50 \cdot 6$; $35 \cdot 15$ die Hälfte von $70 \cdot 15$; $45 \cdot 17$ die Hälfte von $90 \cdot 17 = 1530 : 2 = 765$.

Noch interessanter sind endlich diejenigen, bei denen die Verdopplung wohl ins Auge gefaßt, aber schon vor dem Multiplizieren ausgeglichen wird:

3	\cdot 12 =	die Hälfte von 10 · 12, ähnlich 10 · 9
15	\cdot 14 =	„ „ 30 · 14 „ 30 · 7
35	\cdot 18 =	„ „ 70 · 18 „ 70 · 9
55	\cdot 48 =	„ „ 100 · 48 „ 2000
oder $22\frac{1}{2}$	\cdot 24 =	„ „ 25 · 24 „ 25 · 12
$37\frac{1}{2}$	\cdot 66 =	„ „ 75 · 66 „ 75 · 44 = 3300
endlich 15	\cdot 228 =	„ 9 · 680 „ 6030 usw.

Enthaltsamkeit und Teilen sind von jeher ausgeübt worden nach dem Prinzip der Nachbarschaft zu wichtigen Systemzahlen. Wenn 764 : 3 gerechnet werden soll, so kommt eben die in der Dreierreihe vorkommende 3, aber in der Systemzahl 600 in Betracht; sodann wird der übrige 164 nur 16 Zehner usw. Ebenso ist es bei größeren Divisoren; bei 8872 : 200 wurden zunächst nur die Systemzahlen 2000 und 300 ins Auge gefaßt, und taxierend wird festgestellt, ob die wirklich zu verwendenden Zahlen von dem Ergebnis jener runden Zahlen etwas abweichen. Hervorzuheben wäre hierbei höchstens dies noch, daß auch aufwärts vom Divisor

² Zu „unser“ wären bei diesen Zahlen ebenfalls die Fälle $7 \cdot 13 = 51$, $3 \cdot 17 = 51$, $3 \cdot 17 = 119$. Für sie empfiehlt sich der gewöhnliche Weg der Ausrechnung, so lange sie noch nicht sich unmittelbar bezeugt haben.

³ Die Übung in der Verdopplung läßt noch Möglichkeiten sehen, die dem unpolierten Rechner entgehen. Er verdoppelt man 168 als $120 + 12 = 280 + 14$.

die runde Zahl verwendet wird. Bei $730:49$ kann also gerechnet werden: $730:50=14$; $730:49$ — demnach 14 Rest 44. Doch das ist dem Praktiker im allgemeinen bekannt.

Für Aufhauenssein und Teilen kommt außerdem noch das Prinzip der Zerlegung in Betracht, von dem die Verdopplung bei der Multiplikation ja eigentlich nur ein Sonderfall ist. Es würde hier in der Form der Halbierung, Halbierung usw. auftreten, wie z. B.

$$\begin{array}{ll} 856:48=41\frac{1}{2}:24 & 1536:48=41\frac{1}{2}:16 \\ 684:44=17\frac{1}{2}:11 & 1545:55=30\frac{1}{2}:17 \end{array}$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß entweder die Aufgaben aufgehen, oder daß mit Brüchen gerechnet werden kann; mit Resten wird die Lösung zu umständlich. Da wir nun unsere Divisionsaufgaben selten aufgehend betrachten — die Mithilfe der Kinder beim Aufgabestellen verhindert das schon — da andererseits auch die Bruchrechnung hier noch nicht vorausgesetzt ist, so ist eine solche Zerlegung auf dieser Stufe noch nicht verwandbar. Sie ist hier der Vollständigkeit wegen nur kurz berührt worden, auch als eine Anregung für höhere Stufen.

Hicken wir zurück! Es war der leitende Gedanke des ganzen Abschnitts, die Leistungsfähigkeit des Kindes im Festhalten sowie im schnellen und sicheren Verwenden der elementaren Rechenstile zu erhöhen. Auf zwei starke Hilfen konnten wir hinweisen, die nach unserer Erfahrung bisher nicht ausgiebig genug herangezogen wurden: die Orientierung jeder Rechnung an runden Zahlen durch das Prinzip der Nachbarschaft, und die mögliche Vermeidung von teilsichtbar so schließendem Gedächtnisballast (das Merkmal der Ergebnisse schon ausgeführter Teilrechnungen) durch das Prinzip der Zerlegung, insbesondere in seiner wichtigsten Form, der Verdopplung.

§ 34. Die täglichen Rechenübungen.

Die Bedeutung des Wortes für die Einübung der Rechenstile, wie wir sie oben dargestellt haben, und die wir früher höher schätzten, als jetzt, läßt es verständlich erscheinen, auf die Art und Weise dieser Übungen noch mit einigen Worten einzugehen. Die gebräuchlichste Form ist die, daß die ersten 10—15 Minuten jeder Rechensunde zu solchen „täglichen Rechenübungen“ verwendet werden. Vielfach werden da die Klammerreihen aufgestellt. In weiteren Jahrgängen läßt man gern mehrere Stunden hintereinander eine bestimmte Reihe — etwa die der 8 — stehen, von dann zu einer anderen überzugehen, die man so lange in dem Übungspunkte gelernt wird, als es nötig erscheint. Später läßt man wohl die Reihen

von Stunde zu Stunde wechseln, nämlich zwei Reihen einander gegenüberstellen. Die Reihen werden immer vorwärts oder rückwärts oder in einer veränderlichen Folge (z. B. 1, 3, 5, 7, 9, 10, 8, 6, 4, 2 oder 1, 4, 7, 10, 3, 6, 9, 2, 5, 8 und umv.) umgelegt. Sie erscheinen endlich außer in der Form der Multiplikation auch in der des Einheitsmaßes, des Teilens und des Zerlegens. Außer dem Einheitsmaße hält man gewöhnlich noch eine große Reihe anderer Übungen der Einprägung für heilsam. Doch gehen hier die Ansichten mehr auseinander. Es ist das ebenfalls bei der im allgemeinen noch zu geringen Teilbewußtheit unseres Rechenschullehrers, die ein intuitives Erfassen des Notwendigen begünstigt. Zwei solcher Zusammenstellungen, verschieden voneinander und doch beide eine gute Beachtung verzeihend, seien im folgenden wiedergegeben.

1.

A. Addition und Subtraktion.

1. Das Einmalnein. $7+2$.
2. Das Einwenigernein. $8-2$.
3. Das Ergänzen zu 10. Ergänze 6 zu 10!
4. Die Einerübergänge durch Addition. $9+1$.
5. Die Einerübergänge durch Subtraktion. $14-5$.
6. Das Übergangsübchen. Zähle bei 82 weiter, von 80 zurück!
7. Das Zehnmalein. $60+20$.
8. Das Zehnwengernein. $80-50$.
9. Das Ergänzen einer Zehner zu 100. Ergänze 90 zu 100!
10. Die Einerreihen aufwärts. $7+7$ bis 100.
11. Die Einerreihen abwärts. $94-7$ bis 2.
12. Die Zehnerübergänge durch Addition. $70+20$.
13. Die Zehnerübergänge durch Subtraktion. $120-70$.
14. Das Hundertmalnein. $300+100$.
15. Das Hundertwenigernein. $300-100$.
16. Das Zuzählen einer Zehner zu gemischten Zählern.
87+10.
17. Das Zuzählen einer Zehner zu gemischten Hunderten.
287+40.
18. Das Abzählen einer Zehner von gemischten Zählern.
97-40.
19. Das Abzählen einer Zehner von gemischten Hunderten.
338-20.
20. Das Zuzählen einer Hundeter zu Einern, gemischten Zählern und gemischten Hunderten. 211+300.
21. Das Abzählen einer Hundeter von gemischten Hunderten.
334-500.

53. Das Ergänzen einer Hundert zu 1000. Ergänze 800 zu 1000!
55. Die Hundertertübergänge durch Addition. $700 + 300$.
54. Die Hundertertübergänge durch Subtraktion. $1500 - 900$.

B. Multiplikation und Division.

1. Der kleine Einmaleins. 6×7 .
 2. Die Umkehrungen des kleinen Einmaleins. 4 in 34 .
 3. Das Malnehmen im kleinen Einmaleins mit Zählchen von Grundzahlen. $7 \times 8 + 3$.
 4. Das Zerlegen, Entnahmeverein und Teilen mit Resten. $37 : 7$.
 5. Das Zehnermalnehmen. 8×70 .
 6. Die Umkehrungen des Zehnermalnehmens. $560 : 7$.
 7. Das Malnehmen der Zehnerzahlen mit Zählchen seiner Zehner. $40 \times 80 + 30$.
 8. Das Zerlegen, Entnahmeverein und Teilen im Zehnermalnehmen mit Resten. $480 : 7$.
 9. Das Fortstellen der Summanden beim Teilen durch Grundzahlen im Zahlenraum von $1-100$.
 10. Das Fortstellen der Summanden beim Teilen durch Grundzahlen im Zahlenraum von $1-1000$.
- (Hier ist kein Beispiel angeführt; jedoch bei Notwendigkeit: $67 = 63 + 4$.)

(Aus Lehm, Die ersten 10 Minuten der Rechenstunde.
Die Schule 1913, Band 4, S. 178 u. 179.)

II.

6. Klasse. 2. Halbjahr.

1. Zerlegen der Grundzahlen in 2 Summanden.
2. Ergänzen der Grundzahlen zu 10.

7. Klasse. 1. Halbjahr.

1. Zerlegen der Grundzahlen in ungleichen Grundzahlen.
2. Ablesen der Grundzahlen im Zahlenkreis $1-10$.
3. Einmaleins mit 5 und Umkehrung.

2. Halbjahr.

1. Reihenbildungen vorwärts und rückwärts durch Zerlegen resp. Ablesen der Grundzahlen im Zahlenkreis $1-100$, besonders Übung der Einmaleinsreihen, $6 + 6$, $80 - 6$.
2. Einmaleins und Umkehrungen.

4. Klasse. 1. Halbjahr.

1. Reihenbildungen vorwärts und rückwärts im Zahlenkreis $1-100$, besonders Übung der Einmaleinsreihen, z. B. 7 , 14 , 21 usw., 70 , 42 , 56 usw.

2. Ergänzten Einstelliger Zahlen zu den vollen Zehnerzahlen, besonders zu 20, 30, 80, 100.

3. Einmaleins und Umkehrungen.

4. Teilen innerhalb des Einmaleins ohne und mit Rest, besonders der vollen Zehner.

Darauf im 2. Halbjahr.

5. Rechenübungen mit vollen Zehnerzahlen, z. B. $70 + 30$, $1000 - 80$ usw.

6. Das Einmaleins der Zehner und Umkehrungen.

7. Einmaleins mit 12 und 15 und Umkehrungen.

: 5. Klasse.

1. Das kleine Einmaleins, das Einmaleins mit 12, 15, 24 und 30, das Einmaleins der Zehner und Umkehrungen.

2. Teilen durch einstellige Zahlen im Zahlenkreise 1—100 mit Rest, besonders Teilen der Zehnerzahlen durch die Grundzahlen.

3. Rechenübungen durch Zerschneiden und Abstreichen Teileiger Zahlen im Zahlenkreise 1—1000.

4. Anwendung von Rechenvorstellen beim Zerschneiden und Abstreichen.

5. Ergänzten Einstelliger Zahlen zu 100 und Hundiger zu 1000.

(Am 2—9. Tägliche Rechenübungen. Schuljahr 1913, Nr. 30, S. 116.)

Allgemein läßt sich zu diesen und allen ähnlichen Rechenübungen bemerken, daß die Gelertheit nur langsam erworben wird, jedenfalls nicht in einem Jahre, daß sie auch von nicht geringen Teil wieder verloren geht, wenn die entsprechende Übung ruht. Daher hat das Erwerben und Erhalten der Technik auch noch auf der Oberstufe als Teilziel des Rechenunterrichts zu gelten. Und dazu noch ein anderes. Es kann jemand die schönsten Zusammenstellungen solcher Übungen haben, sie fleißig teilen und doch nicht Befriedigendes erreichen, während ein anderer ohne solche Übungen auszukommen scheint und Hervorragendes leistet. Es kommt eben nicht so sehr auf das Vorhandensein einer Übung an, als auf den rechten Betrieb. Dessen erstes und wichtigstes Kennzeichen ist aber — wir werden nicht müde, dies zu betonen — die Anschauung, die Konkretisierung, die Raumvorstellung. Nur wo sie in der nötigen Stärke und Breite vorangeschritten ist, nur wo sie sofort und unter allen Umständen ins Bewußtsein gerufen werden kann, da ist das Wort berechtigt, sie Übung zu heißen. Darum muß der Betrieb solcher Übungen überall zur Konkretisierung, zur Raumvorstellung ansetzen, des Lehrens Beobachtung muß darauf eingestellt sein, zu merken, ob das Kind diese Raumvorstellung bereits hat. Der Befehl: Zeige

mit dem Händel und die Frage: Was stellst du dir vor? werden über die äußeren Mittel dann sein⁷⁾.

Dann kommt ein zweites Kennzeichen, das zwar niemals die Beförderung des Lesens erreicht, gleichwohl aber nach von großer Wichtigkeit ist. Allen diesen Übungen nämlich, den vorstehenden Rechenübungen wie auch nicht den stürker abstrahierenden Wettrechnen, ist nur dann der rechte Erfolg beschieden, wenn sie gefühlbetont gestaltet werden. Ein recht brauchbares Mittel für diesen Zweck, und zwar nicht etwa bloß für unsere Schulpflege, ist der Wettseifer, dessen Einführung schon mehrfach angedeutet worden ist, z. B. bei den Zähl- und Rechenübungen. Er läßt sich natürlich auch für alle anderen Übungen in fruchtbarer Weise verwenden. Das im Chore erfolgende Wettrechnen, bei dem das Kind sich setzen darf, das die Lösung zuerst richtig sagt, ist nicht unbedingt zu empfehlen. Es hält bei größeren Klassen zu lange an, gibt leicht Anlaß zu gegenseitigen Überrechnen, läßt die Rechner leicht unfähig und deprimiert die Schwachen. Wer auf diese Nachteile achtet, um ihnen in geeigneter Weise entgegenzuwirken, wird ja auch diese Form des Wettseifers mit Gewinn anwenden können. Besser hat sich bewährt ein Wettrechnen in kleinen Gruppen von 2—3, auch 4 Kindern, wobei alle übrigen die Richtigkeit kontrollieren und möglichst acht geben, wer von diesen wenigen „am besten“ rechnen konnte. Da man diese Gruppen nach der Fertigkeit zusammenstellen, z. B. die beiden Besten des Kräfte messen lassen kann usw., so ist die Möglichkeit gegeben, daß jedes Kind es einmal besser machen kann als sein oder seine Gegner. Eine andere, auch bewährte Form des Wettrechnens ist es, für eine genau abgemessene Leistung, z. B. eine Einmaleinsreihe, die dafür gebrauchte Zeit in Sekunden zu notieren, und dann, wenn alle durch sind, was natürlich nicht hintereinander in derselben Stunde geschehen soll, mittels Durchschneidungsberechnung die Schnelligkeit der Mädchen und Knaben, der Jungen und rechen Hülfe usw. festzustellen. Selbstverständlich rechnen die Kinder das aus. Der Wettseifer der Partien klappt manchmal lange noch nach und bewirkt auch freiwillige hässliche Übung.

Größere Schüler bekommen schon ein Bewußtsein von der höheren Leistungsfähigkeit dessen, dem die Rechenaufgaben geläufig sind. Sie gewinnen damit einen gefühlsmäßigen Eindruck von der Notwendigkeit der Gelertheit und geben sich unter diesem

⁷⁾ Die beiden oben angegebenen Beispiele machen allerdings nicht den Eindruck, als wolle man die Raumverteilung in ungehöriger Weise überausgenutzen werden. Denn der erste scheint mehr stark dem Übung an die Wirkung des Witzes zu belegen, wenn die Überlegungen als 1. Übung und die Zahlenstellung (so also die Kinder doch schon das System kennen) als 2. und 3. Übung.

Eindrücke ganz gern auch mechanischen Einflüssen mit Eifer hin. Das „Ich kann es“ und noch mehr das „Ich kann es nun viel besser, ganz sicher“, hat eine ansehnliche Wirkung.

Daß auch der Wechsel zwischen technischen Übungen und anderem Rechnen, wie auch die belebende Wirkung der Lehrerpersönlichkeit zur Erhöhung der Gefühlsbetontheit beiträgt, sind alle pädagogische Wahrheiten, die nur das Üble an sich haben, daß man ihre Verwirklichung nicht gut aus Büchern lernen, überhaupt selten lernen kann, sondern daß sie aus dem Herzen quellen müssen. Jeder, der Schüler war, wird uns verstehen.

So sind es vor allem Tätigkeits- und Erfolgsgefühle, die intellektuellen Gehalte der neuen Einsicht, das Bewußtsein des Zuwachses an Kraft und Geschicklichkeit, auch wohl Lustgefühle des Wisses und sogar einmal milder Schadenfreude, dann Spannungsgedühle der Denker und Lösungsgedühle des Machers, welche in den Schülern den Willen zur Übung wecken. Dieser Willen zur Übung aber ist der Erfolg sicher.

Auf zwei Hilfsmittel unserer eigenen Praxis mag noch kurz hingewiesen werden. Zunächst darauf, daß die großen Zählblätter, welche vor allem für die Zahlenfassungübungen in der Klasse bestimmt sind, sich auch für die Zwecke einer vernünftigen Operationsübung als höchst verwendbar erwiesen haben. So haben sich alle möglichen Zerlegungen und Ergänzungen an ihnen mit viel größerem Erfolg than, als wenn man nur die Zahl zu sagen genötigt ist. Denn der Zahlenfassung, welche während einer gewissen Zeit die einzige Übung gewesen war¹⁾, konnte bald die andere Aufgabe angeschlossen werden: Sieht die Zähltafel an, aber sagt nur, was an 100 fehlt! Das wurde auch zu nicht geringer Fertigkeit entwickelt. Später wurden diese Übungen dahin abgeändert: Sagt, wieviel an 80 fehlt! Wenn dann Zählblätter über 80 erschienen, beispielsweise 96, dann sagten die Kinder ohne jede Anleitung: 16 mehr. Aus den Ergänzungsübungen wurden von selbst immer mehr Zerlegungsübungen, je weiter wir herunter gingen: Ergänzt zu 60, zu 42, zu 20! Später: Ergänzt zu 54, 30, 70, 20! Wieder später: Ergänzt zu 88, zu 78, zu 67, zu 52 usw.

Unmerklich führten diese Übungen zu Subtraktionen: Nehmt von den anstehenden Zahlen selbst 20 weg! Oder 40, 30, 25, 16, 39 usw.

Ebenso zu Additionen: Zählt immer 20 hinaus! Dabei wurde

¹⁾ Vergl. die Schilderung des früheren Vortrags S. 278. Die dort angegebenen Zeiten für die Geschwindigkeit der Übung wurden auch bei Operationsübungen erreicht.

über der Handster Überschriften, selbstverständlich ohne irgendwelche Schreibrichtungen. Weiter: Zahl 40, 70, 80, 90 (man!)

Die Multiplikation er schien lediglich als Vertiefung der erlernten Zahlbilder. Hier räumte gelingender Kinder zu einer recht befriedigenden Geschwindigkeit. Sie verlangten selbst nach schwereren Übungen, z. B. die gezeigten Zahlbilder verdreifachen zu dürfen. Das versuchten wir zwar erst so, daß wir die größeren Zahlbilder überschlugen, aber das merkten sie bald und haben auch um dies. Die Multiplikation mit 4 folgte, die mit 5 wurde als besonders leicht empfunden, die mit 6, 7, 8 und 9 zwar als schwerer, aber doch in solchem Maße als „leis“, daß die Kinder lieber bei schwereren Transaktionen wüschten — hauptsächlich bei der Form des gruppenweisen Wettwüschens. Ja, wir konnten auch darüber nach hinweisen und versuchen es gelegentlich mit noch höheren Maßzahlen. Damit waren die Multiplikationsübungen ohne Mühe in den Zahlenraum bis zur 1000 verlegt worden, und zwar — wir gestehen das gern — zu unserer eigenen Überraschung. Denn wir hatten nicht geglaubt, daß man schwachen Kindern, wie wir es unter unserer sehr haben, dergleichen räumen dürfe. Aber wirkliche Anschauung und Gefühlsbetontheit sind ihnen gerade am meisten nötig. Wir wünschen den Anfangsleuten aller Art die gleichen erfreulichen Erfahrungen.

Die Divisionsübungen waren im Verhältnis dazu fast zu leicht, bewegten sie sich doch zunächst nur im Gebiete des kleinen Einmaleins. Und dabei hatten wir sogar unterlassen, die passenden Zahlbilder herauszusuchen und zusammenzustellen, was sich für Anfangsübungen empfehlen dürfte. Das schien aber unsern Kindern gerade Freude zu bereiten, als halferten jetzt die Zahlbilder mit gleicher Schnelligkeit, wie sie sie verknüpft hatten, und warfen — natürlich ganz gegen unsere Absicht — statt des „Rest 1“ das Halbe hinein. 70 zeigte das Zahlbild, $37\frac{1}{2}$ lautete die Angabe der Kinder kaum 2 oder 3 Sekunden später. Und in demselben Maße wurde nach und nach zur Division mit dem Übrigen einwilligen und einer Anzahl von zweistelligen Teilern geschritten, wobei fast überall Reste erschienen, die aber von einzelnen weiter fortgeschrittenen Kindern sofort als Brüche ausgedrückt wurden. Sollten wir dies verhindern?

So sind nun die großen Zahlbildtafeln getreu Gehilfen einer psychologisch gerichteten Übung und Eingängigkeit der Assimilation geworden, die wir nicht minus wüschten, und deren Wirkung wir gern auch der kindlichen Übung des einzelnen Kindes zugänglich machen würden. (Siehe Anhang.)

Wiederholt aber sei betont, daß gerade solche Erfahrungen mit voller Deutlichkeit zeigen, wie es etwas ganz unglaublich Wirksames

und Wertvolleren ist, wenn hinter dem „reinen Begriff“ die Formvorstellung steht. —

Neben diesen Zahlhöfchen ist es noch ein Rechenmittel, der uns seit vielen Jahren manche Dienste geleistet hat. Er besteht aus 100 Zentimeterquadraten (die sich die Kinder selbst herstellen können), in welche die Zahlen 1—10 in folgender Anordnung eingetragen werden:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	
L	1	2	3	10	9	8	5	6	7	4	l
M	6	10	7	8	2	9	4	5	8	1	m
N	10	1	9	7	4	8	3	2	6	9	n
O	7	2	1	9	4	10	3	4	9	5	o
P	2	9	10	1	4	8	2	7	4	6	p
Q	4	5	2	8	10	3	4	9	1	7	q
R	9	6	8	2	1	4	7	3	10	5	r
S	1	7	4	9	8	1	10	4	3	2	s
T	2	8	4	4	3	7	2	1	6	10	t
U	3	4	9	4	7	3	1	10	2	8	u
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	

Jede senkrechte und wagerechte Reihe enthält alle 10 Zahlen in immer anderer Anordnung. Durch die Bezeichnung der Reihen mit Buchstaben (A die 1. senkrechte, M die 2. wagerechte, N die 3. senkrechte, aber von unten auf) erhalten wir nun die Möglichkeit, 40 verschiedene Reihen nebeneinander zu legen. Man sieht sofort, daß er sich für alle möglichen Übungen auf allen Stufen verwenden läßt. Doch haben wir davon abgesehen, ihn auf der Unterstufe zu brauchen, solange die Kinder die Zahlenreihe noch nicht erworben haben. Der nächste Abschnitt enthält die Begründung dafür. Der Rechenmittel ist ja noch seinen ganzen Charakter noch nicht ein Mittel zur Einführung, sondern selbst eigentlich volle Klarheit voraus und will nur der assoziativen Befolgung und Bewältigung dienen. Wir scheiden also ausdrücklich von einem so frühen und falschen Gebrauche gewarnt haben. Wo aber die Funktionalität vorhanden und gesichert ist, da hat er sich als bewährtes Hilfsmittel für vielerlei Übungen erwiesen.

Für ein paar Beispiele aus dem Gebiete der Multiplikation:

Reihe A mal 67 mal 8, mal 8, mal 12, 16, 22 usw. Das Kind, welches nun aufgerufen wird, rechnet auch die folgende Reihe; der Rechenbogen wechselt. Schon dies Beispiel zeigt Übungen, die sich durch mehrere Jahre erstrecken werden. Oder: Von Reihe F an (jedenmal) 10 dazu decken und nun mal 5 nehmen! Oder: Alle Zahlen als Zehner ansehen und mal 7 usw. nehmen! Oder: Überall eine 8 dahinter setzen und mal 4 nehmen!

In solcher Weise lassen sich auch Divisionsübungen, auch Additionen und Subtraktionen vornehmen. Schwerer werden sie alle, wenn man gleich zwei hintereinander stehende Zahlen als Zehner und Einer aneinanderstellen und mit ihnen operieren läßt, z. B. Reihe G und H: 68, 66, 88, 86 usw.

Mit Hilfe dieses Zählens konnten die assoziativen Übungen z. B. des Kindes und sogar die andern gerietten des großen Einmaleins auf das Ziel möglichst geringen Zettverbrauchs eingestellt werden. Doch ist nicht verschwiegen, daß er den großen Nachteil aller solchen Lehrmittel und Übungsformen der Vergangenheit an sich hat, daß er die Raumvorstellung unbeachtet läßt, selbst wenn der Dinge und insbesondere der vorhergegangene Sachverstand sich ihrer fähig angenommen hätte. In dieser Hinsicht sind ihm die Zählstäbchen weit überlegen.

§ 35. Der Gebrauch der Ziffer.

Das Wesen der Ziffer ist schon in einem früheren Abschnitte erörtert worden. Sie ist ein Schriftsymbol, aber wie alle Schriftsymbole zunächst nicht ein Symbol für den zu denkenden Begriff, sondern für das den Begriff — hier im besonderen den Zahlbegriff — deckende Wort, das Zahlwort. Dieser symbolische Charakter höherer Art, gewissermaßen 2. Ordnung, zeigt sich noch deutlicher bei den aneinander gereihten Zügen unserer üblichen Schreibschrift,

wo z. B. die Zusammenstellung folgender Schriftzüge *Leber*

nicht etwa das Zeichen, das Symbol für einen bestimmten Gegenstand darstellt, sondern ein Schriftsymbol ist für den Lautkomplex des Wortes, das man wiederum wieder ein Symbol ist für Vorstellung und Begriff. Man darf solchen Darlegungen noch nicht entgegenstellen wollen mit Hinweis auf dem: Solche Schriftsymbole für die Wörter seien in der buchstäblichen Darstellung der Zahlwörter gegeben, also z. B. in der Form „sechzig“, während die Zifferndarstellung „67“ doch direkt das Symbol für den Begriff bedeute. Aber was es schließt, setzt Unterschiede, wo gar keine bestehen. Schreiben wir doch auch Grad mit °, Bogenminute mit ', Pfennig mit ¢, Pfund mit £, die Planeten mit ihrem Zeichen: ♀ ☿ ☿ ♄ ♃ ♅.

die ganz den Charakter der Ziffer haben, jedenfalls den meisten nicht als Abstraktionen bewußt sind. Hierbei gehören auch die Interpunktionszeichen. Wer so urteilt, ist sich ferner nicht bewußt der Entwicklung des menschlichen Geistes, der in Stimm- und Wortentwicklung wie Einzelentwicklung das Wort gebildet, lange bevor ein Zeichnen nach Wortzeichen sich geltend macht.

Dieses symbolischen Charakters der Ziffer, die also ein nicht-loses Einzelmittel für den höheren Zahlenwert ist, müssen wir uns klar bewußt sein, wenn wir ihre unterrichtliche Behandlung recht gestalten wollen⁵. Denn aus diesem Bewußtsein geht unbedingt hervor, daß Ziffern solange nicht benutzt werden dürfen, als die Kinder die Zahlgrößen noch dinglich erfassen. Und selbst dann, wenn die Kinder auf der folgenden Stufe symbolische Raumgrößen für die Dinge einsetzen lernen, würde die Ziffer nur störend wirken. Erst dann, wenn das Zahlwort die hauptsächlichste Stellvertretung für den Zahlbegriff geworden ist, wenn also die Abstraktion in der Zahl wie in der Operationsauffassung schon stärker vorgeschritten ist, erst dann darf eine graphische Symbolisierung dieser hinfälligen Abstraktion übernommen werden. Sie wird zunächst keine Schwierigkeiten bereiten, sondern als Entlastung gütlich werden. Das aber sind die Kennzeichen dafür, ob der Schritt verfrüht war oder nicht.

Darum gehört die Ziffer nicht auf die erste Stufe des Rechenunterrichts. Sie darf ebensowenig dem ersten Rechnen parallel gehen, wie das Schreiben dem Sprechlernen parallel gehen kann. Denn so Zifferformen und Rechnen als Parallele Schreiben und Lesen weisen zu lassen, ist ein ganz erstaunlicher Irrtum, der aber sonderbarerweise den gesamten Rechenunterricht nunmehr so gut wie völlig beherrscht, allseitig gegen den Widerspruch einiger weniger denkender Erzieher.

Die Ziffer von der ersten Stufe des Rechenunterrichts ausgeschlossen, ist nun freilich eine Forderung, die manchem Pädagogen Kapthalsbrechen machen wird. Innerlich möchte er ihr zustimmen, auch seine Erfahrung mit den Schülern zeigt diese Forderung recht. Aber wie soll er nur die Kinder beschäftigen, wenn er Abteilungsunterricht hat, oder wenn Hausaufgaben gewaschen werden? Dazu einige Andeutungen. Wir haben schon früher hingewiesen auf die dingliche und später auf die symbolische Darstellung der Zahlgrößen und der Operationen. Das Malen der Dinge und später der rhythmisierten Symbole nimmt in der Hauptsache die Stelle ein, die wir bisher in unerkennbar Weise

⁵ Die Verknüpfung dieser Verhältnisse mit der ihnen sich ergebenden Forderung hat zu den verschiedensten Formen der Erkenntnistheorie geführt, die schon den Schulstellagen nachgesprochen zu werden.

mit Zifferrechnen ausfüllen. „Malt 4 Kinder, 4 Fische, 4 Kreise, 4 Platan, 4 Kame... selbst selbst fert!“ Oder: „Malt einen Baum, 2 Kinder, 3 Hüh, 4 Fische... selbst selbst fert! Umgekehrt! Malt wieder...! Malt überall noch eine hinzu und zählt dazu! Malt nun noch überall zwei hinzu und zählt wieder! Stricht überall eine aus und zählt wieder!“ Ferner werden Kindergeschichten im Bild dargestellt und rechnerisch ausgewertet (wir haben schon Beispiele davon gegeben): Kinderspiele, Einkäufen beim Kaufmann, beim Bäcker, beim Fleischer, beim Milchmann, im Güterwarenladen; Auflüge machen, Abendkost essen usw. usw. Das ist mehr wert für die mathematische Bildung, als die Schulzünftler gefüllt mit halben und ganzen Seiten voll Rechenstücken wie $1+1=2$, $2+1=3$ usw., denen sie doch gar keinen Sinn und gar keine erfreuliche Seite abgewinnen können, ja die die Kinder — wie schon dargestellt wurde — dazu führen, das Wort und das Zeichen an die Stelle der Sache zu setzen, Wörter und Zeichen fremdes — oder, falls der Lehrer recht freundlich ist — wenigstens zweites von wendig zu lernen, um erst später, nach mancher bitteren Erfahrung, dahin zu gelangen, den Schriftschacher von Wort und Zeichen zu fällen. Dann ist aber meist das Interesse für die mathematische Erfahrung der Dinge schon gänzlich verflücht.

Was an diesen Darlegungen noch zweifeln sollte, dem können wir nur empfehlen, selbst die Probe zu machen und die Ziffern so weit hinauszuschieben, als es irgend geht, z. B. so weit, bis die Kinder selbst die Notwendigkeit spüren, ihrer mathematischen Erfahrung der Dinge dauernde Form zu geben.

Dieser Gedanke führt uns nämlich zu der Frage: Welche Rolle spielt die erste Zifferbehandlung im Unterrichte? Oder: Welchem Zwecke dient die Ziffer, wenn sie im Unterrichte auftritt? Wir antworten darauf: Nicht etwa dazu, Rechenstücke durch hundert- und überhundertmaliges Abschreiben einzuprägen; sondern die Ziffer darf längere Zeit hindurch nur den Charakter eines Hilfsmittels haben. Jede Rechnung wird anschaulich und handlich oder vorstellend ausgeführt; die Ziffer tritt aber nur dort auf, wo es sich darum handelt, mehrere Zahlenangaben oder Ergebnisse im Gedächtnis zu behalten.

Bei welchem Verfahren verursacht es auch gar keine Schwierigkeiten, das Bild der Ziffer den Kindern einzuprägen. Zweifellos ist es ununterbreichlich: Auffassung und Darstellung, Lesen der Ziffern und Schreiben. Aber von vornherein ist auszusprechen, daß es ein großer Irrtum ist, zu fordern, daß Lesen und Schreiben aus Gründen der psychischen Ökonomie zugleich gelernt werden müsse. Wir lesen die Großbuchstaben der Frakturchrift, aber schreiben kann sie überhaupt niemand; und in vielen Vorschulklassen lernen

die Kinder spielend Antiqua lernen, und zwar ohne Schreiben. Das Lesen der Ziffern lernen nun die Kinder gewissermaßen ohne den Willen des Lehrers, ja selbst, wenn er sie davon abschreckend zurückhalten wollte, an Münzen und am Maaßstab, die in der Schule und zu Hause benutzt werden, an der Uhr und am Abreiskalender, die wir nicht nur in jedem Hause finden können, sondern die wir auch in der Schulstube aufgestellt sehen möchten. Der letztere ist gewisslich unnötig zu haben; je größer seine Ziffern und Buchstaben sind, desto besser. Dem also sind die Gelegenheiten, wo die Kinder mit den Ziffern lebend vertraut werden. Lange Zeit mögen sie diese Kenntnisse schon haben, ehe sie sie für ihre eigenen Zwecke, für ihre Notizenzettel verwenden. Es muß ihnen eben erst das Bewußtsein dafür gegeben, daß es eine Ergänzungsbedeutung, daß es darum wesentlich ist, sich der Ziffern zu bedienen.

Und auch dann noch wartet des Lehrers eine heikle Aufgabe. Wenn die Ziffer zwar schon als Notizmittel der Schüligen benutzbar worden ist, dann darf sie doch nur insoweit gebraucht werden, als das betreffende Kind in der Lage ist, Rechenschaft darüber zu geben, daß eine wirkliche Acht, eine richtige Acht ganz anders aussieht, als eine geschriebene Acht, die wirkliche nämlich so:

$$\begin{array}{ccc} \text{⌘} & \text{⌘} & \text{⌘} & \text{⌘} \\ \text{⌘} & \text{⌘} & \text{⌘} & \text{⌘} \end{array} \quad \text{oder so:} \quad \begin{array}{cccc} \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{array}$$

die geschriebene aber so: 8; weiter, daß man rechnen dürfe nur mit wirklichen Achten, zum Notizen aber die geschriebene verwende. Wenn das längere Zeit durchgeführt wird, dann wird man sich wundern über die Fortschritte, die sich ganz anders gestalten, als sie gegenwärtig sind. Kommt dann die Zeit, daß die Kinder auch lernen sollen, „mit geschriebenen Achten“ zu rechnen, so macht das nicht die geringsten Schwierigkeiten, weil es eben nur erlernt zu werden braucht.

Aber das richtige Schreiben der Ziffer! wird manch Angeleglicher einwenden. Wenn nun ein Kind, wie es oben vorgeschrieben sein soll, die 8 so schreibt, daß es an der durch einen Pfeil bezeichneten Stelle anfängt: 8^a; da lernt es doch nie im Leben eine schöne 8 schreiben! Ja, eine schöne im Sinne des Harenzianer oder eines anderen eleganten Duktus vielleicht nicht, aber doch vielleicht eine recht deutliche, und „die göttliche Deutlichkeit war mir immer die größte Schönheit“. Thordius kennen wir mehrere Antiquarier, von denen erzählt der eine die 8 so, daß er von unten anfängt, ein anderer macht es mit der 9 so, ein dritter beginnt bei der 8 eben mit dem rechten Teil statt mit dem linken, und

haben sind alle diese Ziffern recht deutlich und guttätig dazu⁷⁾. Wir können uns also nicht davon überzeugen, daß es im Rechnen nötig sei, die Kinder die Ziffern schreiben zu lehren. Wenn wären denn auch Schreibmaschinen da? Eheren braucht der einsichtige Lehrer gewiß nicht darauf zu achten, die Kinder können die Ziffern schreiben, vielleicht eher, als ihm lieb ist. Und schlecht geschriebene Ziffern sieht man auch bei Kindern, die sie methodisch schreiben gelernt haben; doch dies steht auf einem anderen Haufe.

Während also im mündlichen Rechnenunterricht die Ziffer (bessere Zeit war die Bedeutung einer mathematischen Stenographie bei, die wie reines Notizen ermöglicht, gewinnt sie erst später — ganz unmerklich — auch die Bedeutung und den Wert der Stellvertreterverstellung des Zahlbegriffs. Das geschieht aber eigentlich erst dann, wenn die Zahlen, mit denen das Kind arbeitet, so groß werden, daß der Vorstellung und dem Merken innerliche Schwierigkeiten entstehen. Nach unseren Erfahrungen ist das eigentlich noch nicht der Fall während der Behandlung des Zahlenraumes bis 100, besser während der Behandlung der Zahlenreihe⁸⁾. Erst wenn man darüber hinausgeht, wenn die Zahlendarstellung des Systems eintritt, wird das anders. Nun kommt die Zeit, in der die Ziffer, zumal als Positionssymbol, leise neben die dingliche oder symbolische Vorstellung tritt, um bei der Veranschaulichung und Verfestigung des Zahlbegriffs mitzuwirken, ohne selbstlich jene symbolische oder eine schwache Raumverstellung sein zu müssen. Nur besondere Gelegenheit, nicht einmal visuelle Veranschaulichung, kann dahin führen, daß jemand Rechnungen, die er im Kopfe ausführt, lediglich in Ziffern vorstellt. Fernrechnennummern, Jahreszahlen, ständische Größen usw. behalten wir ebenso gut abstrahiert oder mit einer ähnlichen Vorstellungswelt, wie in Ziffern. Wenn aber die erwähnte Zeit gekommen ist, dann mag man auch eine etwa latengabende Anlage gewahren lassen, sie entwickeln und üben mit der gelegentlichen Frage: Wie stellst du dir diese Zahlen vor? Dann gewinnt die Ziffer auch im Rechnen ihre volle Bedeutung. Auf der Umkehrseite aber ist sie schädlich.

§ 36. Mündliches und schriftliches Rechnen.

Die Ausführungen des vorigen Abschnitts zeigten, daß die Ziffer verhältnismäßig spät einsetzt. Dazu kommt, daß die mathematische Form, in der doch das schriftliche Rechnen

⁷⁾ Das nicht in dem Besichte zu korrigieren, ich spreche von dem, was ich erkenne, daß ich sämtliche Ziffern in meiner Handschrift (persönlich) erkenne, d. h. in der Form des eingetragenen Textes dargestellt habe und nicht schreiben.

⁸⁾ Als Bedingung wird die Ziffer selbstverständlicher schon während der Behandlung der Zahlenreihe gewonnen.

in der Hauptsache zu erfolgen hat, eine besondere Aufgabe darstellt, wie auch schon in einem früheren Abschnitte angedeutet wurde. Beide Gedanken zusammengefaßt ergeben die Forderung, daß zunächst auf der Unterstufe das mündliche Rechnen durchaus im Vordergrund der Arbeit stehen muß, ja, daß das übliche schriftliche Rechnen längere Zeit überhaupt noch nicht erscheinen darf, daß infolgedessen auch die Operationszeichen für die ersten Stufen noch nicht in Betracht kommen.

Ist es doch nicht etwa nur sinnlos, sondern geradezu sinnwidrig, die Kinder mahen zu lassen:

$$\text{||||} + \text{||} = \text{|||||}$$

Sie haben da doch eben nicht 5, sondern 10 Striche gezählt. Man muß sich nur etwas klar machen, was man mit dieser Aufgabe von ihnen verlangt — und zwar abgesehen von dem Verlangen der mathematischen Form und der richtigen Anwendung der Operationszeichen! Nichts anderes als dies, daß man ernsthaft folgende Sätze schreiben sollte:

Wenn D scheint, ist O untergepaßt.

Wenn 2 \int das H an = sind, steht H \

(Reise, Tisch, Haus, Platte, schlief); d. h. abstrakte Gedanken mit Hilfe konkreter Bilder. Sie sind nicht um ein Haar besser und didaktisch nicht anders zu bewerten als Bilderrätsel von der Art des

$$\text{Sei } \text{H} \text{ als } \text{H} \text{ an!}$$

Wenn das noch nicht einleuchtet, der mag die übrigen Operationen heranziehen:

$$\text{||||} - \text{||} = \text{|||}$$

Hat hier das Kind wirklich von den 5 Strichen 2 weggenommen? Nein, es hat noch 2 neue hinzugefügt, oder vielmehr 3, eins zugerechnet noch. Oder

$$\text{|||} \cdot \text{||} = \text{|||||||} \quad \text{oder} \quad \text{|||||} : \text{||} = \text{|||}$$

Bei jener Form hat es nicht 3:3, sondern 2:3 und dann noch 3:3 hinzugefügt. Bei dieser hat es die vorhandenen 5 zunächst um 2 und dann noch um 3 neue vermehrt; geteilt hat es überhaupt nicht, und doch wäre das ganz gut möglich durch einen rechten Teilstich oder einen Teilpunkt in der Mitte.

Welche schmerzenerfütterliche Kurzsichtigkeit zeigt sich in solchen Beispielen! Es ist wirklich dringend nötig, daß man über Wesen

und Zweck einerseits, über die Möglichkeit und die Voraussetzungen jeglicher didaktischer Tätigkeit mehr aufzuklären, als es bis dahin geschah, und zwar an der Hand exakter kindepsychologischer Studien, nicht unter gelegentlicher Berührung auf Erinnerungen an Kenntnisse, die man sich einst angeeignet auf dem Gebiete einer Spekulation über die Psyche des Erwachsenen.

Darstellungen von der Art der angeführten betonen die mathematische Form voraus, welche in ihrer bis aufs Äußerste getriebenen Kürze bei voller begrifflicher Klarheit eigentlich nur so verglichen ist der stenographischen Niederschrift eines abstrakten Satzes:

5 + 3 = 8

Es entspricht das Sign „8“ genau dem mathematischen Gleichheitszeichen. Und man werde man sich klar, daß solche Abstraktionen auf einer Stufe verfaßt wird, die zugunstenvermessen den Begriff noch in wirklichen Dingen, allenfalls schon in seinem dinglichen Symbolis denkt, nämlich die 5 als fünf einzelne nacheinander abgemalte Striche. Daß es etwas möglich ist, zeigt, daß die Methodik des Rechensunterrichts noch nicht auf der wünschenswerten Höhe steht.

Darum: nicht die Form der Operation, nicht die Form der Rechenartikels darf auf den unteren Stufen Ziel und Aufgabe sein, sondern ihr Inhalt. Notwendig ist die wirkliche Ausführung der Operationen, nicht ihre Andeutung durch symbolische Zeichen. Dies darf erst dann eintreten, wenn das Kind die Sache beherrscht. Dieses Ziel „Beherrschen der Sache“ wird aber zu leicht als erreicht angesehen, wenn daneben noch das andere steht „Beherrschung der Form“. Diese beiden Ziele müssen reichlich, stufenmäßig getrennt werden, sonst kommen wir auf diesem Gebiete nicht vorwärts.

Darum darf ferner auf den Stufen, wo die Ziffer auftritt, das schriftliche Rechnen nur die Form der Notiz auslernen, wie das schon im vorigen Abschnitt ausgeführt wurde. Und zwar zunächst eine Zeitlang sogar nur die Form der Notiz des Ergebnisses. Später erst, nachdem die Kinder langsam in die mathematische Form eingewöhnt worden sind, darf als besondere Aufgabe auch ihre schriftliche Darstellung in Angriff genommen werden. Weil dann die inneren Voraussetzungen gegeben sind, macht sie auch keine Schwierigkeiten. Es sei z. B. geschrieben 37 + 13 = 49. Dann heißt es: Wir wollen es einmal schreiben, und der Lehrer wählt die Form 37 und 13 sind 49 Phantasie. Mit dem Hinweis darauf, daß

das zu lange dauert, und daß die großen Leute auch künner schreiben, werden die ausgeschriebenen Wörter leicht durch Operationszeichen ersetzt, einschließlich des „Pfeils“, das wegen des Plandes auch nicht erst durch H. vertreten werden sollte. Ob man die Bezeichnung wiederholtes oder nur einmal am Ende brauchen will, hängt davon ab, wie weit die Kinder fortgeschritten sind. Mit der Subtraktion ist es auch so.

Klaftigkeits wird nun an einzelnen Rechenaufgaben, welche dafür geeignet erscheinen, die Sonderaufgabe angeschrieben, welches wohl eine passende oder gar die passendste schriftliche Darstellung sei. Man muß bedenken, daß viele eingetragene Aufgaben verschiedene Darstellungen zulassen. Z. B.: Wieviel bekommt du wieder, wenn du für 50.5 Milch holst und 30.5 hingibst? 14.5. Wer kann das schreiben? $50 - 30 = 14.5$. Schreibe's in die Luft! Oder: $50 + 14 = 64.5$. Oder $50 - 14 = 36.5$ — „soviel bei rüchlich der Milchmann bekommen“. Oder $50 = 30 + 14.5$, oder $36 = 50 - 14.5$ usw. Sucht die passende heraus. Die erste. Warum meinst du das? Weil gefragt war, wieviel man wiederbekommt, „und du paßt die am besten“. Aber die Verschiedenartigkeit der Formen und ihr Wechsel soll darauf hinweisen und die Kinder dazu erziehen, nicht in der Form, sondern im Inhalte das Wesentliche zu sehen, in der Form nur das möglichst kurze (abstrakte) Ausdruck des (konkreten) wirkten oder vorgestellten mathematischen Vorganges; ein Ausdruck, der erst auf den Zuruf des Lehrers: „Geschrieben?“ gesagt und formuliert wird.

Genaß das gleiche gilt von dem Gesamtgebiet des Mathematischen, insbesondere dann des kleinen Elementaren, und von dem Zahlen-sinn und Teilen innerhalb des ersten Hunderters, je möglichst weit noch darüber hinaus. Das mündliche Rechnen ist da in jeder Hinsicht die Hauptsache, und nur ein geringer Bruchteil der Zeit darf der schriftlichen Fixierung gewidmet sein.

Das Kennzeichen aber dieser Stufe des schriftlichen Rechnens ist auch jetzt noch, daß es lediglich ein Notizenbuch ist, kein sogenanntes „schriftliches Rechnen“ im üblichen Sinne. Denn alles, was bisher in Betracht kam, wurde im Kopfe gerechnet, in kurzer mathematischer Form gebracht und dann in Schriftzeichen festgehalten. An Höchstleistungen zeigt sich das am besten. Die Kinder rechnen folgende Aufgaben so:

$$5045 : 7$$

50 Hundert : 7 sind 400, 140 : 7 sind 20, zusammen 420.

$$79 \text{ in } 1850$$

80 in 140 geht 2 mal, in 1800 20 mal, 79 noch 30 mal, Neben 20 und 80, sind 79 übrig, darin geht sie 1 mal, zusammen 21 mal.

32-34

$$2 \cdot 36 = 72 \text{ und } 20 \cdot 36 = 720; 720 + 72 = 792.$$

Arbeit bedeutet es natürlich eine Erleichterung, wenn die Kinder die Aufgabe in Ziffern vor sich haben. Aber wir werden uns zu überlegen haben, ob wir diese Erleichterung im gegebenen Falle gewähren sollen. Denn wir dürfen auch die Aufgabe nicht aus dem Auge lassen, das Zahlengedächtnis der Kinder zu üben, und müssen ihnen darum unbedingt versetzen, 4 Stellen — z. B. die letzte Aufgabe — ohne Zifferhilfe zu machen. Und selbst, wenn wir bei mehr Stellen dann und wenn jene Erleichterung eintreten lassen, so soll doch erst nach der vollständigen Ausrechnung die Note der Rechnung erfolgen in der Form:

$$2940 : 7 = 420$$

$$79 = 1009 = 21$$

$$22 \cdot 34 = 748.$$

Das eigentliche schriftliche Rechnen ist etwas ganz anderes, das ist eine Unterstützung der Operationstätigkeit. Hier handelt es sich nicht darum, das Ergebnis zu notieren oder mit einem Zeilen den Gang der Rechnung zu kennzeichnen. Hier soll vielmehr die schriftliche Durchführung eine Erleichterung — nicht des Kopfrechnens, sondern gegenüber dem Kopfrechnen sein.

Als Beispiel: $37 + 18 + 48$ würde man im Kopfe so rechnen können: $37 + 3 = 40, + 15 = 55, + 7 = 62, + 41 = 103$. Wer rascher überblickt, würde sagen: $37 + 64 = 101$ und denken: weil 37 und 68 gleich 100 ist. Beim schriftlichen Rechnen aber setzt man die drei Summanden untereinander und zählt erst die 21 Einer und dann die Zehner zusammen. Das ist ein ganz anderes Lösungsverfahren.

Es setzt voraus, daß die Einführung ins System bis zu einem ziemlich hohen Grade erfolgen konnte; ferner, daß auch der Fest-Gewert der Ziffer, der ja mit der Einführung ins System noch nicht gegeben ist, in klaren Übungen zum Bewußtsein kam; es setzt endlich voraus, daß die Ziffer mit der hauptsächlichsten Stellvertretungsvorstellung des Zahlbegriffs gewarnt ist. Da man diese gesamte Entwicklung — wie gesagtem dargelegt wurde — nicht verfrühen darf, so können die Lösungsverfahren des schriftlichen Rechnens erst nach dem Erreichen eines gewissen Abschlusses in Bezug auf Zahlvorstellung, Operationvorstellung und Operationstechnik aufzulesen, d. h. nach unseren Erfahrungen frühestens im 4. Schuljahr, lieber noch später.

Und noch eins: Wenn man den Zeitpunkt für gebührend erachtet, die Kinder in die schriftlichen Lösungsverfahren einzuführen, dann soll auch in ihrem Augen das ganze Gebiet als ein Gebiet neuer Aufgaben behandelt werden. Sie müssen von Anfang an dabei das Bewußtsein haben: das ist etwas anderes! (Nicht etwa das: das ist etwas Schwereres!) Dann werden die Lösungsverfahren des schriftlichen Addierens, Subtrahierens, Multiplizierens und Dividierens gerade im Vergleich und im Gegensatz zu den bisherigen mündlichen Formen zu vollster Klarheit gelangen. Es ist also nötig, die Lösungsverfahren des Kopfrechnens denen des schriftlichen immer und immer wieder gegenüberzustellen. Ja, später kann man bei passenden Aufgaben erst das Problem aufstellen, ob die Aufgabe wohl besser im Kopfe oder mit Hilfe von Papier und Feder gelöst werden möchte. Selbst einen Wettbewerb der beiden Verfahren kann man einrichten lassen.

Als letztes Ziel möchte dem Lehrer bei dem allen vorzuschreiben, die Kinder zu dem Bewußtsein zu führen, daß das schriftliche Rechnen sicherer, das Kopfrechnen aber schneller und darum in vielen Fällen erfolgreicher ist, nämlich überall dort, wo man auch eine Rechenprobe anstellen hat. Das ganze wirtschaftliche Leben des Kleinkindes ist davon voll: Was kostet $\frac{1}{4}$ g Fleisch, wenn das ganze 2 80.3 kostet? Ist es recht, wenn der Fleischhacker für 80 g mehr 15.3 verlangt? Ist es vorteilhafter, 1 g Fleisch mit Zulage für 80.3 oder $\frac{1}{4}$ g ohne Zulage bei einem Pfandpreis von 1.15.6 zu nehmen? Wieviel erspare ich, wenn ich eine Suppe Brodwein kaufe? Wieviel erspare ich, wenn ich gleich 10 g Zucker nehme? Und bei $\frac{1}{4}$ Zentner? Wenn ich Kartoffelreife zum Ausmachen kaufe? Wieviel kann ich mehr veranschlagen, wenn ich Pflanzenerbitter nehme statt anderer? Wieviel erspare ich, wenn ich den Anzug oder den Schrank oder das Fahrrad sofort bezahle?

Auch von diesem Standpunkte aus ist dem Kopfrechnen eigentlich immer der Vorrang einzuräumen, und zwar nicht nur einem Kopfrechnen, das in technischen Übungen besteht, sondern vor allem auch dem, das die Aufgaben des Lebens zunächst ohne schriftliche Hilfe zu lösen sucht. Dem Kopfrechnen muß in der Bewertung und im Anreiz der ihm zu gewährenden Zeit auf der Mittelsstufe dem schriftlichen Rechnen gegenüber stark überwiegen, auf der Oberstufe ihm mindestens gleich stehen.

4. Abschnitt des Lehrverfahrens:

Die weiteren Rechnungsarten.

§ 37. Die Bruchrechnung.

In einem früheren Abschnitte kam es uns darauf an, die Auffassung der Bruchzahl und die Einführung in das Verständnis zu zeigen. Jetzt sollen die Operationen innerhalb der neuen Zahlform durchgeführt werden. Dazu macht sich zunächst eine Übersicht über die in Betracht kommenden Übungen nötig, eine Übersicht, wie sie auch schon in dem Abschnitte von der Fortführung der Operationen sich als zweckmäßig erwies. In früheren Abschnitten, wo es sich um die Gewinnung und Etablierung der einzelnen Operationen handelte, kam eine solche Übersicht noch nicht in Frage. Hier aber ist dies der Fall, weil oben die Operationen beleuchtet werden und in ihrer Gesamtheit Anwendung finden sollen auf einem besonderen Gebiete des Zahlbegriffs. Diese Übersicht gestaltet sich so:

1. Verwandeln a) von ganzen Zahlen in Brüche, b) von Brüchen in ganze Zahlen, c) von Brüchen in Brüche.

2. Addieren und Subtrahieren von Brüchen eine Verwandlung, mit Verwandlung, und zwar hauptsächlich Verwandlung b beim Addieren, Verwandlung a beim Subtrahieren, Verwandlung c bei beiden.

3. Multiplizieren: ein Faktor ist ein Bruch, beide Faktoren sind Brüche; dann oft Verwandlung b und c.

4. Dividieren: a) es kommen ganze Zahlen in Betracht, nur der Quotient ist ein Bruch, z. B. $5:8=\frac{5}{8}$;¹⁾

b) der Dividend ist ein Bruch, z. B. $\frac{5}{8}:3=\frac{5}{24}$;

c) der Divisor ist ein Bruch, z. B. $7:\frac{3}{8}=\frac{56}{3}=18\frac{2}{3}$;

d) beiden sind Brüche, dann treten die verschiedenen Verwandlungen; z. B. $\frac{5}{8}:\frac{3}{8}=\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}$.

¹⁾ Um die Darstellbarkeit und Leichtigkeit des Lesens in diesem Buche nicht zu beeinträchtigen, wollen wir uns damit abfinden, daß die Brüche mit schrägen Bruchstrichen gesetzt werden. Für das Schlußgelingen werden wir das nicht empfinden, sondern damit helfen, daß die Schüler von Anfang an den richtigen Bruchstrich gebrauchen, und zwar mindestens bis zum Beweise des Bruchrechnens.

²⁾ Die größte Anstrengung der Rechenübungen wird sichtbar, wenn man sich vergewissert, daß je eigentlich jeder Bruch eine unangewandte Division ist. Wie die Rechenmacht (und die Zahlenmacht) in wechselndiger Abhängigkeit steht von Addition und Subtraktion, die Systemmacht (und das Zahlensystem) in solcher wechselndigen Abhängigkeit von Multiplikation, so die Bruchmacht von Division. In diesem Punkte erscheint die erste der unter 4 genannten Abhänge als eine Division, die nicht möglich; die zweite als die Division einer Division, denn $\frac{5}{8}$ ist selbst eine Division, die Teilung durch 8 eine unzulässige; die dritte als die Division mittels einer Division: daß 7 geteilt werden soll, ist eine Division, aber der

Das Vorstehende ist ein Überblick über die in Betracht kommenden Teilziele. Man darf es nicht eine stoffliche Übersicht nennen. Unter Stoff versteht man gewöhnlich ein Wissen, hier aber handelt es sich um ein immer höher abstrahierendes Können. Viel näher verwandt als mit „Stoffen“ sind diese Übungen mit Arbeits- und Erwerbsmethoden, die der Lehrer natürlich auch in der Übersicht beherrschen muß¹⁾.

Es wäre nun bestlich nicht richtig, die Reihenfolge der vorstehenden systematischen Übersicht von auch der methodischen Behandlung sagende legen zu wollen. Allerdings liegt dieser Gedanke allerdings nicht. Denn in jener Übersicht ist ein Aufsteigen zu größeren Schwierigkeiten ganz unverkennbar. Gleichwohl muß aus psychologischen Gründen davon abgesehen werden. Um dies zu verstehen, braucht man sich die Sache nur einmal plastisch, in Beispielen vorzustellen. Falls also die Reihenfolge der Übersicht gleichzeitig als Reihenfolge der methodischen Übungen zu gelten läßt, würde man zunächst zu üben haben, ganze Zahlen in alle möglichen Brüche zu verwandeln, also 2, 3, 5, 8, 11 usw. in Halbe, Drittel, Viertel, Fünftel, Sechstel usw. Danach erschiene die umgekehrte Umwandlung: Halbe, Sechstel, Neuntel usw. in ganze oder gebrochene Zahlen zu verwandeln. Es kann nun nicht bezweifelt werden, daß auf diesem Wege Abstraktionen sich erwerben lassen, aber doch nur von solchen, die einerseits im räumlichen Vorstellen, andererseits im eigenen Erarbeiten der Abstraktionen schon sehr geübt sind. Und selbst bei ihnen wäre es der Weg des Systems, der zu mechanischer Handhabung und zur Regel führt. Dazu kommt, daß der bisherige Rechenunterricht weder zu starren räumlichen Vorstellen noch zum eigenen Erarbeiten der Abstraktionen angeleitet hat, sondern glaubte, sein Ziel erreicht zu haben, wenn eine gewisse Höhe der Mechanisierung erreicht war. Deshalb würde ein solch systematischer Betrieb für die große Mehrheit unserer Kinder in der Hauptsache die Wirkung haben, sie mit aufgegebenen Abstraktionen anzufüllen.

Vielmehr gelten auch hier in gleichem, wenn nicht in erhöhtem Maße die Anforderungen an das Lehrvorgehen, die sich aus den Grundätzen der Anschauung und Selbsttätigkeit, der vollen Anschauung und der Eigentätigkeit entwickeln lassen, und die in

¹⁾ Dieser ist selbst schon eine Hindernisaufgabe. Sie steht nämlich verhängt: die Division einer Division durch eine Division. Man muß sich das klar machen, um die ganz interessanten Abstraktionsanforderungen zu sehen, welche in diesen Übungen enthalten sind, und kann, wenn Kinder angeschlossen sollen.

²⁾ v. A. Rechenleistung versteht sich auch die Rechenfertigkeit, d. h. Rechenfertigkeit, Experiment, eigene Handlungen in überlieferten Gut usw.; weitere Wortverwendung, mathematische Handlung usw.; sowie die verschiedenen Darstellungsmethoden, die nicht etwa ganz selbstredend u. a. m.

beruht auf unser Gebiet verlagern, daß alles Rechnen zunächst an Dingen, dann an räumlichen Symbolen durchgeführt, danach an Dingen und räumlichen Symbolen vorgestellt werde, damit es zur erwachsenen Abstraktion gelange; daß aber auch der vollendeten Abstraktion noch die Raumvorstellung beistehen zur Seite stehe, daß die vollendete Abstraktion sich augenblicklich konkretisieren können solle.

Dieser Gehalts der dinglich-symbolisch-räumlichen Durchführung wie der darauf folgenden dinglich-symbolisch-räumlichen Vorstellung ist indes nicht zu verwickeln, denn, wo die kindliche Psyche überschritten wird mit einer Vielzahl von Formen des neuen Zahlbegriffs, von denen sie nicht einzelne klare und deutliche Vorstellungen gewinnt, kann, sondern die ihr gegenüberstehen als eine im wesentlichen unterschiedslose Masse. Die methodische Behandlung der Bruchrechnung kann darum in ihrer Aufeinanderfolge nicht Überforderungen mit den in unserer Übersicht genannten Übungen. Oder mit anderen schon bekannteren Ausdruck: sie wird nicht logischen Charakter haben dürfen, sondern psychologischen haben müssen.

Mit Rücksicht auf die wiederholt dargestellte Entwicklung empfiehlt es sich, die Übungen durchzunehmen in drei verschiedenen Stufen, der Stufe der Grundlegung, der Erweiterung und der Abstraktion.

Die erste Stufe, die Stufe der Grundlegung, ist die Operationen an solchen Bruchzahlen, die für das Leben eine so hervorragende Bedeutung haben¹⁾, daß sie schon in den Bereich der kindlichen Interessen getreten sind.

Welche sind das? Wenn wir noch die Voraussetzung machen, daß es Bruchzahlen sein sollen, die von jeder Hausmutter nicht nur gemacht, sondern verwendet werden, so ist das Ergebnis geradezu verblüffend; denn dann sind es nämlich nur drei Brüche: Halbe, Viertel und ebenfalls Zehntel. Man gehe sich die gesamte häusliche Wirtschaftsführung durch, die überhaupt in den Gesichtskreis der Kinder tritt. Ja, auch das gesamte Kleingewerbetreiben verwendet nur diese drei.

Man wird einwenden wollen, es können doch die Achtel noch dazu. Das ist aber nicht der Fall. In unserer Erfahrung ist uns die Bruchzahl Achtel nur zweimal entgegengetreten: ein Achtel Rotwein, wenn nämlich $\frac{1}{2}$ Liter nur viel schmeckt — man sieht dem Fülle seine Seltenheit gleich an; und dann der andere: ein Achtel Bier,

¹⁾ Es ist selbstverständlich auseinander zu halten: Bedeutung für das wirtschaftliche Leben und Bedeutung für die mathematische Bildung, hier ist zunächst das erste gemeint.

d. h. ein Fünftel von $\frac{1}{2}$ hl, wie es von kleinen Landparzellen hier und da noch im Masse geliefert wird. Außerdem kommt noch der Anstrich halbes Viertel von, er wird aber mit dem wachsenden Wohlstand der Bevölkerung und mit der fortschreitenden Durchdringung des metrischen Systems immer weniger. Auch unsere Leute kaufen heute ein Viertelpfund Kaffee und schicken die Kinder nicht um ein halbes Viertel, und die halbe Viertelmilch ist auch schon so gut wie ganz ausgerufen. Dazu kommt, daß eine Mahlzeit dieses halben Viertels, etwa drei halbe Viertel, überhaupt nie gebrauchlich gewesen ist, wohl aber die Form unterhalb Viertel. Das Bruch $\frac{1}{2}$ aber kennen der Mann und die Frau des Volkes nicht aus ihrer Wirtschaftsführung (von besonderer beruflicher Tätigkeit, die dazu führen könnte, abgesehen), sondern nur aus der Schule. Das zeigt, daß es dem Volke Schwerfälliges bewußte, kleinere Teile als Viertel nicht vorzustellen.

Auch der weitere Hinweis auf Drittel, Sechstel, Zwölftel stimmt nicht. Man suche im Wirtschaftsleben des Volkes eine einzige Maßbezeichnung, die auf Drittel uzw. lautet. Im Munde des Volkes kommen Drittel nur an zwei Stellen vor: ich bin mit dieser Arbeit zu einem Drittel, zu zwei Dritteln fertig — und dann bei $33\frac{1}{3}\%$ und ähnlichen Angaben.

Gegenüber ist im Laufe der Jahre als Ergebnis unserer metrischen Maße und der fortschreitenden Rechnung mit Dezimalzahlen noch das Zehntel hinzuge treten, hauptsächlich infolge der Gewohnheit des Biertrinkens als Zehntelliter. Außerdem beginnt langsam das Zehntel-Pfund und das Zehntel-Kilo sich einzuführen, vor allem im Kleerverkauf von Lebensmittel, wo es dem Händler eine viel bequemere Berechnungsmöglichkeit bietet¹⁾. Auch hier erscheinen die Formen außerhalb Zehntel, drei und ein halb Zehntel beachtenswert. Mit drei-Erteschen also kommt das Volk von Allen, was darüber hinausgeht, gehört dem besondern Besoße an. Sollte das nicht auch pädagogisch-unterrichtlich zu denken geben?²⁾

An diesen gut bekannten oder ziemlich bekannten, jedenfalls im wirtschaftlichen Gebrauch vielfältigen Brüchen muß man den Schwimmer in der Bruchrechnung erst orientiert werden. Die Stufe der Grundlegung arbeitet also zunächst nur mit diesen drei Brüchen.

¹⁾ Man beachte auch lang Viecherbesen und Lebensmittel.

²⁾ Bei diesen Zehnteln stehen wir unter anderem zwei Mäßen unserer Schule vor der Seele, gute, feste Kinder. Wir hoffen, daß sie nicht lange flussieren werden. Aber ich kann den Definition nicht los werden, daß sie nur dann, wenn sie etwa in einem Band einstudiert wären, der lausende Rechnung mit sich bringt (Fünftel, Drittel, Sechstel, in ihrer Fortrechnung über halbe, Viertel und Zehntel hinaufkommen würde). Und sie werden jedenfalls durch durchkommen.

Nunmehr wird unsere Übersicht aus gute Dienste leisten. Wir wollen uns nach ihr richten bei der folgenden Darstellung der Übungen.

1. Ganze in Halbe, Viertel und Zehntel zu verwandeln, das heißt hier: das Zerlegen von Äpfeln und anderen Früchten, von Kartoffeln, Backwaren, Semmeln usw. wird nach Bedarf wirklich vorgenommen. Auf das Papierfüllen als symbolische Bruchdarstellung seitens der Kinder ist schon hingewiesen worden. Das vorstellende Verwandeln wird nun viel geübt werden, und zwar nicht bloß an diesen Dingen, sondern auch an anderen, an Kuchen, Apfelmis, Brot, sehr bald aber auch an allen in Betracht kommenden Maßbeziehungen: Maß, Deutrol, Sebock, Pfund, Kilogramm, Zentner, Zentimeter, Meter, Kilometer, Liter, Hektoliter, an Stunden, Tagen, Monaten und Jahren.

Dann tritt das Rückverwandeln von Halben, Vierteln und Zehnteln in Ganze, wozu die Gewöhnung an die gerundete Zahl verbunden ist. Das Verwandeln von Bruch in Bruch erscheint auf dieser ersten Stufe als Verwandeln von Halben in Viertel und von Halben in Zehntel und umgekehrt. Außerdem empfiehlt es sich, die Viertel mit den Zehnteln vergleichen zu lassen, wie wir das schon bei der Einführung in die Bruchzahl angedeutet haben.

2. kommt in Frage das Addieren und Subtrahieren von Halben, Vierteln und Zehnteln in echten und unechten Bruch- und gemischten Zahlen. Wenn man sich im Anfangs einerseits Halbe und Viertel, andererseits Halbe und Zehntel zusammensetzen wird, so bildet doch bald das Addieren von Vierteln und Zehnteln den Kindern dieser Stufe Probleme, die sich von ihnen auf mehrfache Art lösen lassen, und zwar ohne Hilfestellen des Lehrers. Man sieht, das macht nicht besondere Schwierigkeiten und stellt doch immerhin gewisse Anforderungen.

3. Multiplikation. Hierher gehört zunächst alles Hinsiehende in dem Sinne, daß Halbe, Viertel und Zehntel als Multiplikanden auftreten, die eine bestimmte Anzahl (also mit einer ganzen Zahl) „mal so nehmen“ sind; z. B. $\frac{1}{2}$ & Brot für jeden von 12 Kindern! Oder $\frac{1}{4}$ & $3 = \frac{3}{4}$ &, mit entsprechender Verwandelung: $= 3$ und $\frac{1}{4}$ &!). Und da wir gewöhnt sind, die Multiplikation mit dem Endkriterium zusammen zu thun, so schließt sich daran: Wieviel mal kann ich $\frac{1}{4}$ & von 3 & wegnehmen? Wie oft ist $\frac{1}{4}$ & in 3 & enthalten? Wie oft in $3\frac{1}{4}$ &?

Ferner gehört hierher das ganze Gebiet der Verwandlungen¹⁾, insofern sie der Form nach Multiplikationen, wenn auch schon ihrem

¹⁾ Wir empfehlen, die gerundete Zahl immer mit „und“ auszusprechen zu lassen. Da davon zu erwarten ist, das „und“ wiederholt ausgesprochen werden.

²⁾ Speziell auch der sehr 1. gestrichelte, der aber von hundertfachen Fällen vorweggenommen werden können.

Sinne nach Divisionen sind; aber jenseit muß berücksichtigt werden. Z. B. $\frac{1}{2}$ Dtl. Taschentücher sind 4 Stück, $\frac{1}{2}$ Schock Eier sind 20 Stück, $\frac{1}{2}$ M sind 50 M, $\frac{1}{2}$ Ztr. Zucker sind 25 Z, $\frac{1}{2}$ m Band sind 50 m, $\frac{1}{2}$ Jahr sind 3 Monate, $\frac{1}{2}$ Jahr sind 2 Monate, $\frac{1}{2}$ Stunde sind 30 Minuten, $\frac{1}{2}$ Tag sind 12 Stunden, $\frac{1}{100}$ M sind 70 Z, $\frac{1}{100}$ hl Eier sind 30 l, $\frac{1}{2}$ kg Butter sind 500 g, $\frac{1}{2}$ g Fleisch sind 375 g, $1\frac{1}{10}$ g Wurst sind 500 g, $\frac{1}{10}$ g Schweinefleisch sind 200 g, $\frac{1}{2}$ km Wag sind 750 m... alles Mögliche mit den Brüchen $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, bis $\frac{1}{100}$. Auch hieraus schließt sich die Umkehrung: 50 Z sind $\frac{1}{100}$ M u.s.f.

Weiter wird angegeben, was schon in einem Beispiel angegeben wurde:

$2\frac{1}{2}$ Schock Eier sind $120 + 15 = 135$ Stück

$2\frac{1}{4}$ „ „ „ $180 + 45 = 225$ „ usw.,

d. h. alles das auch mit reichlicher Übung in gemischten Zahlen. Dazu tritt die Umkehrung: 25 Monate sind 2 und $\frac{1}{4}$ Jahr usw.

Es sind ferner dem Sinne nach dieselben Aufgaben, wenn wir rechnen, was $\frac{1}{2}$ l Milch kostet, was $\frac{1}{2}$ Ztr. Äpfel, $\frac{1}{2}$ Dtl. Kaugummi, $\frac{1}{2}$ l Sahne, $\frac{1}{2}$ kg Schokolade u.s.f.

Ebenfalls hierher gehört die höchst wichtige Gruppe von Aufgaben wie: 1 g Kalbfleisch kostet 90 Z, rechne $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ g! Der Fleischer rechnet nach Zehnteln, macht es ihm nach! $\frac{1}{100}$ g kosten 27 Z — rasch dazwischen: 60 das vorhinmal? Ja, wenn jemand $\frac{1}{4}$ g Knetleimstück haben will, und es ist ein halbes größer, da sag: er: darf es etwas mehr sein? und da packe ich es! die Waage. Wenn's 180 g sind, $\frac{1}{100}$, dann darf es 27 Z kosten.

Macht selbst solche Aufgaben! Ich habe $\frac{1}{2}$ g Rindfleisch, das g zu 90 Z. Er sagt: es ist etwas mehr. Wenn es 400 g sind, dann sind es $\frac{1}{100}$, dann darf es 78 Z kosten. Wenn ich $\frac{1}{2}$ g habe und es ist etwas mehr, vielleicht 270 g, dann ist es noch kein halbes Zehntel mehr, dafür darf er mir höchstens 4 Z abnehmen, also zusammen 49 Z.

1 g Reis kostet 38 Z; rechne $\frac{1}{2}$ g! $\frac{1}{4}$ g kostet 9 und $\frac{1}{2}$ Z, $\frac{1}{2}$ g kosten $27\frac{1}{2} = 29\frac{1}{2}$ Z; da muß ich natürlich 29 Z zahlen. Da ist es besser, wir nehmen 1 ganzes Pfund... Oder 5 g, liegt ein Kind hirta, bei 5 g kostet dasselbe Reis Maß 36 Z. Da hätten wir an jedem Pfund noch 2 Z gespart, zusammen 10 Z.

Diese Übung verlangt also, die gemachten Brüche mit den verschiedenen Zahlen des ersten Hunderters, und gegebenenfalls auch größeren, zu multiplizieren. Die Multiplikation Bruch mit Bruch hier zu bringen — man vergleiche die Übersicht — hat keinen Zweck; $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ würde eben ein halbes Viertel, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{100}$ ein halbes Zehntel ergeben. Aber das Wesen dieser Stufe besteht gerade

durch, zunächst einmal innerhalb der Halben, Viertel und Zehntel mit allen Operationen beinahe zu werden.

4. So ähnlichen Ergebnissen gelangen wir, wenn wir die Division in unserer Übersicht betrachten. Da sollen einmal unsere Brüche nur als Quotient erscheinen, z. B. 3 Äpfel verteilt unter 6 Kinder! Da bekommt jedes $\frac{1}{2}$ Apfel. 3 Stüchchen Kuchen unter 6 Kinder! Da erhält jedes $\frac{1}{2}$ Stück (nicht etwa als $\frac{2}{4}$ aufzufassen, sondern so, daß je 4 Kinder sich in eins zu teilen haben). Man sieht schon, Übungen von dieser Form bieten eine gewisse Schwierigkeit der Aufgabenbildung, während die Lösung verhältnismäßig leicht ist. In welchem Falle ist nichts einfacher, als diese Schwierigkeit den Kindern aufzuweisen: Macht Verteilungsaufgaben, daß jedes $\frac{1}{2}$ bekommt, daß jedes $\frac{2}{4}$ bekommt, $\frac{1}{2}$ aber.

Bei weiteren Fortschritten auf diesem Wege werden damit die Gerechneten ganz allein die nächste Form finden, daß auch der Divisor ein Bruch sein kann. Sie werden ohne Mühe die beiden Aufgaben bilden: $\frac{1}{2}$ Apfel geteilt unter 3 Kinder, ist $\frac{1}{6}$; und $\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{6}$. Dazwischen erscheinen vielleicht die Formen: $\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{6}$; $\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{6}$; $\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{6}$; $\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{6}$ u. s. w. Sie bedürfen keiner besonderen Hervorhebung. Darüber hinauszufragen, sei der nächsten Stufe vorbehalten.

Der Blick auf unsere Übersicht wie auf die bisherigen Übungen zeigt ferner, daß der Bruch als Divisor schon durchgenommen worden ist im Zahlenstrahl, und daß Bruch durch Bruch erst später erscheinen kann.

So zeigt es sich, daß die erste grundlegende Stufe der Bruchrechnung, die sich nur mit Halben, Vierteln und Zehnteln beschäftigt, in der Hauptsache die Verwandlung pflegt; und daß ein höchst geeignetes Gebiet für diese Übungen das der häuslichen Wirtschaft ist. Es können dann leicht viele der folgenden, weil un Zweckmäßigen Aufgaben entlehrt werden, wie sie hin und wieder noch die Rechenbücher fügen, z. B. Verwandle 9; 15; 13; 22; 28; 33; 36; 45; 58; 72; 75; 96 in (1. Duz., Gr.), in Viertelmeier, (Liter., -duzend, -grus).

Da es auf allen Stufen durchaus notwendig ist, daß die Kinder selbst Aufgaben bilden, so ist es dem Lehrer, der nach und nach nicht überflüssig helfen will, vielleicht lieb, folgende kleine Übersicht bei der Hand zu haben. Auch empfiehlt es sich, sie von den Kindern selbst nach und nach erarbeiten, verändern und in irgend-einer Weise aufzeichnen zu lassen. Die heute üblichen Wand-austriebe bieten dafür treffliche Gelegenheit.

Wir berechnen

nach Kilogrammen und Pfund: Brot, Butter, Käse, Kaffee, Eichen, Mehl, Mandeln, Kirschen, Fleisch, Wurst, alle trocknen und die meisten getrockneten Gemüse, immer Seife, Leder, Bindfaden, Nadel, Papier usw., man kann etwa sagen: alle Groß- und Verbrauchsgenstände —

nach nach Zentnern: Mehl, Kartoffeln, Reis, Zucker, Obst usw.⁴⁾;

nur nach Zentnern: Steinkohlen, Braunkohlen, Preßkochen, Hafer, Roggen, Getreide usw. Teilweise und für den Großhandel ausschließlich kommt das Gewicht der Tonne in Betracht —

nach Dutzenden: Handtücher, Taschentücher, Krüge, Strümpfe, Schürzen, Kapseln usw. Fast das ganze Gebieth fertiger und halbfertiger Kleidung und Wäsche rechnet so. Ferner Apfelsinen, Schreibhefte, Bleistifte, Löffel, Messer und Gabeln, Stühle uaf. —

nach Gross: Kapseln, Stahlkugeln, Reiterdecken —

nach Schock und Mandeln⁵⁾: Eier, Stämme, Christbäume, teilweise auch noch Käse (z. B. Harzer), auch Mandeln auch noch Beirings —

nach Tausenden: Zigaretten, Trol, Ziegelsteine, Nadel, Papier —

nach Litern (l): Milch, Honig, Wein, Spiritus, Petroleum —

nach Hektolitern (hl): Bier, Wein, Kohn —

nach Kubikmetern (km): Wasser, Gas, Holz, Damm, Gartenschnee —

nach Metern (m): alle Webstoffe, wollenen und baumwollenen, leinenen und seidnen, die nicht abgemessen, sondern vom Stücke geschitten werden: Herdentuch, Bettzeug, Kleiderstoffe, Band —

nach Kilometern (km): Eisenbahnen, Weglängen, Luftlinien —

nach Quadratmetern (qm): Bauplätze, Straßen, Wandanstriche, das in Preisen gezeichnete Neudruck (z. B. beim Tischler) —

nach Tagen und Stunden: Arbeitsleistungen, bei Menschen Arbeitsstunden, bei Wasser und Dampf Pferdekräftenstunden, bei Elektrizität Kilowattstunden usw.

Die zweite Stufe der Bruchrechnung, die Stufe der Erweiterung, stellt sich nun, nachdem die Übungen mit den bekannten

⁴⁾ Hier ist natürlich die private kleinste Wirtschaftseinheit gemeint, und nur in der vorerwähnten, nicht der Großhandels, der Einzelhandel dagegen kommt zwar oft noch mehr vor.

⁵⁾ Es ist bemerkt, daß die Bezeichnung Schock und Mandel im Leben meistens vorkommt, nur in der Schule.

Bruchzahlen bis zu einer gewissen Sicherheit gelassen sind, den Fortschritt dadurch zu gewinnen, daß sie die geläufig gewordenen kleinen Überträge auf eine Reihe weniger gebräuchlicher Bruchzahlen, mit denen aber sich doch noch leicht umgehen läßt, weiß als Beibringungen enthalten, die zu den bekanntesten gehören. Demzufolge folgen wir zu den Hälften und Vierteln die Achtel, zu den Zehnteln die Fünftel und Zwanzigstel und nehmen endlich noch die Gruppe der Drittel, Sechstel und Zwölftel hinzu, also zu den drei bekannten Bruchzahlen sechs neue.

Das Verständnis für sie zu erlangen ist ganz leicht, zumal mit Benutzung des Papierfaltens. Auch die verschiedenen Formen der Verwindung begreifen mit der gleichen Hilfe nur geringen Schwierigkeiten und bedürfen nur der Übung, um nach und nach mit immer geläugtem Raumgehalt zur Verfügung zu stehen. Von ihnen kann nun die dritte, die Verwindung von Bruch in Bruch, mehr herausgeproben werden: Halbe in Viertel, Sechstel, Achtel, Zehntel, Zwölftel, Zwanzigstel; Drittel in Sechstel, Zwölftel; Viertel in Achtel, Zwölftel, Zwanzigstel; Fünftel in Zehntel und Zwanzigstel; Sechstel in Zwölftel, Zehntel in Zwanzigstel — und all dies auch umgekehrt, und all dies auch in umgedrehten Bröcken. Das bedeutet nun nichts mehr und nichts weniger, als daß hier das gesamte Kürzen und Erweitern in anschaulicher Darstellung und zuletzt noch in anschaulich-räumlicher Vorstellung durchgenommen wird — allerdings ohne Regeln und ohne jeden Mechanismus.

Die Hauptschwierigkeit dieser Stufe ist das rechte Aufgabenbilden, weil nämlich nur wenige der in Betracht kommenden Aufgaben so lebenswahr gestaltet werden können, wie wir es wünschen, da eben das Wirtschaftsleben sich nicht dieser Bröcke bedient. In den seltenen Fällen, wo dies geschieht — man erhält z. B. von einer Fabrik zur Probe „ $\frac{1}{100}$ Dutzend“ — da wirkt es beunruhigend oder befremdend. Es fällt uns also zunächst die Aufgabe zu, lebenswahre Fälle herauszusuchen. Dafür kommen in Betracht solche, wo eine sachliche Einheit, nicht die Einheit einer höheren Mafzahl, geteilt wird:

5 Leute spielen zusammen ein Les, jeder $\frac{1}{5}$; 8 Schüler teilen sich ein Brot, jeder erhält $\frac{1}{8}$; 8 Kinder bekommen eine Tafel Schokolade, 1 einem Kinde, 8 Soldaten ein Stück Butter; auf 3 von ihnen kommt 1 $\frac{1}{2}$ Fleisch; 3 Bauern teilen sich in 1 Korb, in 1 Sack Eier, in 2 Ztr. Weißbrot, in 10 Ztr. Kartoffeln usw. Man sieht, lebenswahr sind nur Teilgaben im kleinsten Grade, schon bei 4 hat man den Eindruck der gleichartigen Herde. Dieser Gedanke erweckt sofort die Aufgabe: 20 Schafe erhalten 1 $\frac{1}{2}$ Salz;

wieviel kommt auf jedes? Dies Beispiel aber zeigt, wie nahe man der Grenze der Lebenswirklichkeit steht.

Mit der geringen Zahl dieser und ähnlicher Beispiele ist natürlich das Ziel: beizutragen zur Beherrschung des Buchrechnens — nicht zu erreichen. In solchen Fällen muß es daher gestattet sein, auch zu solchen Erasmustiteln zu greifen, die wir sonst vermeiden. So können wir dann, Phantasieaufgaben zu Hilfe zu nehmen, Zahlenaufgaben, denen keine Wirklichkeit entspricht. Es ist von vornherein klar, daß sie an eine erträgliche und wirksame Behandlung wesentlich höhere Anforderungen stellen.

Hier werden uns zunächst die Wohlgelehrten, Reformen wie Altmethodiker, in den Arm fallen wollen: „Nicht doch, Phantasieaufgaben! Wir alle wissen von ihnen los, wir wollen dem Leben dienen und nicht der Schule, und eine Reformerschrift darf sie vielleicht dulden, aber nicht verteidigen wollen!“ Aber wir können ihnen nicht ganz recht geben, aus zwei Gründen, einem Erläuterungsgrund und einem Idealen. Zunächst jener: Die vor uns liegenden Buchrechner betreiben — manche fast ganz, die anderen zum größten Teile — aus solchen Phantasieaufgaben. Man liegt es uns fern, die Verfasser deswegen zu scheitern; wo nichts ist, kann auch der beste Wille nichts finden. An dieser Stelle aber, sagt Ihnen Ihr pädagogisches Gefühl, müsse etwas geändert werden, und wenn es auch nur Zahlenformen wäre in unwahrscheinlicher Einkleidung. Und wir stimmen Ihnen bei um der Übungsmöglichkeit willen, die den jeweiligen Energieaufwand nach und nach erniedrigt. Dafür suchen wir den Gewinn anderen, nämlich in der Art der Ausführung. Es sei aber davon die Rede sein soll, erst den andern Grund, den Idealen. Wohl gilt: Von scholas sei etwas dinstufen, aber das hat hier nicht den Sinn, als dürften wir nunmehr lediglich hauswirtschaftliche Aufgaben betragen. Wir dienen dem Leben gerade dadurch, daß wir uns frei machen von der Art der Normalrechnung und der fortwährenden Einübung des angeblich „für das Leben Wichtigsten“. Unser ganzes Buch will doch weiter wirken, als den kräftigen Buchunterricht dadurch dem Leben besser dienbar zu machen, daß wir statt der Absichterei, der Dummheit mathematische Bildung vermitteln. Diese läßt sich nicht ohne Anwendungsgefühligkeit der elementaren Beziehungen erreichen, und daher haben wir im Zahlenformen ein wichtiges Hilfsmittel. Zusammenfassend dürfen wir also sagen: Während das bisherige Buchrechnen in den Übungen mit der reinen Zahl und mit unwirklichen Einkleidungen so gut wie gänzlich aufging, wollen wir als Hauptgebot: die wirklichen Verhältnisse und Notwendigkeiten des Lebens hervorziehen; nicht in der Absicht, daß die Kinder möglichst jede „geholt haben“, sondern in der, sie zu rechter gefühlbetonter

Auffassung ihrer Lebenssphäre gelangen zu lassen. Dabei wollen wir nicht auf die anderen Thesen verzichten. Während diese aber früher fast die alleinige Herrschaft hatten und dabei doch noch gegenständlich in der Luft hingen, wollen wir sie lediglich als ein von Fall zu Fall in Betracht kommendes Hilfsmittel heranziehen und hoffen, daß sie auf jener Grundlage der Wirklichkeit durch ihre besondere Auswahl und durch die besondere Behandlung, die sie erfahren, beitragen werden zu mathematischer Bildung.

Nun zur Art der Ausführung. Wir wünschen sie erträglich und wirksam. Beides wird erreicht werden, wenn die Kinder die Aufgaben lösen können, und zwar mit dem öfters zu klärenden Bewußtsein: Solche Aufgaben gibt es sonst nicht; wir wollen spielerischer solche machen, man kann auch an solchen Aufgaben sehr rechnen lernen. Nach zwei Richtungen geht die erforderliche Gestaltung solcher Aufgaben: Wieviel Geesem hat $\frac{1}{2}$ q? und: Wieviel kostet $\frac{1}{2}$ k, wenn das ganze 70 k kostet. Also nach der Richtung der Umwandlung der Einheiten und nach der der Preisberechnung.

Belegentlich kann es allgemeine Freude und unter großem Interesse der Kinder der Vergleich mit der Wirklichkeit gezogen und festgestellt werden, daß es $\frac{1}{2}$ k gar nicht gibt; daß also niemals nachgezogen werden kann mit unseren Geräten, ob man beim Fleischer für 80 k seine stülpige Wurst bekommen hat, wenn das Pfund 80 k kostete, höchstens angenähert; und die Kinder bekommen den ersten Begriff von mathematischer Annäherung.

Erträglich und wirksam werden solche Phantasieaufgaben ferner dadurch, daß wir ihnen einen mathematischen Sinn abzugewinnen suchen. Ein Gebiet ist hier besonders fruchtbar. Wir können es an allen den vorhin genannten Beispielen sehen. Bei den 6 Schülern kann fortgeführt werden: Wieviel bekommt jeder durchschnittlich? Für wieviel Geld hat jeder durchschnittlich gebraucht? und ähnlich bei den meisten der anderen Beispiele. Damit stellen wir das so wichtige Durchschnittsrechnen heran¹⁾, das zwar in erster Linie theoretisches Interesse hat, das aber quantitativen Vergleichs, dann aber bedeutsame praktische Folgerungen ziehen kann. Z. B., um bei einer schon angeführten Aufgabe zu bleiben: $\frac{1}{2}$ q Fleisch täglich = 166% g; das gibt im Jahre mehr denn 150 k oder 60 kg. Wer so viel isst, steht weit über dem englischen Durchschnitt (47 kg) und noch mehr über dem italienischen (18 kg), und steht zugleich vor der Frage, ob das gesund und wirtschaftlich ist.

¹⁾ Vgl. in dem Buche II „Nützliche Rechenarten“, wird noch näher darauf eingegangen werden.

Wir lassen zusammen. Die wichtigste Schulerigkeit dieser Stufe besteht darin, daß wir Operationsübungen mit Brüchen, die im gewöhnlichen Leben so gut wie nicht vorkommen, dennoch zu haben suchen, und zwar durch die kindliche Selbsttätigkeit und selbst dadurch, daß wir gelegentlich den höheren mathematischen Zweck ausschalten lassen. Dies wird uns helfen vor der Beschränkung auf formale Übungen, die in unwarer Weise mit einem natürlichen Mitleiden umgeben werden¹⁾.

Hinzu können wir unsere Übersicht noch überfüllen. Das Addieren und Subtrahieren der nun in Betracht kommenden 9 Brüche geht ohne Verwandlung, d. h. bei gleichnamigen, ganz von selbst; mit Verwandlung, bei ungleichnamigen also, erscheint es als interessantes Problem, das sich auf verschiedene Art lösen läßt, nämlich von den Kindern allein²⁾.

Auch die Multiplikation — $\frac{1}{2} \cdot 7$; $\frac{1}{3} \cdot 6$; $\frac{1}{4} \cdot 10$ — bietet keine Schwierigkeiten, solange der Bruch Multiplikand ist. Auch die Kontrollierung ist nicht allzu schwer. Als Multiplikator aber — $12 \cdot \frac{1}{2}$ in dem Sinne, die 12 solle $\frac{1}{2}$ mal genommen werden — stellt er uns vor die Aufgabe, die Kinder noch und noch an der verfallenen Auffassung zu führen, daß das eigentlich in der Hauptsache eine Division ist, wie das ja auch die Stammbrüche zeigen, und daß erst gewissermaßen an zweiter Stelle eine Multiplikation herrscht. Ein Teilziel auf diesem Wege ist erreicht, wenn die Kinder verstehen, daß $12 \cdot \frac{1}{2}$ (in dem Sinne wie vorher) dasselbe meint, wie $\frac{1}{2}$ von 12. Daß hier alle die Reihen der schon angeführten Beispiele in Betracht kommen, braucht nur angedeutet zu werden.

Thema bedarf es nur des Hinweises, daß mit allen Multiplikationsaufgaben immer die Übungen im Zerkleinern zu verbinden sind; sei es, daß die einzelnen Übungen sofort mit dem Ziele ihrer Verknüpfung ausgestattet werden, sei es, daß man mit einer Reihe von Multiplikationsübungen durchrechnet, um darauf eine passende Reihe von Zerkleinerungsübungen folgen zu lassen. Als Beispiel für jenen Fall diene: 7 Kinder haben jeden $\frac{1}{2}$ Apfel bekommen; rechnet! Da hatten wir 2 und $\frac{1}{2}$ Apfel zu verteilen. Rechne vor! $\frac{1}{2} \cdot 7 = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$. Wenn nun einer mehr da ist! Dann können 10 Kinder $\frac{1}{2}$ Apfel bekommen. Rechne vor! $3\frac{1}{2} = \frac{7}{2} = \frac{14}{4}$; $\frac{14}{4}$ ist $\frac{14}{4}$ geht 10 mal. Rechne für 10 Kinder aus! usw.

Die Multiplikation Bruch mal Bruch haben wir uns für die 3. Stufe auf; vorbereiten können wir sie aber recht gut durch die Form: $\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{3}$.

¹⁾ Wie u. B. Veronika $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{10}$ a) Tage in Stunden.

b) $3\frac{1}{2}$ in Min.; c) Schach in Stück; d) Pa. in Stück; e) Orsa in Stück.

²⁾ Tragl. können auch die Aufstellungen der Hauptkategorie der 3. Stufe.

Bei den Divisionsübungen werden zunächst die Fälle, wo nur der Quotient als Bruch erscheint, dann können, das Wesen des Bruches schon mehr zu klären, z. B. $2:6 = \frac{1}{3}$, $3:8 = \frac{3}{8}$, $9:12 = \frac{3}{4}$ usw. Auch hier kann das Aufgabenhilfen so eingerichtet werden, daß das Ergebnis im voraus festliegt.

Die Fälle, daß ein Bruch durch eine ganze Zahl dividiert wird, sind auch jetzt noch nicht besonders zahlreich. Folgende kommen in Betracht: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}$ bis $\frac{4}{5}, \frac{1}{6}$ bis $\frac{5}{6}, 2$; $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3$; $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 4$; $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 6$; $\frac{1}{4}, 12$. Dabei bilden, noch solche wie $\frac{1}{2}:2, \frac{1}{3}:3, \frac{2}{3}:3, \frac{1}{2}:3$ usw. eine Gruppe für sich, da sie im Grunde nichts Neues bieten gegenüber der Division mit ganzen Zahlen, sondern eigentlich nur die Benennung gewechselt haben. Aber auch die anderen machen wenig Schwierigkeiten, denn da das Verändern der Brüche ineinander (Kürzen und Erweitern) auf dieser Stufe häufig geübt wird, so muß man, wenn man beispielsweise $\frac{1}{2}:3$ teilen will, es erst in $\frac{1}{12}$ verwandeln; aus $\frac{1}{12}$ noch man bei dieser Teilung $\frac{1}{12}$ machen, dann gilt es; ebenso $\frac{1}{2}:3 = \frac{1}{12}:3 = \frac{1}{36}$ usw. Damit dürfte das Gebiet der 3. Stufe genügend umschrieben sein.

Die 3. Stufe haben wir als Stufe der Abstraktion bezeichnet, allerdings nicht in dem üblichen Sinne der Formalstufen oder einer sonstigen Lehrsatzmethode. Wir haben vielmehr damit sagen wollen, daß die beiden vorhergehenden Stufen, die der Grundlage und der Erweiterung, von der Abstraktion in der Hauptsache zu enthalten seien, weil es ihre Aufgabe ist, vor allem erst einmal mit gebrochenen Dingen und gebrochenen Maßen zu arbeiten, wirklich handelnd, schend und vorstellend. Dieser 3. Stufe aber weisen wir im allgemeinen die in Betracht kommenden Abstraktionen zu.

Hierbei könnte die Frage gestellt werden, ob denn die volle Abstraktion erreicht werden solle. Oder vielleicht genauer, da wir doch mathematische Bildung betonen: ob in der Volksschule eben auch die volle Abstraktion Ziel werden solle wie in der höheren Schule. Wir antworten darauf mit dem Ergebnisse der Psychologie: Im Auge lassen dürfen wir die Abstraktion auch für die Volksschüler, aber nicht für alle. Wir haben schon genug solche kennen gelernt, die ihr gemacht waren. Trotzdem war es eine Minderheit. Die große Mehrheit der Kinder — und die Psychologie schließt hier die Benutzer höherer Lehrstufen nicht aus — ist bis zum 12. und 14. Jahre, auch noch darüber hinaus, der Abstraktion gar nicht in dem Maße zugänglich, als man gewöhnlich glaubt. Dieser Irrtum ist ja verständlich. Einen geistigen Mechanismus glaubt man als Vorfinden ansehen zu dürfen, zumal wenn er

begleitet ist vom sicheren Aussagen der Definitionen und Rechenregeln. Diesem Fortgang gegenüber delegen wir mit Absicht darauf, sich verlassen zu gehen mit einem geringeren Grade von Abstraktion, dem den Mechanismen aufzugeben, dafür aber einen anderen besser begründeten Mechanismus anzuknüpfen an die durch Konkretisieren gehobene Abstraktion.

In diesem Sinne würden wir es für durchaus möglich ansetzen, daß ein schwaches Kind im Bruchrechnen die Stufe der Grundlegung nicht überschreitet, oder vielleicht ein paar Jahre später dies tut, wenn es im Intelligenzalter des anderen nachgerückt ist. Und die mittleren Begabungen werden im allgemeinen auf der Stufe der Erweiterung so viel Abstraktionsvermögen finden, daß sie nicht nur für die wirtschaftlichen Aufgaben des Lebens genügende Vorbereitung mitbringen, sondern daß sie sogar damit die ihrem Alter entsprechende mathematische Bildung sich erwarten haben. Oder sollen wir annehmen, nach dem 8. Schuljahre, dem 12. Lebensjahre, in dem allgemein die Bruchrechnung als abgeschlossenes betrachtet wird, lerne der Mensch nichts mehr, wenigstens in Bezug auf mathematisches Verständnis der bis dahin betriebenen Übungen nicht? Das wäre ein Irrtum, den jedes Lebenmüßige widerlegen könnte. Mechanismen allerdings geht vielfach verloren, neben einem speziellen Mechanismus wird aber meist auch Bildung gewonnen.

Der mathematischen Bildung wegen stehen Aufgaben dieser Stufe der Abstraktion ja auch in unserem heutigen Rechnenbüchern. Doch verwechseln die meisten von ihnen mathematische Bildung mit Mechanismus. Würden sie eine richtige Auflassung von der Sache haben, so würden sie diese Stufe nicht so oft als trockenes Stroh bieten, das von allen gekaut und verdaut werden muß, sondern als Zerkerbrot, das nur für diejenigen da ist, die das vorige beherrschen. Trotzdem wir nun zeigen konnten, daß mit der Stufe der Grundlegung des vollständigen Wirtschaftslebens, mit der Stufe der Erweiterung sogar des vollständigen Berufslebens im allgemeinen zurechnet, so wird dennoch die Absicht des Erziehers dahin gehen, möglichst vielen, gegebenenfalls allen, auch die dritte und höchste Stufe zugänglich zu machen. Aber eine Forderung des Lehrplans, in dem allgemein verbindliche Unterrichtsziele anfergelegt wären, dürfte es nicht sein.

Würden wir uns nunmehr den Einzelheiten dieser Stufe zuwenden, so gäbe es zunächst Bruchrechnen die einzelnen Operationen geübt sind, würden nun auch die übrigen Brüche mit herangezogen. Es ist klar, daß Dreißigstel, Vierzigstel, Fünfzigstel, Hundstundzwanzigstel, Siebsentel und Beusentel öfter vorkommen werden

wiese stumme Entdeckungende in sich liegt?). Hiermit sind selbstverständlich die gesamten Übungen im Erweitern und Kürzen verbunden. Beides soll nicht auseinandergerissen werden zum Zwecke systematischer und mechanischer Einprägung. Sondern in der gesamten Rechenpraxis besteht jederzeit die Absicht, einen Bruch so klein wie möglich auszudrücken, außerdem doch aber auch die Notwendigkeit, ihn in größeren Zahlen darzustellen, wenn Addition, Subtraktion oder Division mit anderen Brüchen dies erfordert. Auch das Gleichnamigmachen gehört dazu; doch braucht es davon gesprochen zu werden, wenigstens nicht in dem Sinne einer besonderen Schwierigkeit, noch viel weniger in dem einer Regel. Vom ersten Schuljahre an ist es dem Kinde klar, daß man Äpfel und Pfäfen nicht ohne weiteres zusammenzählen kann, oder daß man, wenn man es dennoch tut, im Ergebnis von Früchten sprechen muß; und vom Anfang jeglicher Bruchrechnung an ist diesen so geführten Kindern klar, daß man ebenso wenig Drittel und Fünftel addieren kann, wenn man nicht erst einen gemeinsamen Nenner für beide gefunden hat.

Im Addieren und Subtrahieren bilden nach kurzer Zeit die Kinder selbständig Übungsaufgaben. Es geschieht leicht in der vorweggenannten Weise, will sagen in ganz ungeschicklichen Nummern. Solange das die Kinder freut, braucht man nichts dagegen zu haben. Nur wenn es viel Zeit kostet im Vergleich zu dem sich ergebenden rechnerischen Gewinn, wird man darauf aufpassen müssen und die Arbeiten in andere Richtung lenken. Dabei muß immer wieder gewarnt werden vor lebensunwahren Eindrücken⁷⁾.

⁷⁾ Diese Entdeckungende zeigen die Kinder, wenn sie z. B. den Bruch $\frac{22}{100}$ doppelt mehrmals mit 2 und 5 kürzen. Sie veranlassen die Eins der Kinder an dem Lehrer, daß es noch mehr solche Brüche zu geben, die „so schön liegen“; welche Brüche er ihnen gibt der Aufgabe zufällig, die meisten sehr leichtlich wählen machen und so dann den Lehrer aufgeben. Damit war wiederum ein Stück mathematischer Bildung gewonnen.

⁸⁾ Wie lautet die Landwirt wertete $12\frac{1}{2}\%$ die Roggen, $10\frac{1}{2}\%$ die Weizen, $10\frac{1}{2}\%$ die Gerste und $11\frac{1}{2}\%$ die Hafer. Zur Antwort und für den eigenen Bedarf schreibt er $12\frac{1}{2}\%$ die Roggen, $10\frac{1}{2}\%$ die Weizen, $10\frac{1}{2}\%$ die Gerste und $11\frac{1}{2}\%$ die Hafer. a) Wieviel Getreide wertete er im ganzen? b) Wieviel Getreide bedarf er für sich? c) Wieviel Getreide konnte er verkaufen?—Die ganze Form der Aufgabe erfordert den Anspruch auf Lebensmöglichkeit. Aber man sage mir den Landwirt, der seine Brute und von allem auch seinen Bedarf nach Weizen von Doppelkorn hat (bezeichnet) der erkläre die Fragen a, b und c zusammenhang für sich selbst. Es ist so leicht, die Kinder bilden Phantasieaufgaben, von denen sie von vornherein wissen, sie sind nur vom Witz da, aber nicht in der Wirklichkeit. In demselben Buchstabe findet sich 2 Seiten weiter können auch folgende schöne Aufgabe: K. wertete von Spinnstoffmaschinen $14\frac{1}{2}\%$ Schick, Agat, $12\frac{1}{2}\%$ Schick, Märan, $11\frac{1}{2}\%$ Schick, Klische und $11\frac{1}{2}\%$ Schick, Spilhorn. Von diesen Sorten wertete er $7\frac{1}{2}\%$ Sp. 14, und $11\frac{1}{2}\%$ Schick. a) Wieviel Schick. wertete er zusammen? b) Wieviel Schick. wertete er? c) Wieviel Schick. bedarf er? Hat dieser Schick eine Fräulein, die er abkürzen abgemessen und verkauft hat, und in Schick verkauft, ein kurze Schickfräulein, die Lohr kürzt, mit Weizen zu Ähren, der ist nicht

Auch hier beruht zunächst kein Kind „wie man Brüche addiert“, d. h. es lernt keine Regel, es bildet auch keine Abstraktion des durchlaufenen Wege. Erst hinterher, wenn die Sache längst klar ist, ja wenn sie sogar durch andere Übungen wieder etwas verdrückt ist, mag der Lehrer einmal das Problem stellen: Wie wäre es, wenn auch jetzt jemand fragte, wie man Brüche zusammenzählt? Dadurch würden die Kinder genötigt, zu konkretisieren. Manche würden es vielleicht so tun: $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$ sind $\frac{2}{2}$, und antworten: Ja, wie ist denn das gemeint? Die zählt man doch einfach zusammen. Der Lehrer würde dann zu antworten haben, zu welchem Beispiel gefragt worden sei, und würde dann kaum nötig haben, darauf hinzuweisen, daß man doch noch an andere Beispiele denken könne. Dann werden diese Kinder selbst darauf kommen, daß es doch nicht immer solche „passende“ Brüche sein müssen¹⁾. Und die Eingangsfrage der Kinder wird lauten: „Ja, wenn sie noch nicht gleichnamig sind, dann muß man sie eben erst gleichnamig machen“ — da wäre das selbstverständlich. Dahin wollen wir mit unserer mathematischen Erziehung.

Auch das Multiplizieren verursacht keine wesentlichen Schwierigkeiten, nicht einmal das von Brüchen miteinander. Etwas Neues braucht ja eigentlich auch nicht gelernt zu werden, es ist lediglich ein Übertragen des Bekannten auf neue Fälle, und damit allerdings eine innere Forderung von hoch individueller Gültigkeit. Sollte aber wirklich ein Kind nötig werden bei der Aufgabe $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$, so soll es selbstverständlich nicht die Regel herangezogen wissen: Brüche werden multipliziert, indem man... sondern es soll sich daran ähnlichen, leichteren Fällen erinnern, vielleicht $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$. Da wird es sich denken herabgelassen werden, daß da gemeint ist, es soll von $\frac{1}{2}$ den rechten Teil nehmen. Dies versteht es auf seinen neuen Fall an: es wird von $\frac{1}{4}$ erst den 4. Teil nehmen und diesen dann 2 mal nehmen. Sollte das etwas länger dauern als die mechanisierte Rechnung, so schadet das nicht. Solches Selbstwiedergewinnen ist wirksamer für die mathematische Bildung, als Mechanisierung ohne diese Fähigkeit des Selbstfindens. Wenn diesem Mechanisieren verloren gegangen ist, dann kommt ein offenkundiger Mangel an rechnerischer Bildung zum Bewusstsein, ein Mangel, der nicht selbständig ausgeglichen werden kann. Mathematische Bildung aber hat den Sinn, daß sie sich selbständig weiter zu helfen weiß.

¹⁾ Auch von Dem. Sind die Rechenaufgaben nicht zunächst etwas wichtig wie die des vorigen Beispiels.

²⁾ Das wirkliche Leben bringt allerdings nur selten „passende“, ungehinderte Schritte, die Durchrechnung der Rechenbücher erfüllt darum viele Pausenempfehlen.

Übrigens kann ein Kind, das an die ständlich-mechanische Vorstellungswelt der Zahlgrößen gewöhnt ist, meist schon auf der vorigen Stufe folgende Gedankenreihe bilden: $\frac{1}{2} : 2$, das ist $\frac{1}{2}$ und noch $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} : 2$, da bleibt es $\frac{1}{2}$. Aber $\frac{1}{4} : \frac{1}{2}$, da muß es weniger werden als $\frac{1}{2}$. Ich kann dafür sagen: von $\frac{1}{2}$ nur $\frac{1}{2}$. Nehme ich von $\frac{1}{2}$ nur $\frac{1}{2}$, d. h. den vierten Teil, so muß ich jeden Viertel wieder viereln, gibt $\frac{1}{16}$; nehme ich 3 solche Viertel, so habe ich $\frac{3}{16}$; $\frac{1}{2} : \frac{1}{2}$ sind also $\frac{1}{2}$. Ich hätte also 1:2 und 4:4 rechnen können, oder die Zähler miteinander multiplizieren und ebenso die Nenner. — Ein Kind, das diesen Gedankengang noch nicht selbstständig gehen kann, soll man eigentlich mit denjenigen Aufgaben versehen. Es ist insofern für diese Stufe noch nicht reif. —

Das Dividieren mit Brüchen wird man in allen seinen verschiedenen Formen aufreihen. Je nach den Verhältnissen wird man sich damit begnügen, die Division Bruch durch Bruch lediglich aufzusuchen zu lassen als Enthaltensein, wie es viele Rechenbücher tun; also $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{3}$. In dieser Form ist es für den kindlichen Intellekt gerade noch fassbar, etwa so: das geht besser, wenn es gleichnamige Brüche sind: $\frac{2}{12}$ in $\frac{1}{12}$; das geht ebenso oft wie 16 in 8, nämlich 18 mal. Auch diese Form ist auf der 2. Stufe vorbereitet worden. Die Division Bruch durch Bruch wirklich als Teilung aufsuchen zu lassen, ist zwar möglich, aber wesentlich schwieriger. Bei $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$ bedeutet es eben schon ein erhebliches Maß von Abstraktion, sich zu sagen: diese Aufgabe verlangt, daß man die gegebenen $\frac{1}{2}$ als 2 Viertel einer gesuchten Zahl ansehen solle, genau so, wie bei der Aufgabe $\frac{1}{2} : 2$ die 2 Nennel das Zweifache der gesuchten Zahl sind.

Leichter wäre es ja, aber mathematisch nicht einwandfrei, wenn man sagte: den Teilen von Brüchen durcheinander geht jedenfalls besser, wenn ich sie gleichnamig mache; dann heißt es, ich solle $\frac{2}{12} : \frac{1}{12}$ teilen; das ist so gut, als wenn ich 16:2 teilen soll, ist $\frac{8}{1}$. Nicht einwandfrei deswegen, weil für diese Wagnisse der Nenner der innere Nachweis fehlt (der Nachweis „daß dasselbe herauskommt“, ist nicht ausreichend), weil an Stelle der eigentlichen Division das Enthaltensein tritt: statt einer Substanzzahl und einer Funktionszahl erscheinen zwei Substanzzahlen. Zu rechtfertigen wäre dies Verfahren höchstens so: Wo ich nicht teilen kann, wo das Teilen keinen Sinn hat (durch $\frac{1}{2}$ teilen!), da kann ich dasselbe praktische Ergebnis mit dem Enthaltensein erreichen. Aber die Klarheit darüber, daß man an Stelle des eigentlich verlangten Verfahrens ein anderes wühlt, ist nötig und ist zugleich die Begründung für die vorgeschriebene Einschränkung.

Zusammenfassend wäre zu dieser Stufe noch folgendes zu bemerken. Trotzdem als die Abstraktion der Rechenrechnung in

hohen Maße vermittelt, können wir doch im Rückblick auf die Kinderreife und die psychologische Gestaltung aller Begriffsvermittlung nicht von der Forderung der jeweiligen Konkretisierung ablassen. Das Konkretisieren wird selbstverständlich nach und nach stärker zurücktreten, es wird aber solange treten z. B. in den Phantasieaufgaben der Kinder, die auch für diese Stufe eine Notwendigkeit bleiben, wobei der Vergleich mit der Wirklichkeit nie schadet.

Dagegen ist diese Stufe von der Art, so dass auch die reinen Zahlenaufgaben aus der Bruchrechnung ihre eigentliche Basis finden. Doch sollen auch die hierfür in Betracht kommenden Übungen nicht der bloßen Treuefähigkeit gleichen, die nur zur Mechanisierung führt¹⁾. Mit dieser Forderung wollen wir es dem Kinde hinauswegs begreifbar machen: das geschieht vielmehr selbst dann, wenn es sich mit der Mechanisierung begnügt. Jeder macht doch an sich selbst, und schon das Kind merkt es, daß ein assoziativer Gedankengang begreifbar ist als ein assoziativer, oder ohne psychologischen Ausdruck, daß etwas notwendig Geordnetes leichter abläßt als etwas, das im Augenblicke so gestaltet ist; und weil es das merkt, darum drängt ja das Kind zur Mechanisierung. Aber es verzichtet dabei auf Bildung. Darum ist es unsere Aufgabe, die Kinder anzuhalten, sich bei jeder, auch der einfachsten kleinsten Zahlenaufgabe, etwas zu denken. Gerade bei reinen Zahlenaufgaben wollen wir uns bemühen, den mathematischen Sinn der Sache zu zeigen, wie das schon früher angedeutet worden ist.

Ferner möchten wir gerade die Aufgaben der Bruchrechnung immer mehr derjenigen Gebieten entnehmen lernen, auf denen sie tatsächlich vorkommen. Das sind nicht so sehr die Gebiete der häuslichen Wirtschaftsführung, als vielmehr die der Technik, des Verkehrs, der Wissenschaft, der Statistik usw. Wir werden noch Gelegenheit haben, hierauf näher einzugehen; hier sei zunächst auf diese Gedanken verwiesen.

Endlich ist noch die Frage der Kleidung zu berühren. Manche behauptet: Das Multiplizieren von Brüchen, auch das Dividieren von Brüchen und Ähnliches muß mechanisch eingegeben werden. Wir können uns dem nicht anschließen, wenn diese Forderung den Sinn haben sollte: Nach der Einführung im Verständnis müsse die Mechanisierung herbeigeführt werden. Das ist ja die landläufige didaktische Auffassung. Aber nicht nach, sondern nur innerhalb der Gewinnung des Verständnisses darf eine Mechanisierung eintreten, und wie wird bei solcher Gestaltung von selbst kommen.

¹⁾ Man sehe sich darunter die Rechenblätter an, und man wird bei manchem sehr Merks Wunder sehen.

Jene Auffassung gleicht, die Gewinnung des Verständnisses sei ein Einsicht von verhältnismäßiger Härte, nach dessen Abschluß die Mechanisierung einströmen habe; diese neue Auffassung steht in jener ersten Bekanntheit die Gewinnung des Verständnisses nicht vollendet, sondern findet, daß das Verständnis so lange ausreicht, als neben den Mechanisierungsgebenden die volle Aufmerksamkeit sich der Sache zuwendet. Dadurch bekommt jene Mechanisierung einen anderen Charakter als diese: jene ist eine angelegte, die nicht die Möglichkeit der Entwicklung in sich trägt; diese ist eine von höherer Art, die beherrscht und beeinflusst wird vom Geist. Jene ist natürlich leichter zu erwerben als diese. Aber sollen wir abwägen, so ist es uns lieber, daß ein Kind so viel mathematische Einsicht gewinnt, daß es — wenn ihm der praktische Fall vorliegt — wissen, ob eine Bruchdivision oder eine andere Operation auszuführen ist, und sich — wenn noch langsam — überlegt, was denn das eigentlich bedeute. Hierbei ist noch keine der beiden Arten von Mechanisierung vorhanden. Dies ist uns aber lieber, als wenn das Kind die Bruchdivision mechanisch sicher ausführt, aber dabei nicht oder nur unsicher erkennen kann, ob es mit der Bruchdivision die richtige Operation gewählt hat. Wir wollen damit Mechanisierungsübungen keineswegs ablehnen, nur davor warnen, sie zu früh einsetzen zu lassen und ihrer Wirkung soviel auszureizen. Das rechte Verständnis für die mathematischen Erhebungen führt zum rechten Verhalten, und dies, oft wiederholt, ergibt die rechte Mechanisierung.

§ 38. Die Decimalbrüche.

Auch hier schreiben wir in drei Stufen aufwärts, die im allgemeinen denen des vorigen Abschnitts entsprechen. Wir bezeichnen sie hier als Vorbereitungsstufe, Hauptstufe und Ergänzungsstufe und deuten damit schon an, daß gewisse Unterschiede sich geltend machen, die nun mit hervorzuholen sind.

Die erste Stufe, die der Vorbereitung, behandelt — wie die Stufe der Grundlegung im vorigen Abschnitt — diejenigen Brüche, welche im Gebrauche des täglichen Lebens und damit schon im Gebrauche des Kindes sind. Waren das im Gebiete der gewöhnlichen Brüche nur drei, so sind es hier noch weniger, nur einer, nämlich die Hundertel. 2,50 \mathfrak{M} bedeutet schon das achtjährige Kind in den Schaufenstern und in den Zeitungen und begreift auch, daß damit gemeint ist 2 \mathfrak{M} und 50 \mathfrak{g} . Ebenso 1,75 \mathfrak{M} ; 3,80 \mathfrak{M} ; 1,25 \mathfrak{M} ; 5,80 \mathfrak{M} ; 0,80 \mathfrak{M} usw. Von dieser Erfahrung ausgehend und die Selbzig kennzeichnend, macht es gar keine Schwierigkeiten, die Kinder zu dieser Form als zu einer andern Schreibart für Mark und

Pfennige zu großem, so daß sie sie selbst neben der Doppelbezeichnung anwenden. Damit allerdings keine sinnlose Verwirrung eintritt, und damit das Problem offen bleibt, darf nicht gelöst werden: 5 Mark und 10 Pfennige, sondern zwei Komma fünfzig Mark. Und dasselbe kann noch und noch auch mit Metern und Zentimetern, später auch mit Hektolitern und Litern vorgenommen werden, so daß die Kinder mit dieser Hinsichtung auch bei anderen Maßangaben vertüft werden.

Diese verschiedene Scheidung ist auch die ständige Verwandlung, die auf dieser Stufe in Betracht kommt. Von anderen Dezimalbrüchen ist ja noch nicht die Rede, und vom Bruchkennzeichen auch noch nicht. Gerade dies letztere ist bedeutsam, weil es uns ein — vielleicht unstrittiges — Mittel an die Hand gibt, einer Reihe von Schreibregeln aus dem Wege zu gehen. In dieser Form der Scheidung werden nämlich ohne weitere Dedeckung der Gründe sämtliche Operationen getrieben. Es werden also Additionen und Subtraktionen ausgeführt wie die folgenden:

$$\begin{array}{r}
 15,37 \text{ M} \\
 + 8,25 \text{ „} \\
 + 11,76 \text{ „} \\
 \hline
 35,38 \text{ M}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 45,35 \text{ M} \\
 - 8,90 \text{ „} \\
 - 10,49 \text{ „} \\
 \hline
 26,96 \text{ M}
 \end{array}$$

Es werden ferner in dieser Form Mark, Meter und Hektoliterangaben multipliziert, wobei allerdings der Dezimalbruch seinem vorläufigen Charakter als reiner Substitutionszahl entsprechen zur Mühseligkeit sein kann, z. B.

$$\begin{array}{r}
 11,28 \text{ m} \cdot 8 \\
 \hline
 90,24 \text{ m}
 \end{array}$$

Denn schließt sich an das Erhaltenwerden, selbstverständlich immer mit Bezeichnung, doch ist es in kleineren wie in größeren Zahlen möglich:

$$1,20 \text{ M} \text{ in } 90,40 \text{ M}$$

Hier werden beide Zahlen als Pfennige angesehen und gerechnet:

$$120 \text{ A} \text{ in } 9040 \text{ A} \text{ ist } 75 \text{ mal enthalten.}$$

Entsprechend wird in cm gerechnet die Aufgabe:

$$0,75 \text{ m} \text{ in } 26,75 \text{ m} = 35 \text{ mal Rest } 50 \text{ cm}$$

oder Rest 0,50 m. Es bedarf wohl nur des Hinweises, daß sämtliche Aufgaben dieser Stufe noch mit Rechen gerechnet werden, nicht mit einem Dezimalbruch als Quotienten. Auch die Teilung geht unschwer voran, wenn sie sich in den Grenzen hält, die den Kindern durch den jeweiligen Stand ihrer Zahlvorstellung gesteckt sind; z. B.

$$36,38 \text{ M} : 8 = 4,55 \text{ M} \text{ Rest } 4 \text{ A.}$$

Der Hauptgedanke dieser Stufe ist, daß sie die Aufgabe hat, einzuführen in den Geist dezimaler Bezeichnung; dadurch, daß sie lediglich die dezimale Schreibung in allen bekannten Operationen übt. Daß das nichts irgendwie Ausreichendes ist, sondern lediglich etwas Vorbereitendes, braucht ohne weiteres ein. Darum bezeichnen wir diese Stufe mit diesem Namen; ihrem Inhalte nach würden wir sie als die Stufe der dezimalen Schreibung bezeichnen können. Andererseits ist aber auch nicht zu verkennen, daß bei Begehungen, die über die allerschwerstenstufe mathematische Bildung nicht hinauskommen — wir brauchen nur an höhere Formen des Schwerekrans zu denken — mit der Erreichung dieser Stufe danach ein gewisses vernünftiges Können gewonnen ist, so daß diese Stufe den Namen einer Stufe trotzdem verdient, und nicht lediglich Zuhilfenahme leistet, wie sie leider noch so manchen Fach unseres heutigen Unterrichtes an verschiedenen Stellen aufweist. —

Die zweite Stufe, die Hauptstufe, bringt an Brücken dazu die Zehntel und die Tausendel, so daß nun mit drei verschiedenen Dezimalbruchessystemen hantiert wird. Auch die beiden neuen werden zunächst noch als andere Schreibung eingeführt für Meter und Millimeter, Kilometer und Meilen, Kilogramm und Gramm, Tonne und Kilogramm. Dann tritt aber im Zehntelmeter, Zehntelmeter, Zehntel Liter, Zehntel Kilogramm usw. sogleich der Gedanke des Bruches. Und nachdem die Kinder in der Schreibung der genannten Einheiten — immer im Anknüpfen an die geläufige dezimale Schreibung von Mark und Pfennigen — hinreichend geübt sind, wird er derjenige Gedanke, der der ganzen Stufe den Inhalt und das Ziel gibt: Die Kinder sollen die Dezimalzahlen als Brüche auffassen lernen. Bei den Zehnteln ist es am leichtesten; aber ein Haufen geht den Kindern auf, wenn sie es auch bei den Hunderten entdecken: Ja freilich, Pfennige sind doch immer Hundertel-Mark, und Zentimeter immer Hundertel-Meter! Wannehr tritt natürlich neben das Kennzeichen des Kennzeichens, also neben drei Komma hundertsteig Mark nun drei und hundertsteig Hundertel Mark. Wenn jene Form des Kennzeichens weniger anzeigt, kann sie ja nun ganz ersetzt durch das Kennzeichen; uns schienen beide nebeneinander ihren Vorteile zu bieten.

Unter jenen Hauptgedanken treten nun zwei Übungen besonders hervor. Einerseits das Verwandeln der bekannten Brüche ineinander, also sowohl der Dezimalbrüche der Zehntel, Hundertel und Tausendel ineinander, als auch der bekannten gewöhnlichen Brüche der Halben, Viertel, Achtel, Fünftel, Zehntel, Zweizeigstel in Dezimalbrüche⁷⁾. Wenn die Kinder selbst dazu nehmen von eigener Kraft,

⁷⁾ Wir wählen also diese Stich zwischen die 2. und 3. Stufe der Zeichnung mit gewöhnlichen Brüchen eingezeichnet wissen. Wagt dazu den Plan.

wird man es nicht vermeiden. Die Verwandlung der gewöhnlichen in Dezimalbrüche kommt auf ein Erweitern, die Rückverwandlung auf ein Kürzen hinaus.

Neben dem Verwandeln ist von besonderer Bedeutung die Multiplikation von Dezimalzahlen mit den Systemeinheiten 10, 100, 1000, ganz besonders in fortwährender Nebeneinanderstellung:

$$\begin{aligned} 132,64 \text{ „} \cdot 10 &= 1326,40 \text{ „} \\ 132,64 \text{ „} \cdot 100 &= 13264,00 \text{ „} \\ 132,64 \text{ „} \cdot 1000 &= 132640,00 \text{ „} \end{aligned}$$

Dabei ist allerdings mit Sorgfalt darauf zu achten, daß die Sache nicht mechanisch ausgeübt wird, wenn die Kinder leicht zogen. Wenn man sie sagen hört: beim nächsten wird es weiter links gerückt, dann ist es Zeit, die Übungen durcheinander zu werfen. Sonst blähe die kindliche Arbeit eine Fingerring, allenthalben eine Übung im Ziffernschreiben, wäre aber kein Rechnen. Dies verlangt aber, daß der Gedanke bereit ist: 2 · 100 gibt 200 oder 4 Hundertel mal 100 gibt 4 Einer usw.

An diese beiden besprochenen Übungen reihen sich nun die anderen an: Addieren und Subtrahieren bietet keine Hindernisse, wo gleichartige Denkmittel in Betracht kommen, und keine nennenswerten bei ungleichartigen, weil sich die Kinder eben daran erinnern, wie sie sich sonst bei Brüchen geholfen haben. Demzufolge kann, soweit dies noch nötig erscheint, gerechnet werden:

$$\begin{array}{r} 7,943 \\ + 16,3 \end{array} \quad \text{ist} \quad \begin{array}{r} 7,946 \\ + 19,900 \end{array}$$

Die Verwandlungsschritte beweisen aber sehr bald, selbst wenn entsprechende Zerlegungsschritte nicht vorgenommen wurden wären, daß jene erste Zahl aufgestellt wird als 7 Ganze, 9 Zehntel, 4 Hundertel und 6 Tausendel, so daß das Gleichnamigmachen überflüssig wird und einfach Zehntel zu Zehnteln usw. addiert und entsprechend subtrahiert werden.

Das Multiplizieren von Dezimalbrüchen mit ganzen Zahlen ist so weit vorbereitet, daß es ohne weiteres einsetzen kann. Beim Multiplizieren von Dezimalbrüchen miteinander aber kommen die Ergebnisse der übrigen Bruchrechnung in Betracht. Bei $3,17 \cdot 0,3$ hat sich das Kind denken bewußt zu werden: Wenn ich Hundertel 1 mal, 8 mal, 9 mal rechne, bleiben es Hundertel; wenn ich es aber mit Zehnteln multipliere, können es nicht Hundertel bleiben, sondern es werden Tausendel daraus. Das obige Beispiel darf also von vornherein keine andere schließliche Form bekommen als die:

$$\begin{array}{r} 6,17:0,3 \\ \hline 1,861 \end{array}$$

d. h. es soll von Anfang an Klarheit darüber herrschen, was das Ergebnis jedes einzelnen Rechenschrittes sein kann. Eine Regel von der Art: Ich rechne wie mit ganzen Zahlen und schneide dann so viel Dezimalstellen ab, wie überhaupt vorhanden sind — ist für den Rechenunterricht nicht nur sinnlos, sondern direkt schädlich, weil sie das mathematische Denken und die mathematische Bildung verhindert. Wer die Sache beherrscht, kann sich eine solche Regel für seinen Folgegebrauch erschießen, dagegen ist nichts einzuwenden. Und wenn ein kleiner Schlämmier von selbst auf das Ergebnis gerät — er wird das voller Entdeckerfreude mitteilen —, so kann man ihm sagen: Keinetwegen rechne so, aber prüfe öfters nach, daß du dich nicht einmal verhaselt! Oder: Wenn du immer weißt, warum das so ist, darfst du auch so rechnen! Dadurch gewinnt seine Regel außer der Gefühlskeimsheit der eigenen Entdeckung noch die eines heilighen Schutzes, der so zu sichern ist, daß er nicht verloren gehen kann. In solchen Fällen wird sie als erworbener Wert selbst im Unterricht ihre Berechtigung haben.

Das Dividieren von Dezimalbrüchen war schon auf der Vorstufe als Enthaltungssatz von Hundertern geübt worden. Hier treten Zehntel und Tausendel dazu, wodurch lediglich Gleichnamigmachen veranlaßt wird:—

$$\begin{array}{r} 3,685 \text{ in } 17,8 = 3,685 \text{ in } 17,800 = 4 \text{ bzw. } 1,00 \\ \hline 18,840 \\ \hline 1,890 \end{array}$$

Im umgekehrten Falle kann dies Gleichnamigmachen sogar unterbleiben, wenn das Veränderte für den gesamten Vorgang vorhanden ist:

$$\begin{array}{r} 12,7 \text{ in } 643,394 = 1 \text{ (d. h. } 10 \text{ mal)} \\ \hline 627 \\ \hline \text{in } 643,394 = 8 \text{ mal} \\ 106,2 \\ \hline 0,134 \quad \text{nur } 16 \text{ mal Rest } 0,104 \end{array}$$

Auch hier empfiehlt sich die Kürzision mit Resten.

Blicken wir zurück! Während die Vorstufe die Dezimalzahlen lediglich als veränderte Schreibung der üblichen Einheiten darinzuliegen wahren lassen ließ, liegt die Hauptstufe das Selbste Veränderte dar, indem sie umzudeuten darauf hält, die Dezimalzahlen als Brüche aufzufassen und so behandeln.

Auch diese Stufe trägt in sich einen gewissen Abschied. Wenn wir erreichen könnten, daß alle unsere Vorgesetzten, männliche wie weibliche, im Alter zwischen 16 und 25 Jahren das höher angelernte Fachgebiets beherrschten, dann könnten wir uns an solchen Erfolge höchlichst beglückwünschen. Es liegt noch in weiter Ferne, aber er ist — von den oben angegebenen Annahmen abgesehen — möglich, allerdings nur dann, wenn der Geist, das denkende Hinschauen, nicht vor dem Mechanismus der Fäustel ergriffen wird, und das ist er als wertvoller Charakter überall da, wo ihm dieser mit gleichen Ansprüchen entgegensteht. —

Endlich die dritte, die Ergänzungsstufe. Sie fügt den bisherigen drei Dezimalstrahlen alle übrigen hinzu. Damit auch das Rechnen auf eine mathematische Grundlage gestellt werde, empfiehlt es sich, an dieser Stelle die Flächen- und Körpermaße entsprechend herauszustellen: Quadratmeter und Quadratdezimeter, Kubikmeter und Kubikdezimeter usw. Und ein ebenso dankbares Gebiet ist die Berechnung von Kartenmaßstäben.

Diese Stufe geht nun über die beiden vorigen noch ein ganzes Stück hinaus, und zwar dadurch, daß sie die Stammschritte der Dezimalstrahlen auffassen läßt als die zwischen 1 und 0 vorhandenen niederen Einheiten unseres Zahlensystems. War auf der vorigen Stufe die gegenseitige Verwandlung von Zehnteln, Hunderten und Tausenden noch eingemauert zu erkennen (z. B. in der Erkennung an die Zahlbilder), so nimmt hier die Verwandlung einen abstrakteren Charakter an, weil sie von höherem Standpunkte aus vor sich geht. So werden wir die 72000, die 363, die 4, die 0,25 in den verschiedenen Systemeinheiten ausdrücken sehen, wir werden aber auch z. B. die 0,00005 vergleichen mit den verschiedenen Werten, welche die 5 enthält an anderen Stellen des Systems. Die Zahl sehr wirkungsvoll als Reihe, in anderer Hinsicht wirkungslos aber auch außer der Reihe gesehen. Damit ist hier eine Stufe gekennzeichnet, wo auch der Einblick ins Zahlensystem eine wesentliche Verdichtung erfährt.

Entsprechend den Hauptübungen der vorigen Stufe schließt sich hieran die Fortsetzung der Multiplikation mit den Systemeinheiten 10, 100 bis zur Million, und es tritt hinzu die Division mit den Systemeinheiten; also

$$\begin{array}{l} 36000 : 10, 100, 1000, 10000 \text{ usw.} \\ \text{oder} \quad 76,8 : 10, 100, 1000, 10000 \text{ usw.} \end{array}$$

Daß auch hier kein Mechanismus, sondern nur verständiges Tun in Betracht kommen kann, bedarf keiner näheren Ausführung.

Die Teilungsform der Division kann man als gleichwertig sehen der Enthaltensein gestellt werden. Unterschieden

werden muß heißen, aber es soll zunächst mit Absicht und Verstand als Streitsache eingesetzt werden.

Auf die Stufe der Erläuterung, die einerseits das Zahlensystem durch die gekürzten Brüche erweitert hat, andererseits über die Division in abstraktem Sinne verfügt, gehört auch die Verwandlung der übrigen gewöhnlichen Brüche in Dezimalbrüche. Die Auffassung, daß $\frac{1}{2}$ im Sinne des Zahlensystems eine unangeführte Division ist, ebenso wie $\frac{1000}{9}$, die man erst noch ausführen hat mittels der niederen Einheiten des Zahlensystems als 0,8888... führt hin zum Begriffe des unendlichen Dezimalbruchs. Damit bekommen die Kinder dieser Stufe schon ein laßes Gefühl für die mathematischen Begriffe der Annäherung, der beliebigen und der ausreichenden Genauigkeit, des willkürlichen Fehlers, endlich der Wirkung der Division einerseits und der Multiplikation andererseits auf den vorhandenen Fehler. Sogar einfache Fehlerbestimmungen sind in diesem Zusammenhang möglich, z. B. 0,887 weicht ab von $\frac{1}{2}$; wir stellen das genau fest durch Multiplikation mit 1000: $\frac{1}{2} \cdot 1000 = 500$ und $0,887 \cdot 1000 = 887$; diese Zahl ist also um $\frac{1}{1000}$ größer als jene.

Darum schließt sich die Rückverwandlung periodischer Dezimalbrüche in gewöhnliche. Auch die Kinder der Vorklasse, welche einen guten Rechenunterricht genossen haben, begreifen recht gut folgendes:

Wir wollen hinschreiben das 10fache von 0,8888... = 8,8888...	
wir wollen davon abziehen das einfache	= 8,8888...
da wird das 9fache übrig bleiben	= 8,0000

wenn aber 8 das 9fache jenes Bruchs ist, so heißt der einfache Bruch $\frac{8}{9}$. Die Divisionsverwandlung in einen Dezimalbruch als Probe bestätigt die Richtigkeit der Rechnung.

Oder 0,333333... Wir ziehen von einem Mehrfachen dieser Zahl ein kleineres Mehrfachen ab, und zwar so, daß der unendliche Dezimalbruch wegfällt. Das geschieht so:

333,333333... = das 1000fache
33,333333... = „ 10 „
333 = „ das 100fache

Damit heißt der Bruch $\frac{333}{1000} = \frac{33}{100} = \frac{3}{10}$.

Wer dagegen glaubt, mit dem Mechanismus vom Unterstreichen des Nenners und dem Unterstreichen von soviel Zehnen und soviel Nullen usw. mathematische Richtigkeit vorzustellen zu können, der ist auf völlig falschem Wege.

Fassen wir zusammen! Die Rechnung mit gewöhnlichen wie mit Dezimalbrüchen ist so behandelt in je drei Schwierigkeitsstufen. Allerdings ist das nicht etwa so gemeint, daß man jedes Jahr eine neue Stufe erkennen werden müßte, etwa im 5., 6. und 7. je eine. Wohl geben sie eine zeitliche Ordnung an in dem Sinne, daß jede folgende die frühere voraussetzt. Aber es werde schon darauf hingewiesen, daß jede dieser Stufen in sich einen gewissen Abschluß bedeutet, so daß ein Kind, das nur die beiden Unterstufen erreicht hätte, noch nicht wesentliche Lücken in seiner rechnerischen Ausbildung aufwies. So selten freilich in der Praxis dieser Fall statuen wird, so häufig wird der andere sein, daß Kinder nicht bis zu den oberen Stufen beider Rechnungsdormen gelangen. Das bedeutet für solche Kinder aber keine Schädigung, sondern eine Erschöpfung. Intelligenzen, die in ihrer Beweglichkeit hinter ihrem Alter zurückstehen, oder auch solche, die vielleicht eine künstlerische Begabung entwickeln werden, brauchen dann nicht die Abstraktionen der Explanationsstufen mitzumachen. Sie würden sie doch nur in Worten bewältigen können und keinen Gewinn davon haben. Für sie genügt die Mittelstufe. Diese Gliederung in Schwierigkeitsstufen gestattet uns also eine weitgehende Berücksichtigung der individuellen Anlagen und Kräfte. Nach deren Vorhandensein kann jeder gefördert werden. Wenn man übrigens den Nachdruck auf die Förderung legt, so fällt noch ein weiterer Licht auf diese Gliederung. Daß die Schwachen nicht so mitkämpfen, wie wir es wünschen, besteht in der Unterrichtspraxis noch nicht so schwer auf uns; sie zu fördern, ist ja unsere schönste Aufgabe, und sie sind so dankbar dafür. Aber daß die Bestfährigsten durch die Schwächeren zurückgehalten werden, daß wir sie nicht so fördern können, wie wir und sie es wohl möchten, weil die Schwachen unsere Kräfte in Anspruch nehmen, das ist viel drückender und auch bedenklicher. In diesen Schwierigkeitsstufen ist nun gerade den Bestfährigsten Gelegenheit gegeben, vorwärts zu schreiten, ohne dabei von den andern in dem bisher üblichen Maße gehindert zu werden. Eine notwendige Hilfe dabei ist allerdings das eigene Aufgabenbilden der Kinder; das ist aber nachgeordnete eine selbstverständliche technische Voraussetzung.

§ 39. Hundstielrechnung.¹⁾

In der Frauentrechnung erblickt man heute noch eine Rechnung mit besonderen Schwierigkeiten. Man verweist sie darufl gleich auf die Oberstufe — 7. und 8. Schuljahr, man trägt dar-

¹⁾ Vgl. den Anhang 1 S. 308.

über, daß sie auch dort noch vielen Kindern sehr schwer falle, und man sucht auch hier das Übeln Herr zu werden durch tägliche Rechenübungen, manchmal einschließlich der Quasifraktionen.

Diese Schwierigkeiten entspringen aber zum guten Teile dem Herkommen, und sind demnach meist selbst beseitigt. Unsere Augen waren gehalten, so daß wir nicht sahen, wie einfach eigentlich die Sache ist.

Eines der Hindernisse ist unsere lästige Fremdwörterreicht oder vielmehr die unsere Kaufmannschaft. Was ganz gut deutsch und allgemein verständlich ausdrücken war und in dieser Ausdrucksweise keiner Mißdeutung begehrt: Gulden, Schilling, Telling, Schillingvertheilung, Empfänger und hundert andere Begriffe, mußte sie in fremder Zunge ausgesprochen. Sie konnte auch in unserem Falle nicht anders als italienisch sich ausdrücken: per cento. Erweitlicherweise sagt man heute ohne das geringste Mißverständniß 4 auf Hundert, 5 auf 100, 10 auf 100, oder 5 von Hundert, 5 von Hundert. Etwas einfach wäre es, die Prozentzahlen als Dezimalzahlen, die sie ja eigentlich sind, aufzufassen und zu bezeichnen: $\frac{4}{100}$ Hundertel werden als Leihzins vereinbart, 6 Hundertel gingen an das Kaufhaus verloren, 10 Hundertel wurden gewonnen, 8 Hundertel unserer Creditoren sind vergangenen Jahr gestorben, 6 Hundertel unserer Schüler haben im November gefehlt. Ja, selbst die Bezeichnung ließe sich dem anpassen: Zinsen zu 0,10; Gewinn von 0,20; Verlust von 0,07; Rabatt von 0,10 usw. Es bedürfte nur der Genehmigung der Behörden und der Banken, um in ein paar Jahren eine solche Gewöhnung herbeigeführt zu haben. Was dies aber für das Verständniß und das Erlernen bedeutet, das braucht dem Pädagogen nicht ausgeführt zu werden.

Das andere Hindernis ist unser Kleben am traditionellen Verfahren, was ja zum Teil schon in den vorigen Ausführungen mit angedeutet ist. Aber auch im besondern unser Lehrverfahren scheint nicht anders gedacht werden zu können, als daß erst die Rechenabschalt eingeübt wird, in dem „die Prozente gegeben“ sind, dann einer, in dem „die Prozente gesucht“ werden, dann einer, in dem der Rabatt gesucht wird, ferner die Zinsen, der Zinsfuß, das Kapital, die Zeit usw. So steht es in den Rechenbüchern wohl ohne Ausnahme; jedesmal suggerieren wir uns und den Kindern eine neue Rechenformel, neue Schwierigkeiten und einen unheilbaren Lösungsweg, der gelöst und eingeübt werden muß.

Von diesen beiden Hindernissen loszukommen, vielmehr vorzugehen, das ist unser Wille der Sache zu erfassen und erfassen zu lassen, das muß unsere Aufgabe sein.

Der Charakter der Prozentzahl als eines ganz gewöhnlichen Dezimalbruches mit dem Nenner 100 ist schon angedeutet

werden. Dieser Distanzbruch bezieht sich auf irgendwelche Gesamtheit. Aber mit diesen beiden Erkenntnissen ist die innere Wesen noch nicht ganz erfüllt. Wollen wir dahinein dringen, so ist es rathsam, sich die verschiedensten Beispiele zu vergegenwärtigen: eine Kaffeesendung hat 10 Hundertel Gewinn gebracht, eine andere 15; ein Staatspapier bringt 4, das andere 5 Hundertel Zinsen; eine Spinnerei hat 40, die andre 50 Hundertel Erwerbsfähigkeit; eine Bechenarbeit zeigt 3, eine andere 6 Hundertel Fehler; Spiritus von 95 und von 90 Hundertel Gehalt uzw. In allen diesen Fällen wird die Hundertszahl als Vergleichszahl angewendet, die Geltung hat eine Bezugnahme auf die jeweiligen Mengen. Wir vergleichen die Erzeugfähigkeit, die Wirtschaft, die Güte, und sind imstande, diesen an sich schwierigen Vergleichen einen zahlenmäßigen Ausdruck zu geben. Damit gewinnt die Hundertszahl einen qualitativen Charakter, sie wird zum objektiven Vermaß für die verschiedensten Qualitäten. Sie ist selbstverständlich nicht das einzige²⁾, wohl aber das am häufigsten angewandte. Sie ist dasjenige, welches eine zahlenmäßige Bewertung von Qualitäten auf fast allen Gebieten gestattet, und zwar entweder im Vergleich mit einer erfahrungsmäßigen Mittelgröße (der übliche Einkauf, der Rabatt des kleinen Kaufmanns, des Buchhändlers, der übliche Lohnveranschlag, der mittlere Fehler uzw.), oder im Vergleich mit einer idealen Leistung (Fehlerprocenten z. B.)³⁾.

Erst wenn wir uns das klar gemacht haben, sind wir imstande, die richtige Einstellung unsere erzieherischen Tuns vorzunehmen. Diese Zielbewußtheit ist nicht darin zu finden, daß man sich sagt: Procentrechnung ist noch drin, das Kapital wird gereicht — sondern darin, daß man sich sagt: Du hast deinen Kindern klar zu machen — und in allem im Betracht kommenden Standen lehrer fühlend nachzuhalten —, wie wir qualitative Unterschiede zählen.

²⁾ Die Qualität von Gewürzen wird bestimmt durch das Gewicht eines gewissen Kannekens von Körnern, die Güte vieler Waren zeigt sich im quantitativen Verbrauch, wie bei Heu, Kalk, uzw. oder in der Dauer, wie bei Weizen, Leder uzw. Die Güte einer handwerklichen Arbeit spricht man von der geringsten Beanspruchung und weiteren Ausdehnung nach der kleinsten Zeit; die Bestimmung vieler anderer Qualitäten (Wein, Eisen, Spinnerei, Zeugerei) ist eine mehr geübliche, die durch Erfahrung und Übung verlehrt und gelehrt wird. Zahlenmäßig läßt sich auf Ausmaße des ersten Satzes dieser Qualitäten bestimmen.

³⁾ Es besteht im Uebel, daß der Preis einer Ware oder einer Arbeit darüber nicht den Maß für die Qualität ist. Er sollte der Qualität entsprechen, und das geschieht auch im vollen Maße. Aber einmal ist er auch von anderen Faktoren abhängig — der Krieg sagt das mit aller Bestimmtheit, und selbst bei er nicht Ausbruch, sondern von Folge der Qualität, während die Handelskraft Ausdruck der Qualität ist. Auch werden Vertheilung und Überwindung, Schmelz und Wucher und Irrtum dazu wohl nicht gleich, wie der Maß gestellt werden können. Aus dem Preise einer Sache wird man also nur einen gewissen Gefühls- und die Qualität schätzen können.

mäßig ausdrücklichen versuchen. Dieser Gedanke soll über dem Ganzen schweben, sogar dann, wenn z. B. — das Kapital gesucht wird.

Dieser Hauptgedanke lenkt unsern Blick auf die Frage: Wie ist den unter Können den Kindern zu übermitteln? lenkt ihn also auf das Lehrverfahren. Wir können hier antworten: Es kommen keine anderen Grundstoffe in Betracht als die bisher schon angeführten; dem Übermitteln kann nur geschieht mit Berücksichtigung der Wirklichkeit, insbesondere der gefühlbestimmten Wirklichkeit, die das Wohl und Wehe des eigenen Ich in Mitteilnahme nicht. Hier, im Bereiche der Wirklichkeit, gilt es, einerseits die Sachlage, andererseits das Problem klären zu lassen. Ist dies geschehen, so macht die selbständige mathematische Ausführung den Kindern kaum mehr Schwierigkeiten. Verschiedene Wege werden gefunden und verglichen, und als Folge der Übung entsteht die Gewohnung rascherer Technik.

Mit dem Blick auf das Ziel jedes Hauptgedankens und bewaffnet mit diesem allgemein didaktischen Rüstzeug werden wir uns nun den einzelnen Aufgaben des Gebiets zu. Sie gilt es zunächst zu überblicken. Eine laufende Gliederung ist die folgende:

1. Die Prozente sind gegeben: allgemeine Prozentrechnung, Gewinn- und Verlustrechnung, Rabatrechnung, Zinsrechnung.

2. Die Prozente werden gesucht: allgemeine Prozentrechnung, Gewinn- und Verlustrechnung, Rabatrechnung, Zinsrechnung.

3. Ergänzungen: das Kapital wird gesucht, die Zeit wird gesucht, Diskont- und Wechselrechnung.

Diese Übersicht muß uns nun stützend machen. Denn es steht sich ihr gegenüber sofort die Frage: Wo bleibt denn hier der Hauptgedanke des Zahlenmäßigen Ausdrucks qualitativer Wertung? Sie stellen, heißt sie beantworten. Denn es hilft sofort in die Augen, daß Sie bisherige Praxis unsern Sachunterrichts den Hauptgedanken kaum erfüllt, geschweige denn ihn ausgeführt hat. Sie hat sich gefragt: Welche Möglichkeiten bestehen im Gebiete der Prozentzahl? Und diese Möglichkeiten werden nun in einer geordnet erscheinenden Reihe „ausgesprochen“.

Der didaktisch-kritische Blick auf diese Möglichkeiten. Mit aber sofort noch eine zweite Frage aufzuwerfen, nämlich die: Kann denn hier überall die gefühlbestimmte Wirklichkeit die Grundlage sein? Diese Frage verlangt, einzelne dieser Möglichkeiten näher ins Auge zu fassen. Wir versuchen es. Die Kinder sollen beispielsweise lernen, das Kapital zu suchen, wenn Zins und Zinssatz gegeben sind; wo kommt das im Leben vor? Sie antwortet muß in der Tat ziemlich lange gesucht werden. Sie lautet: an zwei Stellen; wenn nämlich jemand ein Haus kaufen will, dann kann er aus der Höhe

der eingehenden Mieten und aus dem ihm notwendig erscheinenden Zinssatz die Kaufsumme berechnen, bis zu welcher er höchstens gehen darf. Und sodann: wenn jemand eine bestimmte Rente sich sichern will, so kann er sich die Höhe seiner ehemaligen Kapitalanlage berechnen. Sämtliche anderen dienstfertigen Aufgaben — wir haben darunter die Rechenbücher durchgesehen — sind Phantasieaufgaben, die lebensunwahr sind, weil sie die Tatsachen nicht so ins Auge fassen lassen, wie sie das Leben verfährt, sondern umgedreht. Wenn sie nur wenigstens sich ehrlich als Phantasieaufgaben zu erkennen geben wollten! Aber sie treten allenfalls auf mit dem Anspruche der Wirklichkeit!).

Selbst die beiden obigen Beispiele gehen in der Praxis des Lebens so sterblich verloren. Denn auch wer die Rente laufen will, fragt erst nach der Kaufsumme, dann oder zugleich nach dem Mietzins und berechnet sich um die betreffende Hunderteinheit, nicht aber das Kapital. Und jene künftige Rentenbesitzerin bekommt die Druckzettel der Rentenbank vorgelegt und liest nur aus den Tabellen ab, wie hoch Versicherungssumme, Barzahlungssumme, Rente usw. ist unter den verschiedensten Bedingungen. Ergebnis: Im praktischen Leben kommt das rechnerische Kapitalrechnen nicht vor. Und genau so ist es mit dem Rechnen der Zeit — mit Ausnahme der Diskontrechnung; darüber wird noch zu reden sein im Fache des Rechenunterrichts. Doch sei hier darauf hingewiesen, daß wir diese Rechenformen eingliedern unter das berufliche Rechnen, das die allgemein bildenden Schulen des Berufslehres zu überlassen haben.⁴⁾

Damit verließen von der früheren Übersicht in der Hauptsache noch zwei Problemgruppen: daß die Hunderteinheit bekannt ist und angewendet werden muß zu verschiedenen Berechnungen, und daß die Hunderteinheit erst gesucht werden soll. Richten wir uns nach dem Hauptziel zurück! Wenn wir uns von dem Gedanken lösen lassen, daß wir in dieser Rechenformel Qualitätsunterschiede schließendlich ausdrücken wollen, so erscheint uns der

⁴⁾ Z. B.: Ein Kassaverwalter verfügt am Ende des Jahres als seine Mitglieder $2\frac{1}{2}\%$ Gehaltswage. Für wieviel Mark kann man eine Familie, die 1000 Mark vom Gehalt empfängt, im Laufe des Jahres unterstützen? Zuerst: Was kann wohl das „wohl“ bedeuten? Und dann: Eine Familie ist nicht selbstverständlich erst ein Gutshaus, fragt nach, das Fournieren und meckert aus dem Kasten aus. Sie muß eine Addition setzen aus gesellschaftlichen, sozialen, politischen Faktoren. Die Nachkante aber, die sich bei der Höhe der Kapitalrente offenbart, wenn sie der Kapitalhaltung bekannt, begnügt sich mit der Schätzung und beschränkt dann nicht in der Schule zu lernen, „wie man das Kapital sucht“. Sie fragt sich: und sie hat alle; die noch eingeworfen werden könnte, haben den Charakter von Rechenmaterial.

⁵⁾ Ich habe in meinem ganzen Leben noch nicht nötig gehabt, eine Diskontrechnung praktisch anzuwenden, nur im Prinzip; und viele andere aus den verschiedenen Schulen, die ich gefragt habe, berichten dasselbe von sich.

Fall, daß die Hunderteinzelzahl zum Zwecke des Vergleichs berechnet werden soll, wissen als der natürlichere und erste. Der andere aber, daß die Hunderteinzelzahl schon berechnet ist, fertig vorliegt, uns mitgeteilt wird, kann doch nur den Sinn haben, unsere Auffassung der Sachlage zu unterstützen oder mehr für unsere Entscheidungen zu werben, rechnarisch aber nur der Voranschrechnungen und Nachprüfungen vorzunehmen. Dieser Fall hat wesentlich kompliziertere Voraussetzungen, über die wir uns nicht täuschen dürfen durch die Einfachheit vieler Übungsaufgaben unserer Rechenbücher.

Wollen wir also die Kinder hineinführen in den Geist der Sache, so empfiehlt es sich, zunächst einmal den Hauptgedanken mit allem Nachdruck zur Darstellung zu bringen. Dies geschieht, indem wir die Hunderteinzelung mittels zweier Stufen einführen. Auf der ersten werden die Kinder aufgehalten, die in ihren Gesichtsbildern tretenden einfacheren Fälle der Frage: Wieviel kommen auf 100? zu beantworten — in der Reihenweise der alten Didaktik: eine Stufe, auf der die Prozente gesucht werden.

Dabei ist es durchaus nicht nötig, diese Stufe etwa erst nach der Brechnrechnung einstreuen zu lassen. Es gibt eine große Zahl Aufgaben und Veranlassungen, die viel eher zu berechnen sind. Dem Gehörten des qualitativen Vergleichs sind die Kinder in der Tat weit früher zugänglich, als der letztlich gebrochene Zahl. Das Beispiel: Letzte Woche hatjet ihr 600 Aufgaben gerechnet, dabei waren 50 Fehler; diese Woche 800 Aufgaben mit 80 Fehlern. — Ist für die Kinder des 4. Schuljahres durchaus angemessen. Die Problemfrage: Welche Arbeit war besser? wird nur von Voreiligen nach und nach beantwortet; solche dagegen, die im Zahlenvergleichen nur langsam etwas geschult sind, besinnen sofort daran: Aber beim zweiten Male hatten wir doch viel mehr Aufgaben gerechnet und bloß 2 Fehler mehr! Sie haben das bestimmte Gefühl, daß die zweite Arbeit besser sein müsse, und daß sich dies auch herausstellen würde, wenn man gleiche Verhältnisse in Betracht ziehen könnte. Es bedarf uns eigentlich nur der Anregung, um die Kinder selbstständig weiterarbeiten zu lassen: Versucht, ob das auszurechnen geht! Die geführte, aber doch noch zulässige Form wäre es, zu sagen: Rechnet aus, wieviel Fehler je einmal auf 100 kommen!

Ähnliche Beispiele werden nun bei jeder Gelegenheit herangezogen: 2000 Einwohner hat unser Ort, dabei 300 Schulkinder; das Nachbardorf hat 700 Einwohner und 120 Schulkinder usw. Selbstverständlich kann man, wenn es zweckmäßig erscheint, die Zahlen abändern. Auch brauchen die Divisionen nicht einmal auf-

gehen; die Kinder helfen sich dann mit Ausdrücken wie: Über, reichlich, knapp, fast usw.: „reichlich 17 auf 100“.

Auch auf Urangaben stützen wir die Hundertschul. Von 20 auf 100 zu schließen macht keine Mühe, von 40 auf 100 schon mehr; doch helfen selbst einige, daß man doch von 40 auf 200 schließen könnte und von da auf 100. Also: 40 Kinder hatten 6 Fehler; die andere Klasse mit 50 hatte 7; welche hatte besser gearbeitet? Und so schließen sie von der 80 über die 400, von der 20, 30, 60, 75 und 150 über die 300, von der 125 und 250 über die 500, von der 24 und 120 über die 600 usw. So lassen sich schon Aufgaben bewältigen wie diese: 80 Kartoffelfelder beim Oberdörfle haben 40 Zentner Kartoffeln ergeben; 24 Zellen beim Unterdörfle 88 Ztr. Wo war der größere Ertrag?

Der Umfang der Aufgaben erweitert sich beträchtlich infolge der Bewältigung der Bruchrechnung — schon deren Mittelstufe hat diese Wirkung. Dazu kommt noch der Fortschritt von der heimischen zur russischdeutschen und zur deutschen Erdkunde, die von ihrerseits unendlichsteines Veranschaulichung gibt, Qualitäts- und Verhältnismessungen zu beschaffen. Es seien einige umfassende Gruppen angeführt:

Die Bevölkerungsverhältnisse des Ortes, des Landes — der Länder —, im besonderen ihre Verteilung nach Stadt und Land, nach Erwerb, Sprache, Konfession; die Zunahme der Bevölkerung, die Geburtenhäufigkeit, die Sterblichkeit, dabei die Anteile der wichtigsten Erwerbstätigen, ferner die Schulbildung, die Beschäftigung, auch das kitchliche Leben usw.

Die Bodenverhältnisse, und zwar die Gestaltung des Bodens, wie sie sich zeigt im Gefälle der Flüsse, in der Steigung der Eisenbahnen und Straßen, im Vorhandensein von Durchflüssen, Dämmen und Brücken; weiter die Ergiebigkeit und Auswertung des Bodens in land- und forstwirtschaftlicher Hinsicht einseits, in berg- und wasserwirtschaftlicher andererseits; ferner die Verteilung des landwirtschaftlichen Bodens nach der Art seiner Benützung: Garten, Acker, Wiese, Weide usw., nach der Art der Frucht: Roggen, Hafer, Weizen, Mais usw.

Weitere volkswirtschaftliche Verhältnisse: Anteil an der Produktion der verschiedenen Dinge, Anteil am Handel, am Verkehr, am Verkehr; Steigen und Sinken der Lebensmittelpreise, Anteil der Einkommensklassen an den Steuern usw. usw. — und zwar dies alles nicht nur im Vergleich der Orte und Länder miteinander, sondern auch in seinem Wechsel, also mit Berücksichtigung nicht nur der örtlichen, sondern auch der zeitlichen Unterschiede.

Die Privatwirtschaft braucht dabei nicht vernachlässigt zu

worben: der Zinsertrag eines Kannes, eines Geschloßes wird nach Hundertein gewertet, ebenso der Wasserverlust von Haas, Kleeherwaren, Seife usw. Dies letztere aber führt uns bereits in das Gebiet der Naturkunde, die auf der nun folgenden Stufe besonders hervorzuheben werden muß.

Wenn nämlich die erste Stufe der Hunderteinrechnung in solcher Weise weitergearbeitet hat, dann ist es eine Leichtigkeit, die zweite Stufe darauf aufzubauen. Doch muß noch bemerkt werden, daß der lebende Gedanke jener ersten Stufe, der unbewußte Ausdruck qualitativer Unterschiede, nun nicht etwa abgelöst wird von einem anderen Hauptgedanken, sondern Teil in gewissermaßen selbständig weiter wächst, während ein anderer eintritt.

Diese zweite Stufe würde nämlich alle diejenigen Verhältnisse und Probleme umfassen, bei denen die Hunderteinzahl gegeben ist, fertig vorliegt. Wenn wir vorher andeuteten, daß dies vielfach dem Sinn habe, unsere Auffassung der wirklichen Sachlage zu unterstützen, so suchen wir dabei zunächst an das große Gebiet der gesamten Naturkunde einschließlich Gesundheitslehre und Pädagogik, vor allem an die vorstehenden Stellen, an denen praktische Chemie in Betracht kommt: Zusammenfassung des Pflanzen- und Tierkörpers, Bedingungen ihrer Wachstums und ihrer Leistungsfähigkeit — sowie diese selbst, Nährstoffgehalt der Speisen, die gesamte Mineralogie, die Wirkungen der Wärme, der Elektrizität und des Lichts uel. Es gibt kaum ein wichtigeres Thema dieses gewaltigen Gebietes, bei dem nicht der Gebrauch der Hunderteinzahl zur Klärung der Tatsachen durchaus nötig wäre. Hiermit soll aber bei einer späteren Gelegenheit noch eingegangen werden.

Sodann hat die Hunderteinzahl — wie ebenfalls schon angegeben wurde — noch den Sinn, Motiv für unser Handeln zu werden. Selbstverständlich kommt hier zunächst nicht das ethische, sondern das wirtschaftliche in Betracht. Hier ermöglicht uns die Hunderteinzahl, Vorausberechnungen und Nachgerechnungen vorzunehmen. Hier ist nun das eigentliche Gebiet dieser zweiten Stufe. Sie bearbeitet es jetzt mit viel größerem Erfolge, weil sie ja infolge der dahingehenden Vorbereitung durch jene erste Stufe nun nicht nötig hat, um der rechnentechnischen Gesichtspunkte willen alles Sachliche durcheinander zu werfen. Vielmehr sind wir nun in der Lage, ein Sachgebiet zur Grundlage der zweiten Stufe zu machen, nämlich die Kapitalbildung und Kapitalverwertung. Es ist das ein außerordentlich wichtiges Gebiet, ein Gebiet, für das jede allgemeine bildende Schule unbedingt vorbereiten muß; und zwar hat der Bodenkulturreicht die ganz naturgemäße Stelle für diese Bildungsmarbeit. Wohl hat der Bisherige es auch versucht, aber Gliederung und Orientierung diesem Stoffes nach

rechnerischen Gesichtspunkten machte eine geistliche und sachlich klärende Darstellung möglich.

Die Kapitalverteilung im großen darf füglich hier übergangen werden, desto mehr ist auszuheben die durch die Erparnisse. Sie zeigt sich einerseits in der Verminderung der Ausgaben durch Entzagung in Bezug auf teure Bekleidungsmittel, Gewürze, Alkohol und Tabak, andere Genussmittel, Luxus in Kleidung und Schmuck, Nachahmung aristokratischer Bedürfnisse, Verbrauch arbeitsreicher Mengen usw., ferner durch sorgfältige Instandhaltung der Kleidung, der Wirtschaftsgüter, der Schreibbücher, durch Verwertung der Reste und Abfälle usw., weiter durch Einkauf in größeren Mengen, gegebenenfalls durch gemeinsamen Warenbezug usw. Sie zeigt sich andrerseits in der Erhöhung der Einnahmen durch gelegentliche oder regelmäßige Mehrleistungen, durch Eigenverwertung — Konjunkturleihen —, durch passende Erwerbstätigkeit der Familienmitglieder, endlich durch Zwangsparsen kleiner Beträge, wie sie in Rabattsparsverträgen und Sparparkassen verwirklicht ist. Alle diese Gedanken, die selbstverständlich schon bei anderen unterrichtlichen Gelegenheiten — z. B. gelegentlich beim Lesen — eine gewisse Vorbereitung erfahren haben, werden hier nun sachlich und zum Zwecke zahlensmäßiger Bearbeitung zusammengefaßt. Diese rechnerische Auswertung erfolgt selbstverständlich unter weitestgehender Benutzung der Handrechenzähl. Insbesondere kann an sie angeschlossen werden alles, was man bisher unter Rechartrechnung zusammengefaßt hat und was nicht speziell dem Kaufmannberufe angehört, sondern von allgemeiner Bedeutung ist. In der Hauptsache wird es sich dabei um Rabattsummen handeln, allgemeiner: um ersparte Summen. Daneben soll an der mathematischen Bildung willen nicht ungeschicktem sein, daß auch zu Aufgaben angeregt wird, in denen die Handrechenzähl oder die Summenzähl (das Kapital) zu berechnen ist. Hier dürfen solche Aufgaben nicht den Anspruch erheben, lehrnswürdig zu sein. Sie müssen sich als das zeigen, was sie sind: rechnerische Turnübungen, nützlich und gut zu treiben und in der Einleitung der rechnerischen Rätselfrage auch hinreichend gefühlbetont zu gestalten.

Der zweite Teil dieses Gebiets betrifft die Kapitalanlage. Sparkasse, Staatspapier, Hypothek, Aktien, Geschäftsunternehmen, Beteiligung sind hierbei die wichtigsten Formen, die sachlich und rechnerisch zu beurteilen sind, und zwar sie alle mit der immerwährenden Ergötzung durch die Begriffe der verschiedenen Sicherheit und der möglichen Sicherung. Endlich kommen dazu die Hauptformen der Arbeit mit fremdem Kapital im Großhandel und im Geschäftsbetrieb, die auf der Vorauszahlung beruhen,

daß die Tüchtigkeit des Betreffenden insoweit ist, einen vorhandenen Kapital einen höheren Ertrag abzugewinnen, als der übliche Mittelzins ihm darstellt.

Alle diese Formen zusammen ergeben das Gebiet der Zinsrechnung, der Gewinn- und Verlustrechnung, soweit sie allgemeine und nicht ausschließlich kaufmännische Bedeutung hat. Dabei kommt — wie oben — der Zinsrechner, der Gewinn- und Verlustrechner die größere Wichtigkeit zu; während die Berechnung aller übrigen Größen nicht ausgeschlossen ist, aber in demselben Sinne wie oben lediglich als abstrahierte Rechenübung, die in dieser Abstraktion ihr Sonderziel hat.

§ 40. Die bürgerlichen Rechnungsarten.

Unter bürgerlichen Rechnungsarten verstand der bisherige Rechenunterricht höherer und niederer Schulen die Schlußrechnung (Baptistri), Prozent- und Zinsrechnung, endlich Gesellschafts- und Mischungsrechnung; doch ist dieser Gebrauch nicht allgemein; vielfach nannte man Schlußrechnung besonders, oft stellte man auch Schlußrechnung, Prozentrechnung und bürgerliche Rechnungsarten nebeneinander, so daß unter dem letzteren eigentlich nur noch Gesellschafts- und Mischungsrechnung zu verstehen war.

Von der Schlußrechnung ist schon die Rede gewesen, vor allem in dem Sinne, daß wir es für unrichtig halten, Rechenrezepte — und damit Schlußrechnen — hinauszuheben bis hinter die Bruchrechnung. Wir konnten wiederholt zeigen, daß die Gewinnung und der Gebrauch des kleinen Einmaleins auf dem Schlußrechnen aufzubauen haben. Wenn vorzutragen ist, wieviel 5 Zinsen kosten von einer Serie, von der man 8 Stück mit 21.3 bezahlt hat, so ist das zwar eine vollständige Baptistrialsgabe, sie hat aber ihre Stelle dort, wo das kleine Einmaleins erworben wird. Ja, es hindert uns nicht, den Begriff des Schlußrechnens vorzuziehen auch auf Addition und Subtraktion. Es wird ebensogut ein Rechenschluß vom Kinde verlangt, wenn es vor der Aufgabe steht: Rabe²⁾, wieviel Pfennige ich in dieser Tasche hatte; 10.3 kostete die Straßenbahn, 2.3 gab ich meiner Lydia in die Spardose, nun habe ich noch einen Fünfer... Aber selbst war gegen diese Ausdehnung des Begriffs Bedenken trägt und das Schlußrechnen nur auf den Verhältnis von Einheit und Mehrheit und auf das verschiedene Mehrheiten bezieht, wird nach allen unsern Darlegungen nicht daran zweifeln können, daß das Schlußrechnen nicht eine besondere Rechnungsart ist, die im 6. oder 7. Schuljahre eintreten sollte, sondern

²⁾ Keltische Form für „Rabe“

daß es vielmehr die eigentliche Grundlage unseres gesamten Rechenunterrichts bedeutet:

Selbst die schwierigeren und zusammengekehrten Fälle der Facharithmetik begründen nicht eine besondere Rechnungsart. So erscheint nicht einfacher als das Rechnen mit umgekehrten Verhältnissen, allerdings unter der Voraussetzung, daß es richtig angefaßt wird, nämlich in voller plastischer Anschaulichkeit. Z. B. Deine Mutter schält jetzt einen Topf Kartoffeln. Das dauert 50 Minuten. Am Sonntag kannst du ihr dabei helfen. Berechne, wie lange es dann dauert! Nur völlig schematisch gewöhnte Kinder, nur ganz mechanische Rechner sagen dann: 40 Minuten. Die anderen Kinder können laut lachen, wir selbst können uns entspannen über solche „Nachtstempel“⁴⁾. Ein unbefangenes Kind, das nicht mechanisch gewöhnt ist, sagt ohne weiteres: Wenn ich helfe, da geht es fixer. Und wenn wir dann den Fall erleichtern und hinrücken: Wir wollen einmal denken, du könntest gerade so schnell Kartoffeln schälen wie deine Mutter . . . dann fällt auch ein jüngeres Kind, daß es dann jedenfalls nur die halbe Zeit dauern wird. Wenn dann die gewöhnliche Ergebnis auch noch mit leichteren Schreileistungen (z. B. Übergewöhnen, wie Multiplikation zweistelliger Zahlen mit einstelligen) nachgeprüft wird, mehrmals selbstverständlich, so stellt sich heraus, daß drei Personen nur den 3. Teil der Zeit brauchen wie eine, und nur den 3. Teil usw., wenn von ihnen zusammen eine bestimmte Leistung vollbracht werden soll. Selbstverständlich läßt es sich auch in anderer Weise klar machen, etwa so: Wenn du zu zweit schält, da geht es anders zu, als wenn deine Mutter allein ist; erkläre! . . . Da nimmt jedes eine aus der Schüssel und schält sie, und wenn die fertig ist, jenes wieder eine. Da bekommt die Mutter die Hälfte und ich die Hälfte, und da braucht die Mutter noch 10 Minuten dazu und ich auch . . . Zu solchen Aufgaben brauchen wir aber nicht erst die Bruchrechnung zu erwidern, brauchen nicht bis zum 7. Schuljahr zu warten, die gehören auf viel höhere Stufe. Dem einen großen Fehler der verfrühten Abstraktion stellt schon unser Rechenunterricht den andern der verespätesten Wirklichkeitsrechnung an die Seite⁵⁾.

⁴⁾ Für sollen wir uns in solchen Fällen nicht über das Kind entspannen, sondern eine andere kleine Methode, die in ihrem Mechanismusgehalt die schädliche Seite jeder Aufgabe möglichst fern hält oder die „entwickelt“, was auf dauernde Binnengewinnung.

⁵⁾ Wenn dann in diesem Falle nicht auch noch die gewöhnliche höhere Erklärung kommt von dem 3. Arithmetik, die diese Größen in 10 Tagen abtun sollen, wobei erst der 3 und 4 nachkommen. Wo in aller Welt kommt dieser praktische Fall vor, und welches Kind von allen Kindern der Welt wäre schon in die Lage gekommen, so etwas im Einzelnen auseinander zu setzen!

Auch zusammengesetzte Schlußformen bedingen keine neue Rechnungsart. Die uns vorliegenden Rechenbücher für die Volksschule geben nur annäherungsweise über die zweifache Verhältnis hinweg. Was läßt sich natürlich auflösen in zwei einfache, welche einzeln berechnet werden. Die Aufgaben 3 Arbeiter verdienen in 3 Tagen 120 Mk.; wieviel 3 Arbeiter in 3 Tagen? kann schon der Mittelstufe gestellt werden, die Divisionen übt.

Nachdrücklich müssen wir daran betonen, daß vom Standpunkte der heutigen psychologischen Erkenntnisse und der aus der gewonnenen didaktischen Einsicht das späte Auftreten des Schlußrechnens als ein nicht geringer Fehler erscheint. Gleichwohl dürfen wir uns nicht der Verpflichtung entziehen, zu erforschen, wie dies eigentlich geschehen konnte, während doch gleichzeitig die allgemeine Verflüchtigung der Abstraktion zu bemerken war. Wir glauben, die Motive dafür in einer Erscheinung zu finden, die dem Hinein der heutigen Methodik mehr und mehr entzweigen ist, in der schriftlichen Darstellung der Schlußrechnung. Die Kinder unter uns werden sich noch erinnern können, daß wir in unsern Kinderjahren angehalten wurden, die Schlußrechnungen je nachdem entweder links dem Kettenstrich oder mit dem langen Bruchstrich auszuführen. Zwei Beispiele mögen jene Zeit ins Gedächtnis rufen.

Wieviel M kostet 1 m, wenn 33 Yards mit 2 d gekauft werden, 33 Yards = 32 m und 1 d = 20,50 M sind?

Das wurde so gerechnet, daß immer ein Glied wie das nächste letzte, und daß Anfangs- und Endglied gleich waren, also folgendermaßen:

3 d	1 m
32 m	33 Yards
33 Yards	2 d
1 d	20,50 M

und nun wurde die rechte Seite durch die linke dividiert, dadurch wurde das gewünschte Ergebnis gewonnen:

$$\frac{33 - 2 \cdot 20,50}{33 - 32} = \frac{20,50}{1} = 20,50 \text{ M }$$

Ein Wasserbehälter von 8 m Länge, 4 m Breite und 7 m Tiefe wird von 6 Röhren in 4 Tagen gefüllt. Wieviel gleichartige Röhren sind notwendig, um ein Reservoir von 10½ m Länge, 8 m Breite und 8 m Tiefe in 3 Tagen zu füllen?

Dann machten wir folgenden „Ansatz“:

Bei 8 m L., 3 m Br. 7 m T. bei 4 Tg. braucht man 6 Röhren;

= 10½ m L. = 8 m Br. = 8 m T. = 3 Tg. = „ „ „ 7 „

und nun wurde mit Bruchstrich gerechnet:

$$\frac{3 \cdot 10^3 \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4}{8 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3} = 12 \text{ Röhren.}$$

Tabel war es sprechen: Bei 8 m Länge des Behälters braucht man 8 Röhren (eingeschrieben: 8); würde der Behälter nur 1 m lang sein¹⁾, so bräuchte man nur den 8. Teil der 8 Röhren — die 8 wird dabei als Divisor eingeschrieben; da der Behälter aber $10\frac{1}{4}$ m lang ist, so braucht man $10\frac{1}{4}$ mal soviel Röhren als bei 1 m Länge usw.

War der Bruchsatz fertig, so wurde gekürzt und umgeschrieben. Bei beiden Beispielen wurden die schriftlichen Formeln als Hauptwerke angegeben. Ohne diese besonderen Formen der schriftlichen Darstellung hätten wir diese beiden Beispiele vielleicht auf folgende Weise gerechnet:

Die angegebenen 28 Yards werden 41,4 kosten, nämlich $2 \cdot 20,20,4$; 35 Yards noch $\frac{1}{2}$ dieser Summe, nämlich 10,55,4 mehr = 51,75,4. Diese Zahl ist durch 28 zu teilen, ergibt 1,85,4.

Der erste Behälter hat 880 ccm Inhalt; wenn 8 Röhren in 4 Tagen ihn füllen, so füllt eine Röhre täglich den 90. Teil, also 14 ccm. Der andere Behälter hat 504 ccm Inhalt; da die Füllung in 3 Tagen beendet sein soll, war jeder Röhre also nur 48 ccm fließen können, so muß man dann soviel Röhren öffnen, wie 48 in 504 enthalten ist, nämlich 11.

Vergleicht man diese beiden Lösungsformen, so erkennt man sofort, daß der Kettenatz mechanisch sehr leicht erkennbar ist, daß er aber nur für voneinander abhängige Bedingungen zu brauchen ist, nicht für voneinander unabhängige, wie die das Röhrenbeispiel zeigt, noch nicht für umgekehrte Verhältnisse. Er wird daher dort verwendbar erscheinen, wo diese letzteren Fälle nicht in Betracht kommen, wie bei konstruktiven Unrechnungen von Gewichten und anderen Maßen, von Münzwerten, Sparsenaufschüßen u. dgl., nicht aber dort, wo irgend das selbständige Urteil des Schülers in Frage kommt über die gegenseitige Abhängigkeit der Bedingungen oder über das Vorhandensein direkter oder indirekter Verhältnisse. In allgemein bildenden Anstalten wird er daher wohl nur als eine Form beruflicher Erleichterung Erwähnung finden dürfen.

Wesem selbständigen Urteilen des Schülers wird aber nach beiden Richtungen hin Raum gewährt durch den Bruchsatz. Er ist logisch völlig klar, besonders läßt er die Wirkung jeder einzelnen Bedingung klar in die Erscheinung treten.

Die mechanische Erleichterung, die der Kettenatz gewährt, und die logische Klarheit, die der Bruchsatz zeigt, haben aus diesem beiden Darstellungsformen — vor allem der zweiten — eine so über-

¹⁾ Man stelle sich das vor, zugleich mit dem übrigen Maßen.

zugende Bedeutung verschafft, daß man dort, wo von Schlußrechnung als einer „bürgerlichen Rechnungsort“ die Rede war, eigentlich nicht das Schlußrechnen selbst, sondern nur eine besondere Form seiner schriftlichen Darstellung, vor allem die eine, den Bruchsatz, gemeint hat. Von hier aus wird sofort verständlich, warum man das an sich so leichte Schlußrechnen doch durchaus der Oberstufe vorbehält: der Bruchsatz setzt natürlich das Verständnis der Bruchrechnung voraus. Die Mehrzahl der Methodiker und die Mehrzahl der Fachlehrbücher hat freilich — wie schon angeleitet — diesen Zusammenhang aus dem Auge verloren. Sie glaubte, die Schlußrechnung überhaupt gehöre ins 4. und 7. Schuljahr, und sie fing dort mit den elementarsten Dingen an. Man vergleiche daraufhin unsere Rechnungsbücher.

Auch die ungeliebte Bezeichnung war zu bemerken. Es gab auch solche, die ungescheitlich lediglich die schriftliche Form des Bruchsatzes als Schlußrechnung betrachteten zu dürfen glaubten¹⁾. Ihnen schwebt jedenfalls das Ideal mechanischer Gütlichkeit vor; dies hat aber für uns nur Wert, wenn das volle mathematische Verständnis dahinter steht.

Unter der didaktisch-mathematischen Schiene, die sich in den Lehrplänen der Oberstufe unter dem Namen Schlußrechnung aufgehäuft hat, ist aber doch ein Goldkorn zu finden. Es besteht in der Erkenntnis, daß man einen Bruch unsingerichtet und ungekürzt in der Rechnung weiterführen darf, und daß es in vielen Fällen recht praktisch ist, dies zu tun, ihn also fortzuführen, bis sämtliche Belegungen mit in die Rechnung aufgenommen worden sind.

Ein einfaches Beispiel. Ein Rest von 14,5 m Kleiderstoff ist mit 40,8 bezahlt worden; in einem Kleide wurden davon 5,84 m gebraucht; wieviel ist für das Stück zu rechnen? Hier wäre es ein ziemlich weiter Weg, auszurechnen: 1 m kostet $40,8 : 14,5 = 2,74$ M. Hier heißt es vielmehr: 1 m kostet $\frac{40}{14,5}$ M., und 5,84 m kosten 5,84 mal soviel, also

¹⁾ Ein Beispiel aus der Literatur. Die Aufgabe hatte geheißen: 11 Ger kosten 88 Tg. Wie waren damals noch nötig, wenn kostet 1 St? Räuber des 2. und 3. Schuljahres rechnen nicht, sondern wissen — was wird, das Gegenwärtige der Kaufleute verstehen — daß dann 1 St 8 Tg. kostet. Hier handelt es sich aber um das ... Schuljahr, in dem die Schlußrechnung gelehrt werden war. Da wurde richtig, 1 St koste 8 Pfennige, und es sei folgendemachen zu berechnen:

$$x = \frac{88-1}{11}$$

gegebenen; x ist gleich 80 durch 11 und 1. Auf meine Frage, wie denn das zu erklären sei, war keine Antwort zu bekommen. Jeder Bruchstrich wird mir zu schrecken, wenn ich mich gegen ein solches Verfahren stelle.

$$\frac{40 \cdot 5,34}{14,8}$$

was man mit geringster Mühe das Ergebnis 13,8 feststellen kann.

Es unterliegt gewiß keinem Zweifel, daß man diese so durch-
aus politische Darstellungsform eifrig pflegen wird, sie nicht
etwa bloß mechanisieren, sondern immer mehr in ihrem Geist ein-
zuführen sich anlegen und lassen wird. Aber das Recht, sie
eine neue Rechenart anzusehen, kann sie nicht beanspruchen.
Dementselbst hat sie ihre Stelle dort zu finden, wo sie inhaltlich ver-
bietet ist; das ist der Fall auf der dritten Stufe der Bruchrech-
nung, unter Umständen vielleicht schon gegen das Ende der zweiten.

Dabei wird das, was wir früher Schlußrechnung nannten, ver-
tast auf die obigen Stufen des Rechenunterrichts. Das gesamte
Rechnen ist künftig ein Schlußrechnen, dem zu gelegener Zeit auch
die Darstellungsform der Bruchrechnung beigegeben wird. —

Die Gesellschafts- und Mischungsrechnung können
wir zusammen behandeln. Auch der bisherige Rechenunterricht stellt
sie nebeneinander auf die Oberstufe.

Bei diesen beiden „Rechenarten“ drängt sich zunächst der
Vergleich mit der Schlußrechnung auf. Während diese in eigen-
artiger Weise das gesamte Rechnen durchzieht, und vor allem an
einer lebenswahren Gestaltung ganz wesentlich befruchtet, so sind
jene beiden anderen Formen im Vergleich dazu beinahe lebens-
fremd. Man gebe daraufhin die Rechenbücher durch, und man
wird staunen über die Fülle der Phantasieaufgaben. Wenn man
mathematische Mädel sammeln wollte, könnte man aus den uns
vorliegenden Rechenbüchern die Aufgaben der Gesellschafts- und
Mischungsrechnung fast der Reihe nach abschreiben: diese unglück-
lichen Testamente, die mit Brüchen und Differenzen arbeiten, die
den Gesamtbetrag der Erbschaft ausrechnen lassen u.ä.; diese
Schlüsselmeister, die mit verschiedenen viel Gesellen an einem Tag
arbeiten und zusammen eine bestimmte Summe erhalten, von der
man ausgerechnet werden soll, wieviel auf jeden kommt — stellt
daß jeder von ihnen seine Rechnung eingibt; diese Hausfrauen,
die eine Sendung Reis teilen nach Bruchangaben — aber wie groß
sie eigentlich ist, das wird erst ausgerechnet, nachdem sie ge-
teilt und bezahlt ist; diese Kaufleute, die gemeinschaftlich Kalten
kaufen, aber zunächst feststellen, daß unter allen Umständen
11 130 kg mehr sind als A me., und nun ausrechnen, wieviel jeder
eigentlich nehmen wird; diese Geschäftsführer, die aus dem am
Ende des Jahres verteilten Gewinn ebenfalls erst wissen, wieviel
jeder von ihnen eingestuft hat ... Genug der Beispiele! Sie müssen
an wie schlechte Scherze, und haben doch den bitterensten Nieder-

grund, daß an solchen Beispielen unsere Kinder wachsen und das rechnende Leben kennen lernen sollen! Denn sie stellen sich in keiner Weise als Phantasieaufgaben vor. Und in der Mischungsrechnung ist es fast noch schlimmer. Wo aber die Aufgaben hier wie da noch einigermaßen lebensmöglich sind, da betreffen sie die Handlungsschritte, gehören also ins bürgerliche Rechnen¹⁾.

Der Vergleich mit der Schlussrechnung zeigt ferner, daß bei Gesellschaftsrechnung und Mischungsrechnung ein bestimmtes Schema von so ausgeprägter äußerer Gestalt wie bei der Schlussrechnung nicht in Betracht kommt. Oder wenn es eins gegeben hat, so ist es schon seit mehr denn 40 Jahren verlassen worden. Da äußere Grund für die Entwicklung dieser Gliederung unserer Rechenarbeit, wie er bei der Schlussrechnung zu schauen war, ist also hier nicht zu bemerken.

Wenn wir also zunächst feststellen müssen, daß die Aufgaben dieser „Rechnungsarten“ entweder Lebensaufwand oder bürgerlichen sind, und daß zunächst auch kein äußerer Grund für eine solche Zusammenfassung und für ihr Erscheinen an dem gleichen Orte zu entdecken ist, so könnte doch beauptet und angenommen werden, daß mit ihrer Bewältigung eine besondere Art mathematischer Bildung erworben würde, die natürlich die übrigen Erwerbungen voraussetzt. Sehen wir da daraufhin an!

Beide „Rechnungsarten“ sind Bräutigamsformen, die mehr oder weniger mit anderen Operationen verbunden sind, vor allem mit Addition. Nur sind die Teiler und die Teile nicht wie bei der gewöhnlichen Addition gleich, sondern verschieden. Am Klarsten erblickt man das aus den allereinfachsten Fällen:

Wenn der kleine Karl und sein größerer Bruder Fritz sich 15 $\frac{1}{2}$ teilen dürfen, und Karl soll jedesmal 2 $\frac{1}{2}$ bekommen und Fritz 3, so hat jeder zuletzt 3, dieser 3 Pfänder vor sich.

Wenn Max vorgestern 4, gestern 4 und heute 3 Feller hat, so sind das durchschnittlich auf den Tag 3.

Das wäre Gesellschaftsrechnung und Mischungsrechnung in einfacher Form. Dennoch zeigen beide Beispiele die Richtung der Kompliziertheit: bei der Gesellschaftsrechnung ist nämlich der Divi-

¹⁾ Ich will es meiner Schande gedenken, daß ich in meinem jungen Leben noch keine Gesellschaftsrechnung richtig gelöst habe, außer im Unterricht. In meinen Zwanzigjahren spielte mir niemandes Lamm. 1 Fährst du so 4,50 Mark zu rufen. Da war es selbstverständlich, daß jede Lb. Mark zählt. Oder zu kaufen, dann kamen eben 24 Fg. auf den Mann. Der Verkäufer, die Verkäuferinnen versicherten mir bei unserer Gesellschaftsrechnungen, ist mir gar nicht bekannt. Und Mischungsrechnung! Ich habe wirklich noch nicht ein einziges Mal Kaffee oder Spiritus oder Geld mischen oder eine solche Mischung berechnen müssen, und viele Kinder müssen — Tischspitzspige — da ich ihnen beige habe, ist es gerade so gegangen.

war nicht einfach mit der Zahl der Teilnehmer gegeben — 2, sondern die Verschiedenheit der Teilnehmer bedingt eine Verschiedenheit der Teile. Und bei der Mischungsrechnung sind es nicht gleiche Faktoren, die zu einer Gesamtwirkung zusammenzutreten, sondern ungleiche — wir sprechen wegen der ausgeprägten mathematischen Bedeutung des Wortes Faktor darum besser von Summanden oder verdrängen für diesen Zweck das Wort Faktoren hier einmal durch „Wirkteile“. Sie ermöglichen uns eine Division in dem Sinne, daß man sie mit gleichen Teilen vergleicht. Während also bei der einfachen Division und Multiplikation Teilnehmer und Produkt sowie Teilranteile als gleichzeitig entstanden zu denken war, sind jetzt die Wirkteile qualitativ verschieden.

Eine solche qualitative Verschiedenheit, die in eine Rechnung eingeführt werden soll, muß natürlich irgendwelchen zahlenmäßigen Ausdruck finden. Das geschieht in der Tat; bei jenem ersten Beispiel ist es der Bedarf der verschiedenen großen Kinder, bei denen die Tagesleistungen, die eine in Zahlen ausgedrückte Wertung erhalten.

In sehr vielen Fällen erfolgt diese zahlenmäßige Wertung allerdings in der Form des Bruches, des gewöhnlichen wie des Sonderteilbruchs, der auf das Ganze bezogen wird. Dies bedeutet natürlich eine gewisse Schwierigkeit, die mit derartigen solchen Aufgaben zurechtzukommen, der die Bruchrechnung im allgemeinen bewältigt hat. So angesehen, erscheint es erklärlich, daß man diese „Rechnungsarten“ hinter die Bruchrechnung stellte. Es geschieht aber unsere Bruchrechnung zu unrecht. Denn hinter oder in die Bruchrechnung gehören lediglich die mit Brüchen formalisierten Fälle, letztere aber gehören auf wesentlich frühere Stufe.

Der Sinn dieser Rechnungsformen — die Teilung in ungleiche Teile und das Zusammenwachsen ungleicher Teile — ist nämlich so einfach, daß auch schon jüngere Kinder damit vertraut gemacht werden können. Eine Teilung in ungleiche Teile findet schon das Kind der Unterstufe gesehert, wenn man die Teilnehmer genügend vorstellt, z. B. Vater und Kinder. Will man sich von dem Gedanken lösen lassen, daß solche Aufgaben doch immer noch kompliziertere Formen der Division bedeuten, so kann man mit ihnen bis zur Mittelstufe warten.

Dabei wird es sich häufig empfehlen, die zum Teil rein unterlehen, zum Teil irreführenden „(rechnung?) Berechnungen“ zu ändern. Wir schlagen vor, statt Gesellschaftsrechnung zu sagen: Verteilungsaufgaben, und statt Mischungsrechnung: Durchschnittsaufgaben.

Man kann dabei wirklich das Bestreben mitteilen, daß der Ausdruck Verteilungsaufgaben ja gar keinen Unterschied mache

zwischen der gewöhnlichen Division und dieser komplizierten Form. Wir sehen nämlich gerade in dieser Deutung des Gemeinnsatzes einen Fortschritt: ob 2 Mädchen und 3 Knaben sich 35 $\frac{1}{2}$ teilen, oder ob Karl 9 und Fritz 8 Teile bekommen soll, ist doch im wesentlichen dieselbe rechnerische Krackbrettung. Will man aber den Unterschied ausdrücklich hervorheben, so kann man sagen: Verteilungsaufgaben mit ungleichen Teilen; das trifft genau den Sinn und erklärt zugleich, ganz anders als der nichtausgende Ausdruck Gesellschaftsrechnung.

Der zweite Vorschlag, die Beispiele der Mischungsrechnung als Durchschnittsaufgaben zu bezeichnen, wird kaum auf Bedenken stoßen. Bei jedem einzelnen handelt es sich tatsächlich um das Aufsuchen des Durchschnitts oder bei gegebenem Durchschnitt um das Aufsuchen eines mitteilenden Teils. Jedenfalls werden beide Bezeichnungen einem erheblich früheren Einsetzen dieser Aufgabenformen gerecht.

Hierzu noch einige Beispiele, zunächst von Verteilungsaufgaben.

1. Teilt auch diese Pflanz, sagte die Mutter; Martin soll die Hälfte bekommen, weil er davon welche zu verspeisen hat, Kurt $\frac{1}{4}$, und die Übrigen teilt ihr Leoschen auf! Als Kurt mit Teilen fertig war, lagen 7 für Leoschen da. Da waren sie alle zufrieden, die Mutter und die Kinder. Hört ihr nicht, denn ihr müchtet nun gern etwas wissen...

2. 5 Geschwister sollen sich in 18 Weihnachtspfel teilen, jedes größere soll immer einen mehr haben, sagt der Vater.

3. Zum Ablesen des Christbäume haben sich Paul und Marie 4 Schulfreunde eingeladen. Es wird für jedes Kind ein Teller gemacht, einer aber soll das große Los sein, da müssen doppelt soviel Zuckerkringel drauf als auf einen anderen. Fortsetzung verschieden: 35 Kringel schickte die Mutter im ganzen, heißt ihr rechnen! Oder: Alfred zog das große Los und fand 10 Kringel auf seinem Teller... Oder: Marie hatte Glück, sie zog das große Los und hatte 6 Kringel mehr auf ihrem Teller als ihr Bruder war.

4. 3 Knaben machen für die Eltern Kartoffeln aus, 14 Zellen; nach einer Stunde hat der Kleine 9 Zellen fertig, der mittlere 3, der große 4. Wie lange dauert's noch, wenn's so weiter geht? fragt Franz. Und wieviel wird dann jeder fertig gebracht haben? meint Emil. Als sie fertig sind, schenkt ihnen der Vater 50 $\frac{1}{2}$ für die Spatbüchse, die soll Erich verteilen nach den fertig gebrachten Zellen; heißt ihn rechnen!

5. 2 Hausfrauen kaufen zusammen $\frac{1}{2}$ Ztr. Zucker, dann rechnet ihnen der Kaufmann den Zuckerpreis von 31,80 $\frac{1}{2}$. Frau Meier verlegt das Geld, gibt dem Boten noch 10 $\frac{1}{2}$ und behält 15 $\frac{1}{2}$; was hat Frau Schuler zu zahlen? Wieviel hat jede erspart?

Durchschnittsaufgaben lassen sich noch viel leichter und mehr gestalten und dann auf allen Gebieten, vor allem auf dem der häuslichen Wirtschaftsführung, wobei der Durchschnittsverbrauch, der Durchschnittspreis, sowie der Ausgleich eines etwaigen Mehrverbrauchs in Frage kommt usw. Zu letzterem noch ein Beispiel. Frau Schmidt hat sich ausgerechnet, daß sie täglich 78 $\frac{1}{2}$ für Fleischwaren ausgeben darf. Was bringt sie einen Festtagsbraten mit für 1,50 $\frac{1}{2}$? Wie kann sie das ausgleichen, in derselben Woche? In dieser und der nächsten Woche? auf noch andere Art?

Ferner kommt für Durchschnittsaufgaben das ganze Gebiet der Schul- und anderer persönlicher Leistungen, z. B. auch turnerischer, sowie das Gebiet der heimatischen und vaterländischen Erdkunde in Betracht — betriebe in ähnlicher Weise, wie wir es bei Haushaltsrechnung angegeben haben.

Zusammenfassend dürfen wir sagen: Auch die sogenannte Gesellschaftsrechnung und Mischungsrechnung sind als Stützgebiete der Oberstufe unter dem Namen der bürgerlichen Rechnungsarten abzuleiten. In vertiefter Auffassung aber sind entsprechend gestellte Aufgaben überall dort einzuheften, wo Leben und sonstiger Unterricht sie beanspruchen. Auf diese Art gelingt es überdies, die Lebendigkeit der beiden Aufgabengruppen bestmöglich zu heben.

Anhang:

Zusammenstellung der im Verlage von Julius Klinkhardt erschienenen neuen Rechenlehrmittel.

1. **Bestimmte Zahlbildertafeln für Zahlenfassung- und Operationsübungen** — vergl. S. 171—174 und 176—181 oben Wesens; sie sind auf ganz Papier (der Klinkhardt wege) gedruckt
Vollständiger Satz von 40 Blatt (Zahlbilder von 5 bis 100) circa. M 3,—
2. **Kleine Ausgabe dieser Tafeln für die Hand der Kinder in geeigneter Spielkartengröße, zum Gebrauch in Haus und Schule mit denselben Übungen.**
Vollständiger Satz in Pappeibund circa. M —,40
3. **Handrechenrechen zum Abzählen, Zerschneiden und Zusammenfügen für Zahlenfassung-, Zahlbildungs- und Operationsübungen** — vergl. S. 174—176, 182—185 und 187—188 oben Wesens;
auf Papier gedruckt, 320 Stück circa. M —,70
auf Karton gedruckt (zum Zusammenfügen besser geeignet) 200 St. M 3,—
Die Kinderblätter dazu kann sich jeder Einzel selbst herstellen nach der S. 187 gegebenen Anleitung.
4. **Bestimmte Zahlbilder der 10000**, vergl. S. 187.
120 Stücke auf weißem Karton M 3,—

Bei Vorbestellung des Satzes liefert der Verlag diese Lehrmittel direkt, kostenfrei durch jede Buchhandlung. Während des Satzes mögliche Nachbestellung vorbehalten.

Verlag von Julius Neikhardt in Leipzig und Berlin.

Orbis sensualium pictus des Amos Comenius

Photographische Reproduktion der ersten Ausgabe des Jahres 1658. Herausgegeben von

Prof. Dr. Joh. Kühnel

Lehrstuhlleiter in Leipzig

XLV a. 875 S. In Extra-Papierband der deutschen Zeit N. 6.—

Das Buch enthält in gelungener Fülle die Gesamtheit der damaligen Kenntnisse und Anschauungen, es ist ein Zeitzeugnis, wie uns in ähnlicher Hinsicht und zugleich in ähnlicher Teilzahl ein

Handbuch werden. Dabei ist der Inhalt ganz einfach gehalten, denn es zeigt uns, wie es seiner Zeit waren die Kenntnisse des Lesers, was der Buch, Karten und Globus haben die Kinder aus ihm gelernt und haben hoch geschätzt. In viele Sprachen ist es übertragen worden, wichtig ist es zum Ende der Zeit von Kompositionen und mehr von Übersetzungen.



Handbuch werden. Dabei ist der Inhalt ganz einfach gehalten, denn es zeigt uns, wie es seiner Zeit waren die Kenntnisse des Lesers, was der Buch, Karten und Globus haben die Kinder aus ihm gelernt und haben hoch geschätzt. In viele Sprachen ist es übertragen worden, wichtig ist es zum Ende der Zeit von Kompositionen und mehr von Übersetzungen.

Das Buch enthält in gelungener Fülle die Gesamtheit der damaligen Kenntnisse und Anschauungen, es ist ein Zeitzeugnis, wie uns in ähnlicher Hinsicht und zugleich in ähnlicher Teilzahl ein Handbuch werden. Dabei ist der Inhalt ganz einfach gehalten, denn es zeigt uns, wie es seiner Zeit waren die Kenntnisse des Lesers, was der Buch, Karten und Globus haben die Kinder aus ihm gelernt und haben hoch geschätzt. In viele Sprachen ist es übertragen worden, wichtig ist es zum Ende der Zeit von Kompositionen und mehr von Übersetzungen.

Besprechungen.

„Ein vortreffliches und von fast niemand gekanntes Buch wird hier mit größter Treue wiedergegeben. Nicht nur die seltsamen Ideen, auch der ganze Text ist auf photographischem Wege wiedergegeben, die selteneren Kalligraphen des Wortes und ganze Zeichnungen sind in ungeheurer Treue der ersten Ausgabe. Der Bilderschatz aber selbst hat in außerordentlich Form als Karikatur, der Kunsthistoriker und Philosoph die außerordentlich wichtige Zeugnisse für die Geschichte der Vergangenheit.“

„Das Buch ist ein vortreffliches und von fast niemand gekanntes Buch wird hier mit größter Treue wiedergegeben. Nicht nur die seltsamen Ideen, auch der ganze Text ist auf photographischem Wege wiedergegeben, die selteneren Kalligraphen des Wortes und ganze Zeichnungen sind in ungeheurer Treue der ersten Ausgabe. Der Bilderschatz aber selbst hat in außerordentlich Form als Karikatur, der Kunsthistoriker und Philosoph die außerordentlich wichtige Zeugnisse für die Geschichte der Vergangenheit.“

Verlag von Julius Kliewardt in Leipzig und Berlin

Prof. Dr. Johannes Kühnel

Moderner Anschauungsunterricht

Eine Reformschrift. 4. und 5. Auflage.

VII und 194 Seiten. In Leinwand M. 3.40

„Das Buch ist ein Leitfaden, was denn man wünscht, daß in der jungen Lehrer mit Recht sei, der ihnen mit Lust lesen mag, denn es heißt darin ein ständiges Ringen wie ein Schüler mit auf jeder Seite anregender Geist.“ P. Petersen in Bonn.

„Wie wichtig der Augen sehen will, was Anschauungsunterricht ist, wie man Kinder auf Erden unterrichten, der Lehrer in der Buch, es wird in ihm die Lust zeigen, es auch zu machen. Aber wird auch finden, wie natürlich alles ist, was man in großer Klarheit beschreibt, und wie alles eine durch Kunst ist.“ H. Meyer in Halle.

Von den Bildern, die in der Theorie des Anschauungsunterrichts enthalten, ist dieses vielleicht das beste. Eine wesentliche Teil ist es vollständig dargestellt und auf so vieler anderer Seiten gezeigt, daß man es von Studien wenn möglich kann. Diese Anschauungen werden in anschaulicher Weise zuerst durch einen praktischen Teil, der sowohl wichtige, vollständige Lehrerzeit, als auch mehrere Beispiele aus der Praxis des Anschauungsunterrichts enthält. Im englischen in sehr angenehme Weise.“ R. Petersen in Leipzig.

„Die vorerwähnten Bilder, welche im ganzen Sinne, brechen die Vorleser bezaubert in allen Perioden, die man sie seit so vielen Jahren Anschauungsunterricht nicht, gerade zu wissen, das Geistes, die schon vor vielen Jahren angenommen wurden, aber wieder in Vergangenheit gehen sind, mit dem die Anschauungsunterricht und der Anschauungsunterricht. Besonders wichtig wird es dabei, daß mehrere Beispiele aus der Praxis des Anschauungsunterricht sein, wie es so leicht gesehen, welche in einem anderen werden, daß die Natur nicht allein, die Natur Natur dargestellt wird.“ R. Petersen in Bonn.

„Es ist eine Lust Lehrer zu sein in dem Geiste und der Wissenschaft. Ich habe es mit voller Zustimmung, in der Erklärung geben. . . . Ich würde mich nicht eine Zeit lang mit dem Buch, das Erklärung aus der Anschauungsunterricht, einer praktischen Anschauungsunterricht. . . . Ich würde nicht eine Zeit lang damit zu tun, nur dem Buche anzuhören, daß die recht viele verschiedene Jäger haben können.“ H. Meyer in Bonn.

Der Herausgeber Johannes Kliewardt hat das Werk des Lehrers, welcher das Buche ausdrücklich empfohlen.

Comenius

und der Anschauungsunterricht

61 Seiten. Gebunden M. 1.50

„Es ist nicht in vollständiger Weise gelungen, Comenius als Urquell der modernen Pädagogik zu charakterisieren, zu zeigen, daß viele Gedanken der heutigen Pädagogik bei Comenius bereits im Reine vorliegen. In der ersten und ersten Klarheit und Klarheit von ihm ausgesprochen sind. Besonders empfohlen ist das Buche zur Vorlesung auf der Universität in Bonn.“ R. Petersen in Bonn.

H. Meyer in Bonn.

Verlag von Julius Klackhardt in Leipzig und Berlin

Jütting und Webers Anschauungsunterricht und Heimatkunde

Für das erste bis dritte bzw. vierte Schuljahr

Achte u. neunte Auflage, bearb. von Prof. Dr. Johannes Käthe

XVI, 320 Seiten. Gebunden M. 8.—, in Leinwand M. 2.50

„Ein vorzügliches, ja ganz außergewöhnliches methodisches Hilfsmittel . . .
Dasselbe eignet sich zum Studium der Schule, des Fachlehrers an der Spitze der Klasse
für den Anschauungsunterricht. Es ist eine große Empfehlung.“ *Die Deutsche Schule*

„Seine Lehren, die sich für die Stoffausarbeitung interessieren, darf an dieser
Einführungslänge vorbeigehen. Bei der kleinen Beschäftigung und knappen Lehrstoffaus-
wahl ist es verzeihlich, daß man zu diesem Buche greift.“ *Zeits. für Lehrerb.*

„Die Methode ist geschmackvoll durchgeführt und einem geübten Lehrer entgegen,
daß eine völlige Freibearbeitung des reichlich bekannten Stoffes, Weberschen Stoffes
ist . . . Für die Fortbildungsmethoden in Stadt und Land ist das Buch ein lebendig
gewordener Quell, der den Lehrer erheitert und stärkt, daß er dann seine eigene
Kraft einzuwenden und seinen eigenen Geist walten laßt.“ *Deutsches Schulblatt*

„Das ist ein wirklich wertvolles Buch. Mit großer Vorliebe habe ich es zuerst
durchgesehen, weil ich mich wieder darauf gefreut, was es sich für die Praxis als
unerschöpfliche Quelle aufzuweisen gestattet ist. Diese Freude aber schmerzhaft-
gemindert zu werden, daß von der Verfasser doch der ständige Zusammenhang des
Ganzen gebildet, es sich nicht willkürlich auseinandergerissen hätte, das ist doch fast zu
schmerzhaft, das Buch dringender zu empfehlen.“ *Alteutsche Literatur-Zeitung*

„Käthe hat mit der Herausgabe des eithausartigen Schöpfungsbuches Handreich-
ten, die eine völlige Anschauung darstellen ist, dem Lehrer und der Schule einen
wirklichen Dienst geleistet. . . . Auf dem Wege der unmittelbaren Anschauung, der
Beschreibung, der Arbeit und Erfahrung wird das Kind hier in das Reich eingeführt,
das nicht bloß die Welt ist, in dem es beständig wächst und. Wie wird
der Anschauungsunterricht wirklich zum Lebensmittelpunkt aller Fächer: hier kommt
das Kind zu einer künstlerischen Erkenntnis seiner Umgebung, die von Käthe als
eine so reiche und wertvolle zu schildern weiß, daß der Blick schon als Lehrer
einen neuen Grund findet, häufig es in sehr vielen Schulen fruchtbar
auszuüben.“ *Die Deutsche Schule*

„Eine wissenschaftliche Stoffquelle und ein methodischer Wegweiser.“

Erklärung und Übersicht

Nach dem Tode von Hpt. Direktorin Käthe übernahm die Lehrkraft besond. sorgfältig

Während des Kurses werden Lehrer von demselben Verfasser:

Der Handfertigungsunterricht vom Standpunkt des Pädagogen

Erweiterter Vortrag.

22 Seiten. Gebunden M. —.50

Diese Abhandlung untersucht, wie sich der Pädagog zu dieser Frage stellt als
Ethiker, Psychiker, Pädagoge, Pädagoge, Pädagoge, Pädagoge, praktischer Pädagoge
und bringt so eine Empfehlung dieser Unterrichts, findet nur
seiner Bedingungen, die aus dem Wesen des Pädagogen sich ergeben.

Verlag von Julius Klinkhardt in Leipzig und Berlin

PÄDAGOGIUM

Eine Methodeneinleitung für Erziehung und Unterricht

Unter Mitwirkung von Prof. Dr. E. Meumann

herausgegeben von Prof. Dr. Oskar Meßmer

Das „Pädagogium“ soll versuchen, die bei rationen gegangenen Vorarbeiten der praktischen Pädagogik als schülerische Produkte wieder herauszuheben, dabei jedoch keinen Dogmatismus hegen. An geschichtlichen Erzählungen und Fiktionen sollen die Hauptgebiete werden. Methoden der Erziehung und des Unterrichtes (Lehrpläne) gehören, die von dem Gelehrten ausgehen, daß für die Erziehung einer Nation die Pädagogik zur Beobachtung und Bekämpfung des Menschen notwendigste Voraussetzung ist. — Es sind hervorragende Mitarbeiter für das Pädagogium gewonnen, deren Namen schon ein sicherer Anhalt für den Erfolg des Werkes gebietet.

I. Band:

Die Psychanalytische Methode

Eine erfahrungswissenschaftlich-systematische Darstellung von Dr. Oskar Pfister, Pflanz und Seminarlehrer in Zürich.

VIII und 214 Seiten, Gebunden M. 11.—, in Leinwand M. 12.80

„Eine der bedeutendsten Neuerscheinungen der pädagogischen Literatur der letzten Jahre, in dem kein Lager der letzten Jahre vorliegt in Zürich.“ Der Verfasser, der in unangefordelter und unentgeltlicher Tätigkeit dem Werke seine Kraft entgegengebracht hat, versteht es, die in wissenschaftlich ungenügender Weise zu beschreiben, daß jeder pädagogisch Interessierte selbst Ausarbeitungen folgen und aus ihnen lernen kann.“

Prof. Dr. E. Meumann

„Ein sehr interessantes Werk, an dem kein Pädagoge und kein Philosoph und Philosoph nicht vorbeigehen können.“

Wiederholt

II. Band:

Der Gesangsunterricht als Grundlage der musikalischen Bildung von Carl Eitz

VII u. 79 Seiten, Gebunden M. 2.—, in Leinwand M. 2.80

„Es ist hoch erfreulich, daß im „Pädagogium“ eine solche der Wert erhalten hat, um seine pädagogischen und musikalischen Grundlagen und methodischen Grundlagen besser zu verstehen und zu begreifen. Wie es zu sein hat, das findet größte Beachtung finden, seine Bedeutung ist verstanden. Es hat sich bewiesen, die pädagogischen Grundlagen der Gesangsunterrichts, daß auch der musikalischen Bildung und der Gesangsunterrichte die auf dem Pädagogium zu finden, können sein. Das Studium des Werkes verdient hohen Grad, man kann nur sagen: „Hoch und hoch““

Wiederholt

Allein die Prospekt ist unentgeltlich und persönlich.

Verlag von Julius Klinkhardt in Leipzig und Berlin

III. Band:

Der Deutschunterricht als Weg zur nationalen Erziehung

Von Dr. Otto von Gregerz

IV, 366 S. Gebunden M. 7.20, in Leinwand M. 8.—

„Es ist nicht leicht, eine Vorstellung von der Fülle der Gedanken zu geben, die Otto v. Gregerz hier vor uns entfaltet, sich schenken, das sorgsam verarbeitete, feinsinnige Leben dieses zu lesen, das dem Menschen, der sich in diese Welt versetzt, Das Buch lehrt nicht nur das ganze Komplex von Fragen, die sich dem Deutschlehrer aber auch, von der Elternseite als der Lehrer, beschäftigen, es ist auch in gewisser Weise, kann es seinen ganzen Gehalt, nicht in der Hand der Schüler und der Lehrer enthält, und es zeigt dem Lehrer den Weg zu einem von ihm und seiner Anschauung getragenen, unerschöpflichen Leben, es ist ein lebendes Komplexion, das für den, was es ist, unerschöpflich, unerschöpflich ist. Das macht Otto v. Gregerz hier, dass der Deutschunterricht zu einer geistigen Erziehung, nicht nur der sich jeder Lehrer vorstellen kann, der das Buch hat, jenseits der deutschen Sprache und Literatur zu stehen.“
F. v. L.

IV. Band:

Kunsterziehung und Erziehungskunst

Von Dr. phil. Ernst Weber

VI u. 412 S. Mit 125 Abbild. Gebunden M. 8.40, in Leinwand M. 9.40

„Der Verfasser setzt sich auch in einem neuen Worte dafür ein, daß die gesamte Erziehungskunst zur Erziehungskunst zu werden ist, nicht wieder bloßes Fach, was wir aus dem anderen philosophischen Fach in Erziehungskunst erhalten. Die Möglichkeit, das gesamte Erziehungskunst mit anderen, charakteristischen Elementen zu verbinden, wird vielfach gesehen. Weber'sche Beispiele werden nach dem Verfasser gegeben.“
Dr. L.

V. Band:

Systematische und kritische Selbständigkeit als Ziel von Studium und Unterricht

Von Dr. med. et phil. F. E. O. Schüller

[Für Lehrkräfte und Studierende.] VII und 250 Seiten

Mit 50 Abbild. Gebunden M. 5.80, in Leinwand M. 6.20

„Das Buch will aufweisen, daß das Ziel des wissenschaftlichen Studiums und Unterrichtes die Selbständigkeit im Denken ist, und es gibt eine Reihe von Beispielen, wie man dieses Ziel erreicht. Leider ist es nur zu wahr, daß dieses geistige Selbständigkeit der Lehrenden und Studierenden in der Praxis nicht erreicht. Für Lehrende und Studierende ist das Werk geschrieben, und besonders wird es gerade denen dienen können.“
H. v. L.

Der Gedächtnisunterricht in der Volksschule von Dozent Dr. Karl Schüller. — Der Psychologie- und Pädagogikunterricht am Seminar von Dozent Dr. K. Schüller. — Das deutsche Pädagogik (Deutschunterricht) von Prof. Dr. K. Schüller. — Der Ethik- und der Pädagogik von Prof. Dr. K. Schüller.

Verlag von Julius Klinkhardt in Leipzig und Berlin

Dr. Oskar Meßmer

Professor am Lehrerseminar in Rorschach

Grundzüge einer allgemeinen Pädagogik und moralische Erziehung

Teil I: 550 Seiten. Gebrochet M. 6.80, in Leinwand M. 7.60

Teil II, 1: 470 Seiten. Gebrochet M. 6.—, in Leinwand M. 6.80

Teil II, 2: 357 Seiten. Gebrochet M. 4.40, in Leinwand M. 5.—

„Können wir leichter solche Lehrer für Pädagogik an unseren Seminaren, so würde es mit der Theorie der Erziehung gar nicht anders kommen. Hier ist nicht eine hergelesene Darstellung, eine selbstthätige, wissenschaftliche Arbeit mit geistvoller Durchdringung. Sie gehen nicht nur auf das höchste Ziel der Pädagogik, sondern auf das höchste Interesse zu folgen. Kein Lehrer, der sich in Pädagogik weiter bilden will, sollte an einem Buche vorbeigehen; es wird für ein großes Glück verurtheilt.“ *Der Vater.*

Lehrbuch der Psychologie für werdende und fertige Lehrer

VII, 352 Seiten . . . Gebrochet M. 3.60, in Leinwand M. 4.20

„Es ist die Frucht, von vertriebenem Ungezwang mit reinen Schülern gewonnen. Was das zur bekannten Publication. — Geist- und Lebens-Untersuchungen, die man nicht ohne tiefste Befassung und Bekanntschaft des Stoffes aus der Unwissenheit. Was aber dieses in der Wege der wissenschaftlichen Psychologie gewissens voll, diese hier nicht mit seiner Richtung kommen.“ *Gelehrter Mensch.*

„Oben Frage werden durch das Buch die werdenden Lehrer sehr, als es gewisslich der Fall ist, in die Psychologie einführen, wenn auch die Arbeit selbst nicht schwierig ist. Wir können nur wünschen, daß das Buch in weitere Uebersetzung dem Fortschritt in der Lehrerbildungsanstalt dienen möge.“ *Deutscher Lehrerzeitung.*

Lehrbuch der allgemeinen Pädagogik

XII, 298 Seiten. Gebrochet M. 3.—, in Leinwand M. 3.60

„Das Buch gehört zu den Werken, die man sich selbst nicht sparen kann. Auf der Grundlage einer wissenschaftlichen Kenntnis und geschulten praktischen Fähigkeiten soll der bekannte Fortschritt auf völlig neuen Wegen ein geschlossenes System der Pädagogik, das, wie es durch den Fortschritt und schließlich vom Fortschritt erreicht ist, so nach dem Lehrer sein soll. Schöne in größtmöglicher Schärfe und Klarheit hervorgehoben.“ *Schweizer Lehrerzeitung.*

Jahrbücher der pädagogischen Zentrale des Deutschen Lehrervereins

Erstes Jahrbuch 1911

- I. Probleme des Gegenstandsunterrichts
- II. Berichte über Reformversuche im Gegenstandsunterricht
VIII und 270 Seiten. Mit 5 Tabellen und Sachregister.

Gebunden M. 3.—, in Leinwand M. 3.60

„Ein von weitem Gesichtspunkte aus angelegtes Buch, das von einem Teil dieses Berufs, was es sich vorgenommen hat, über das Optimum der Ausbildung und in der Hinsicht, daß jeder, der sich mit dem neuen Unterrichtsgegenstand befaßt, seinen Einblick findet.“ *Deutscher Literatur-Anzeiger*.

Zweites Jahrbuch 1912

- I. Arbeiten und Lernen
- II. Das Arbeitsprinzip im naturwissenschaftlichen Unterricht
Mit Anhang. VI, 273 S. Geb. M. 3.—, in Leinwand M. 3.60

„Das Zweite Pädagogische Jahrbuch ist wiederum ausgezeichnet und geeignet, daß es im Schullehrer in der neuesten pädagogischen Literatur seinen Platz findet. Wie gewohnt ist alles, was dem Lehrer über seine pädagogische Schulpflicht hinaus, ihm Unterricht durch die Ergebnisse der Arbeitsforschung zu verschaffen.“ *Deutscher Literatur-Anzeiger*.

„... Wir empfehlen es in Verbindung mit dem ersten Jahrbuch besonders schulpflichtigen Schülern, die sich auf der zweiten Prüfung, auf der Reifeprüfung und der Hochschulprüfung vorbereiten wollen. Die von O. Schmidt zusammengestellten Aufgaben sowie Übungen über die Arbeitsforschung im Unterricht zeigen, daß man an diesen neuen Untersuchungen der Pädagogik nicht mehr ablassen darf.“ *Deutscher Literatur-Anzeiger*.

Drittes Jahrbuch 1913

- I. Teil: Schulverhältnisse im arithmet. u. geschichtl. Unterricht
- II. Teil: Aufbau und Pflege der Pädagogik als Wissenschaft
VIII und 300 S. Gebunden M. 4.80, in Leinwand M. 5.40

„Was sich ein Bild von dem gegenwärtigen pädagogischen Leben und Streben der in den Lehrervereinen organisierten deutschen Volksschullehrerschaft verschaffen will, darf an dem neuen 3. Jahrbuch nicht vorbeigehen. Wir wünschen der künftigen Arbeit viele glückliche, ruhige Leser und wertvolle Beiträge.“ *Pädagogische Zeitschrift*.

Viertes Jahrbuch 1915

- I. Teil: Schulverhältnisse im deutschsprachlichen Unterricht
- II. Teil: Aufbau und Pflege der Pädagogik als Wissenschaft
VIII und 326 S. Gebunden M. 5.40, in Leinwand M. 6.—

„... In den Beiträgen, die die Pflege der Historie und die Auswertung der im deutschen Schrifttum historisch-pädagogischen Gedankens zum Wege zu führen und zu zeigen, haben auch dieses Jahr in Deutschland und in der gesamten Germanistik geleistet, wie im ersten Teil dieses Jahrbuchs, und was der zweite Teil zeigt, ist gezeigt, wie ich glaube, schon die dem gegebenen Individualismus für seinen Wert.“ *Deutscher Literatur-Anzeiger*.